# 液体火箭发动机自动调节

〔俄〕Б·Ф·格列克曼 著

顾明初 郁明桂 邱明煜 译

宇航出版社

（京）新登字181号

图书在版编目（CIP）数据

液体火箭发动机自动调节／（俄）格列克曼(Гликмон, Б.Ж.）著；顾明初等译.-北京：宇航出版社，1995.3
ISBN 7-80034-765-6

Ⅰ.液… Ⅱ.①格… ②顾… Ⅲ.液体推进剂火箭发动机-自动调节 Ⅳ.V434

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第04330号

宇航出版社出版发行
北京和平里滨河路1号（100013）
发行部地址：北京阜成路8号（100830）
北京密云华都印刷厂印刷
新华书店经销

*

1995年3月第1版 1995年3月第1次印刷
开本：850×1168 印张：10.875 字数：292千字
印数：1—550册 定价：21.00元

# 序

继《液体火箭发动机结构设计》和《火箭发动机原理》两书在我国翻译出版后，俄罗斯学者的又一代表性著作——Б·Ф·格列克曼教授的《液体火箭发动机自动调节》一书的中译本也即将出版，我很高兴地将这本书介绍给广大读者。

随着液体火箭发动机工作过程理论研究的不断深入和计算机技术的广泛应用，利用发动机的数学模型来进行方案选择、参数优化、系统稳定性计算以及故障模式分析等，已成为发动机研制工作的一个重要方面。相信《液体火箭发动机自动调节》一书的翻译出版将会帮助我们在这方面进一步地开展工作。

Б·Ф·格列克曼教授对本书的翻译出版给了极大的支持，并亲自为中文版写了热情的、意义深刻的序言。我谨向他表示深切的谢意。祝愿中俄两国的火箭发动机研究人员间的友谊和合作日益增强，并结出丰硕的成果！

中国运载火箭技术研究院
液体火箭发动机研究所
刘 国 球

1994年8月

# 作者中文版序

欣闻本书被选定译成中文，谨对发起翻译本书的刘国球教授表示谢意。

本书(第二版)虽是5年前在俄罗斯出版的，但无论在内容上或材料叙述的特点上都不需要作什么更改。

应该如何利用书中提出的计算方法呢？还在液体火箭发动机草图设计阶段，就可借助书中描述的各组件和整台发动机的数学模型来解决发动机动态特性的评估，发动机调节系统的分析，飞行中箭体纵向稳定性的计算，以及一系列其它问题。在建立这些模型时需使用所设计的发动机的结构数据和物理参数。

直到发动机试验研制开始，这种方法是唯一可行的方法。发动机试验开始后可根据试车时所得的数据对其数学模型加以修正。

然而不论是在发动机各研制阶段，还是在火箭飞行试验时都需要数学模型，因为只有借助数学模型方可在计算机上进行“计算试验”，也就是说利用计算来再现发动机在某些条件下的表现，而不必去进行那费用昂贵、未必安全的热试车。

为发动机应急保护系统和发动机状态功能技术诊断系统而建立各类故障模式数据库时，以及对发动机试车和飞行试验时故障产生的原因进行分析时，都特别需要利用数学模拟。

应当说明的是，本书只对与发动机动态特性有关的部分问题进行了探讨，这就是建立发动机线性动态数学模型和在这些模型基础上对发动机调节系统的分析。

对一些重要的而且是很有意义的液体火箭发动机非线性动态特性问题(启动、停车、大幅度调节)、箭体在飞行中的纵向稳定性(发动机在其中起主导作用)问题、建立应急保护系统和技术诊断系统的问题等，本书都未论及。其中有些问题已另有著作发表，其它一些问题还有待它们的作者去论述。

Б·Ф·格列克曼　教授

1994年6月1日

# 译 者 的 话

Б·Ф·格列克曼教授是长期从事液体火箭发动机动力学问题研究的俄罗斯著名学者。他的《液体火箭发动机自动调节》(第二版)一书对液体火箭发动机数学模型的建立、动态特性计算及自动调节系统分析等问题作了系统地叙述，是一本很有代表性的著作。为此，中国运载火箭技术研究院液体火箭发动机研究所刘国球所长组织我们进行了本书的翻译工作。

本书的第一章由顾明初翻译，第二章由顾明初、郁明桂翻译，第三、四章由郁明桂翻译，第五章由顾明初翻译，第六、七章由邱明煜翻译。由顾明初、郁明桂对全书进行了校阅定稿。

任汉芬阅读了部分译稿，提出了许多宝贵意见，谨表感谢。

刘国球所长、张璞副所长对本书的翻译出版十分关心，并在工作中给了我们很多支持。宇航出版社宋兆武等同志为本书的出版付出了辛勤劳动。谨向他们表示衷心的感谢。

虽然译稿已几经修改，但由于译者水平所限，译文中一定还会有不少错误或不妥之处，恳切地欢迎读者予以批评指正。

译 者

1994年8月

# 原 版 序

当前的任何一个复杂对象(飞行器、发动机、动力装置等)都具有自动调节系统。本书研究液体火箭发动机自动调节原理基础，并叙述建立液体火箭发动机数学模型和计算动态特性的方法。

列出的液体火箭发动机各组合件及系统内过程的计算方法能够帮助设计人员在草图设计阶段就选择出各种最佳参数。

本书第二版较前版有较大修改。删去了“自动调节原理若干概念”和“液体火箭发动机动力学若干非线性问题”这两章。完全重写了液体火箭发动机的液路和气路、动态特性的计算方法及其特点等几章。在第二版中，特别注意液体火箭发动机各组合件及整台发动机的数学模型的建立，因为正是有了调节对象的足够精确的模型才能正确地选择自动调节系统的结构和参数。与第一版不同，在第二版中给出了在两种频率范围内建立液路和气路数学模型的方法——在低频区，可将液体火箭发动机各部件看成是具有集中参数的对象；在高频区，则必须考虑波动过程。

为了便于给液体火箭发动机的各种系统方案建立数学模型，本书列出了它们的通用系统图。只研究在分析自动调节系统时最广泛应用的液体火箭发动机的线性化模型，并在开始时作为举例，既介绍有量纲的，也介绍无量纲变量的模型，而在以后，只使用无量纲变量。

增加了新的一节“液体火箭发动机各回路在中频区的稳定性”，它描述发动机整体的动力学，并对由于发动机某些组合件参数选择不当引起的回路振荡进行了分析。在很多情况下这些振荡是由于气路中存在熵波和涡轮泵装置中轴的扭转振动所造成的。根据对第一版的意见，在第二版中研究了用电子计算机控制液体火箭发动机，给复杂的、有很多分支的飞行器反作用控制系统的供应系统建立数学模型等问题。除了频率特性，在液体火箭发动机

动力学分析时还使用了过渡过程特性。

作者向А.П.瓦尼切夫，А.А.马林科夫斯基，В.А.莫基因科，Г.К.安年科娃娅，В.А.古里耶夫，А.С.洛先科夫，И.П.涅克拉索娃娅及В.В.索洛维也夫表示深切感谢，他们的意见使本书内容更臻完善。

作者

# 目　录

第一章　动态性能的特点 ……（1）
1.1　液体火箭发动机各组件的动态过程及其数学模型描述 ……（1）
1.1.1　用动态特性求解某些问题 ……（1）
1.1.2　各组件非稳态过程的若干特点 ……（3）
1.1.3　各组件工作过程的数学模型 ……（4）
1.2　液体火箭发动机的非稳态工况　过程的稳定性 ……（7）
1.2.1　过渡过程 ……（7）
1.2.2　液体火箭发动机组件及回路的工作过程的稳定性 ……（8）
1.3　作为调节对象的液体火箭发动机 ……（13）
1.4　液体火箭发动机的通用系统图 ……（18）
1.5　作为飞行器控制系统执行机构的液体火箭发动机 ……（22）
1.6　液体火箭发动机对飞行中箭体纵向稳定性的影响 ……（25）
第二章　液路的数学模型 ……（29）
2.1　具有集中参数时流路的动力学方程 ……（29）
2.1.1　流体火箭发动机流路的特点 ……（29）
2.1.2　流容 ……（30）
2.1.3　惯性 ……（33）
2.1.4　局部阻力 ……（35）
2.1.5　离心泵 ……（36）
2.1.6　燃烧室和燃气发生器供应流路的方程 ……（41）
2.1.7　考虑液体的惯性和压缩性时液路分段的数学模型 ……（49）
2.1.8　作为集中参数系统的液路分段的若干动力学特点 ……（55）
2.2　流体力学方程 ……（59）
2.2.1　原始方程 ……（59）
2.2.2　无量纲方程 ……（61）
2.2.3　方程的简化 ……（62）
2.2.4　线性化方程 ……（69）
2.3　对强迫振荡的流体力学线性化方程求解 ……（71）
2.3.1　边界条件 ……（71）
2.3.2　流路内液体的强迫振荡 ……（75）

2.3.3 强迫振荡各解式的简化 ……（78）
2.4 液体在流路分段内的固有振荡频率 ……（79）
2.5 过渡过程 ……（85）
2.5.1 由集中参数元件组成的流路 ……（85）
2.5.2 由分布参数元件组成的流路 ……（88）
2.6 过流流路频率特性曲线的特点 ……（93）
2.7 流路内考虑摩擦力同频率的关系的非稳态流模型 ……（101）
2.7.1 层流 ……（101）
2.7.2 紊流 ……（111）
2.7.3 过渡过程 ……（121）
2.8 建立动力装置分支管路系统数学模型的矩阵法 ……（128）
2.8.1 概述 ……（128）
2.8.2 流路分段作为四端网络 ……（128）
2.8.3 具有集中参数的元件作为四端网络 ……（131）
2.8.4 具有串联和并联元件的流路的矩阵模型 ……（132）
2.9 利用信号流图分析液路系统的动力学 ……（136）
2.9.1 基本定义 ……（136）
2.9.2 流图转换规则 ……（140）
2.9.3 麦森公式 ……（143）
2.9.4 具有集中参数系统的动力学分析 ……（146）
2.9.5 对具有分布参数的气液系统建立信号流图的例子 ……（155）
第三章 气路动态特性 ……（162）
3.1 低频区气路中的非稳态过程 ……（162）
3.1.1 无过流的流容 ……（162）
3.1.2 具有可变温度的流路中非稳态过程的某些特点 ……（165）
3.1.3 非稳态绝热过程的数学模型 ……（168）
3.1.4 气路瞬时充分混合的数学模型 ……（174）
3.2 气路的数学模型 ……（176）
3.3 流路内有熵波时动态特性的特点 ……（194）
3.3.1 描述流路内具有熵波的气流频率特性的方程 ……（194）
3.3.2 流路频率特性的计算结果与试验数据的比较 ……（196）
3.3.3 有熵波的气路频率特性曲线 ……（198）
3.4 液体火箭发动机气路的频率特性曲线 ……（201）
3.4.1 燃气发生器的特性曲线 ……（201）



3.4.2 燃气导管的特性曲线 ……（207）
3.5 燃气发生器的结构特点对其动态特性的影响 ……（209）
3.5.1 均布出口 ……（209）
3.5.2 双区燃气发生器 ……（216）
3.6 气路中的声学效应计算 ……（219）
3.6.1 视为具有分布参数系统的气路动态方程 ……（219）
3.6.2 具有不等温气体流动的流路分段方程解的矩阵表达式 ……（225）
第四章 涡轮泵动态特性 ……（228）
4.1 涡轮方程 ……（228）
4.2 离心泵方程 ……（233）
4.3 涡轮泵方程 ……（236）
第五章 液压调节器动态特性 ……（238）
5.1 液压调节器非稳态过程的特点 ……（238）
5.2 调节器的数学模型 ……（242）
5.3 “调节器-试验台管路”的系统稳定性 ……（250）
第六章 建立液体火箭发动机数学模型的方法 ……（255）
6.1 基本变量 ……（255）
6.2 液路模型 ……（257）
6.3 气路模型 ……（264）
6.4 涡轮泵 ……（273）
6.5 液体火箭发动机频率传递函数的计算方法 ……（277）
第七章 液体火箭发动机的动态特性和稳定性 ……（280）
7.1 发动机低频区线性化数学模型 ……（280）
7.2 无调节器的发动机在低频区的动态特性的特点 ……（283）
7.3 带液压调节器的发动机调节系统的稳定性 ……（286）
7.4 调节系统对发动机动态特性的影响 ……（293）
7.5 发动机回路在中频区的稳定性 ……（298）
7.6 过流流路内有熵波时的过程稳定性 ……（303）
7.7 用电子计算机控制液体火箭发动机 ……（308）
7.8 反作用控制系统动态特性 ……（318）
7.8.1 分支管路系统频率特性 ……（318）
7.8.2 分支液路系统内的过渡过程 ……（322）
7.8.3 分支管路系统内不等温非稳态气流 ……（325）
参考文献 ……（334）

# 第一章　动态性能的特点

## 1.1　液体火箭发动机各组件的动态过程及其数学模型描述

### 1.1.1　用动态特性求解某些问题

液体火箭发动机各组件具有非稳态工况的特点：燃气发生器、燃气导管、燃烧室中的液体和气体的参数，涡轮泵的转速，调节机构的位置等都在变化。决定液体火箭发动机动态特性的典型的非稳态工作过程可分为两类：

振荡过程，在某个回路中的自振作用下或受到固定频率的谐波作用时产生；在这些过程中，发动机参数的平均值保持不变；

过渡过程，在控制机构的状态有变化或结构完整性受到破坏时产生；在这些过程中，发动机参数随着时间在变化。

液体火箭发动机的启动，从一种工况转到另一工况，关机，以及某些组件工作不正常使性能发生意外变化的过程，这些都属于过渡过程。

液体火箭发动机的动态和静态特性对于解调节问题有着重要意义。静态特性决定着发动机主要性能与内、外部的控制和扰动作用之间的关系，这些作用由调节机构的状态（例如，节流装置的转角），泵入口处推进剂组元的压力变化，推进剂组元的温度、密度、相成分（存在气相时）的变化，组件性能（泵的效率和压头特性，涡轮效率和流量特性，液路部件的阻力等）相对于统计平均值的偏差等因素所决定。下面只研究各组合件及发动机整体的动态特性。关于调节精度静态特性问题，在其他一系列著作中

已有相当详细的叙述[27,34]。

自动调节系统包含调节对象（液体火箭发动机）和调节装置（调节器、阀、节流装置等）。在选择自动调节系统的最佳方案和分析它的特性时，必须评定调节精度（静态和动态），分析调节过程的稳定性，确定过渡过程的品质等。为了解上述问题，一定要知道自动调节系统的这两个组成部分的动态特性。

在液体火箭发动机的系统中引入自动调节系统的组件——自动调节器，常常会使发动机的静态和动态特性发生重大变化，例如出现发动机频率特性的共振，有时甚至使自动调节系统失去稳定。对这个令人不愉快的事实的解释是给定的调节器不适合于该发动机。因而，为了保证自动调节系统的稳定性或改善带有调节器的液体火箭发动机的动态特性，必须改变调节器的动态特性。从原理上说，也可改变发动机的动态特性，但这样做非常复杂，有时甚至是不可能的。

为了保证自动调节系统有足够的稳定性裕度（它在很大程度上取决于发动机的频率特性），必须利用发动机的动态频率特性及调节器的数学模型对“发动机-调节器”系统的稳定性进行分析。在研制飞行器的控制系统时也需要应用发动机的动态频率特性，因为对飞行器来说，发动机是它的执行机构。例如，在依据视速度调节器波道来分析火箭的前几级控制系统时，将发动机的动态特性作为控制回路的一个组成部分[14]。

在分析由许多液体火箭发动机（燃烧室）组成的空间飞行器的反作用控制系统时，必须知道决定过渡过程形式、控制脉冲的大小和持续时间，以及反作用控制系统的效率等因素的其它动态特性[11]。

为了确定火箭在飞行中的纵向稳定性，也需要知道液体火箭发动机的动态特性。当“火箭箭体—贮箱至发动机的推进剂输送管路—发动机”各部分的动态特性组合不当时，就可能失去稳定，伴随出现箭体的纵向振动及发动机入口处推进剂压力和燃烧室压



力的振荡。这些振动可造成火箭毁坏。由于发动机是振荡回路的一个组成环节，因此，它的动态特性在很大程度上决定着整个回路的稳定性[12,20]。

上面所举的各个例子说明，必须对发动机的动态性能作详细研究。本书就是专门研究这个问题的。下面首先讨论液体火箭发动机动态过程的普遍特性。

### 1.1.2 各组件非稳态过程的若干特点

火箭发动机，特别是液体火箭发动机，以各主要组件在工作过程中有很高的功率密度而明显区别于其它各种热力发动机。例如，美国航天飞机的液体火箭发动机的推力为2.1MN，按燃气从喷管流出时的动能来计算，其功率约为$8\times10^3$MW[8]。相比之下，规模庞大、结构质量达数吨的电站发电机组的功率仅为$10^3$MW这个量级，而上述液体火箭发动机的质量总计才3100kg。也就是说，液体火箭发动机的每千克质量可产生3MW的功率。这样，液体火箭发动机的功率密度要比其它各种热力发动机高出几个量级。液体火箭发动机及其各组合件的高功率密度对它们内部发生的各种过程，特别是动力学过程，有着很大影响，导致出现频率范围很宽（一至几千赫芝）的各种类型的自激振荡。由于高功率密度，一部分组合件的特征时间常数都很小——为百分之几秒或千分之几秒这个量级，只有在某些特殊情况下，它们才达到十分之几秒。

另一方面，现代液体火箭发动机的系统非常复杂，而且所有组件都互相联系着。由于各组件的时间常数的量级相近，同时各组件又相互联系着，因此，液体火箭发动机通常有比较宽的通过频带。这样，在分析液体火箭发动机动态性能的特点时，特别是对补燃发动机，往往难以区分出某个主要的、决定性的、可基本表示发动机动态特性的环节（或回路）。因此，在建立发动机的数学模型时，不得不利用所有组件的方程，很难忽略某一部分。结

果使发动机的数学模型显得非常庞大：非线性模型可包含几百个方程（微分方程和代数方程）；而线性模型，也有几十个方程[31]。

由于对许多过程（泵的非稳态气蚀，调节装置中的非稳态流动，气流在通道内有流动分离等）研究得还不充分，许多模型只是近似的，对应用这些模型的合理性，要根据试验数据才能作出最终判断。

### 1.1.3 各组件工作过程的数学模型

在自动调节原理中，常将调节对象分解为一些可以用最简单的数学模型来描述它们所发生过程的单独元件。某个元件（或对象）的数学模型是指对于所提出的问题能以足够精度来描述该元件或对象所发生过程的各种特性（其中包括动态特性）的各种数学关系的总和（微分方程、代数方程、曲线图、表格等）。

描述精度不能随意给定，因为每次都应对过程描述所需的详细程度进行论证，否则没有必要去求解那些十分复杂和庞大的问题。在分析调节对象的动态特性时，频率范围或控制信号和干扰信号作用于调节对象的特征时间有着决定性作用。

例如，液体火箭发动机的很多动力学问题及控制问题具有频率范围较低（一般低于50Hz）的特点，基本上可将发动机的各组件和部件看成是具有集中参数的元件。也就是说，可以用常微分方程来描述。如果将所研究的频率范围扩大，那么发动机的大多数部件（包括它的所有组件及有液体或气体流动的部件）必须看成是具有分布参数的元件，并相应地求解偏微分方程。与常微分方程相比，解偏微分方程要复杂得多，解的本身也很庞大，需在电子计算机上花费很多工作时间来求得。同时，在低频范围内，偏微分方程的解与较简单的常微分方程的解是一致的。也就是说，在这种情况下将数学模型复杂化并未能得出更精确的解，只是给解算工作增加了困难。

因此，在论述液路和气路动力学的章节里，给出了流路的两种



数学模型：对于低频区——视为具有集中参数的系统（气路的熵波模型除外）；而对于较宽的频率区域（至400Hz）——视为具有分布参数的系统。

在建立液体火箭发动机各主要组件的数学模型时，考虑了影响静态和动态特性的各种过程的特点。特别是在描述发动机上有流动的气路（燃气发生器、燃气导管、燃烧室）时，考虑了它们内部所进行的过程与普通流容（在调节原理中视为典型元件）中所进行的过程有着重大差别：燃气由两种推进剂组元生成，有燃烧过程，在燃烧区内有熵（温度）波形成，它们以一定速度沿着气路传播。燃烧区内的熵波是由于两种组元的输送流路的静态和动态特性不对称，对流路内压力振荡的反应不同所造成的。两种组元的流量振荡在幅值和相位上的差异使混合比发生变化，引起燃烧产物的温度振荡，并使熵波沿着流路传播。

由于存在熵波和燃烧区，故不能将燃气流路看成是普通流容（非周期性）元件。因此，即使在低频区，对发动机各燃气流路也必须考虑波动过程（熵波），也就是说，在确定熵（温度）时，要将燃气流路看成是具有分布参数的系统。熵波的存在，无论是对各燃气流路的动力学或是对整台发动机的动力学，都有着重大影响。

如果转到较高频率区（400Hz以下），在解动态特性问题时，必须将气路各段都看成是具有分布参数的元件，也就是需考虑声学效应——纵向声波。由于频率范围有限，不考虑气路中其它形式（音调）的声振荡。

同气路的数学模型一样，可将液路的数学模型分为两类：低频区的和400Hz以下的较高频率区的。对低频区，基本上将液路各段看成具有集中参数的元件，同时，只考虑液体的惯性和粘性，而忽略它的压缩性。但是，若液路各段的长度不超过一定的范围，或液体在各段的流速不大，也可考虑液体的压缩性，这时仍在集中参数元件模型的范围内。用这种方式来描述低频动力学时，从

泵入口到燃气发生器或燃烧室喷嘴前（包括泵的过流部分）的整个液路的线性数学模型可归结为一个方程。因此，发动机的整个低频模型得到了简化。如果发动机过程属于高频范围，那么应将液路看成是具有分布参数的各元件，这使它们的数学模型复杂化，因而必须采用矩阵或信号流图来描述，在计算过渡过程时，则需采取特征线法。

描述液体火箭发动机水力装置——涡轮泵及液压调节器的动力学看来似乎最简单。事实上，最简单的一阶非周期性元件方程只是描述了涡轮泵的一阶近似情况。考虑轴的扭转振动时，涡轮泵的模型就较复杂，这时，可将它看成是通过弹性元件（例如弹性短轴）联结在一起的两个独立的旋转质量。考虑泵过流部分液体的惯性时，也使涡轮泵的模型复杂。考虑泵入口气蚀现象的模型就非常复杂。必须指出，这里所讨论的主要是指尚未影响泵的静特性的、潜在的局部气蚀现象，而不是已使泵的压头下跌的那种气蚀状况。泵入口处的局部气蚀对泵以及泵前液路的动态特性有影响：使液路的自振频率降低，泵的放大系数增加。这两个因素对火箭飞行的纵向稳定性有很大影响，因为系统的稳定性正是由液路的共振频率和液体火箭发动机的放大系数所首先决定的[12,20]。泵的放大系数(即发动机的放大系数)是指泵出口（燃烧室内）压力的振幅同泵入口压力的振幅之比。

在计算过渡过程，特别是计算发动机的启动过程时，必须考虑气蚀现象[31]。对泵气蚀现象动力学的研究还很不够——还没找到能依据泵的结构参数和工况参数来计算气蚀发展过程动态特性以及它对泵性能的影响的方法。

液压调节器中各元件的运动通常用振荡元件的方程来描述（采用“液压”这个名称是因为调节器中主要控制元件是用液流来控制的机械零件)。但是当仔细研究时(见第5章)，会发现在调节器的运动件运动时，受挤压（或被抽吸）的液体也随之运动，在建立调节器的数学模型时必须考虑这部分液体的运动。常常出现



这样的情况，即随着运动件一起运动的液体的质量比运动件本身的质量要大几个数量级。确定这部分附加液体的质量是一个相当复杂的流体力学问题，因为调节器流路的截面很复杂。

在分析调节器的动态和静态特性时，常常需要求出液体作用在被绕流的运动件上的流体动力（有时称为射流反作用力)。流体动力的大小与节流元件的位置有关，也就是说，它具有同弹簧相当的特性——力的大小随位置的不同而变化。流体动力弹性常常是可比的，而有时则大于弹簧以及调节器其它类似元件的弹性。因此，计入流体动力可使调节器的某些特性，如差率、运动件的自振频率等产生很大变化。差率是被调节量同外界作用偏差之比。这个量是调节器静态精度的量度。求流体动力也是一个很复杂的流体力学问题，因为涉及对粘性流体在复杂形状通道内有分离现象的流动情况的描述。

上述各组合件的过程特点造成了补燃发动机的某些性能：通过频带宽（因此没有滤波器性能)，幅值特性曲线的共振，相位特性曲线的相位差大。这些性能可由发动机的动态特性曲线求得。上述特点造成作为调节对象的液体火箭发动机具有一系列的特殊性质（见1.3节)，它们也是在发动机的各个回路内产生各种频率的振动的原因（见1.2节)。

## 1.2 液体火箭发动机的非稳态工况过程的稳定性

### 1.2.1 过渡过程

在液体火箭发动机启动或关机，工况转换，某个组合件出现故障等情况下所产生的过渡过程都是非稳态工况。此外，自激振荡，即过程失去稳定性，以及在用试验来确定发动机及其组合件的动态（频率）特性时所产生的强迫振荡，也都是非稳态工况。

在启动或关机过程中，发动机参数在非常宽的范围——从零

到额定值之间变化。从建立数学模型的观点看，启动计算是典型的非线性问题，本书不予研究，而只是简单地讨论与启动控制有关的一些问题。启动（关机）的控制方式可有两类：间断控制（各种阀按一定的时间间隔动作）和连续控制（各调节装置按一定的程序动作）。受控启动可以没有反馈或带有反馈。有反馈时，通过测量装置来保证严格地执行程序。受控启动（关机）具有明显的优点：可以精确地按时间保持给定的程序，发动机有较高的可靠性，可以较快地完成启动过程，以及（在必要时）避开某个组件或回路在中间工况下非稳态过程的危险区等。

在启动过程中，有时会伴随出现许多可能导致故障的不利情况：燃气发生器温度超过规定值，造成流路中零部件的烧蚀（在氧化性环境中）或熔化；泵的气蚀断流，造成燃气发生器温度过高或使发动机工况改变：两种组元进入燃烧室和燃气发生器的封闭腔（喷嘴、空腔、头部、冷却套）时产生局部爆燃等。很遗憾，正是对这些过程的研究还很少。

在建立发动机的线性化数学模型时，只能考虑在较小范围内进行调节时所产生的过渡过程。线性模型的适用范围决定于所描述对象的特性。对于液体火箭发动机，其适用范围通常为偏离值不超过稳态工况参数值的15%。线性模型对于获得故障状态扩展的曲线很有用，这些曲线是建立技术诊断系统数据库所必需的。这时，具有充分可靠的故障状态扩展的模型很重要。

在采用线性近似法来计算过渡过程时，对某些组件的非稳态工况的描述，例如当推进剂流量或涡轮泵的转速迅速变化时泵内气蚀现象的描述，会遇到一些困难。

### 1.2.2 液体火箭发动机组件及回路的工作过程的稳定性

过程的功率密度高，通过频带宽，某些环节有滞后幅角，这些都是各组件、回路在各种频率下失去工作稳定性的原因。通常可分为低频振荡（100Hz以下）、中频振荡（100～400Hz）和高频



振荡（400Hz以上）。这种按频率范围划分的方法是相对的，依据也不很充分。比较正确的是根据各组件内过程的动态特性来划分，这些特性对应产生各种类型的振荡。现研究使液体火箭发动机工作过程失去稳定性的几种主要原因[12,18,20,21,22,24]：

（1）气蚀振荡

在液体火箭发动机的泵中，特别是在它的前置泵（诱导轮）中，几乎总有着不影响泵的主要性能（压头、功率）的局部气蚀。由于气穴与在它周围流动的流体以及液路中的液柱的相互作用，便可能产生气蚀振荡[24]。液流以一定的冲角进入诱导轮叶片，该冲角由液流速度（流量）和轴的转速所决定。气穴产生于入口边缘的流动分离区域内，它的体积既同流体运动情况有关，也同泵入口压力有关。振荡时，这些因素在变化，如果出现不利条件，就会失去稳定性。现仅指出某些表征气蚀振荡的定性特征，它们对于诊断液体火箭发动机内产生振荡的原因是很重要的。

气蚀振荡的特点在于它的振荡频率和振幅都决定于泵入口压力的大小。在一定压力下，产生振荡；随着压力的下降，振幅起初增大；然后开始减小，频率也降低；当达到某个最低压力时，振荡消失。这样，泵入口压力有着某个产生气蚀振荡的范围。同时还应注意，诱导轮出口压力的振幅比入口处大，而泵出口压力的振幅又常常比泵入口处要大，这就是说，出现气蚀的泵可使压力振荡加大。在泵的自振，或是在强迫振荡的频率试验过程中，都可看到这种效应。当泵入口压力振幅较大时，压力变化曲线具有典型形状：先是尖峰——最大值，然后缓慢地，有时几乎是水平地变化至最低压力值。

振荡并不是产生在随着入口压力降低使泵的压头开始下跌的明显气蚀区内，而是产生在有一定气蚀裕度的区域内[24]。泵入口和出口流路内液体的惯性影响着液路系统的稳定性。增加泵入口通道内液柱的惯性，以及减小出口流路内的惯性，可使系统稳定，这同增加入口流路的水力损失有同样作用。从以上叙述可看

出，在试验台上试验时，如果不能模拟真实管路的惯性及水力阻力，液体火箭发动机的泵所特有的气蚀振荡就可能不会发生。而当发动机在飞行器上工作，处于飞行试验的条件下，则可能产生自激振荡。这种情况使得难以识别产生振荡的原因，因为在同样的频率范围内，可能是飞行器在飞行中失去纵向稳定性而引起的振荡（见1.6节），也可能是气蚀振荡。上述情况说明，在地面试验阶段，保证各种试验条件最大限度地接近真实条件，特别是液体火箭发动机供应系统的流体动力相似性，这是十分重要的。

在低频范围内（50Hz以下）失去稳定性的其它可能原因与“液体火箭发动机-调节器”回路有关（见第七章）。

该回路失去稳定性时，可观察到泵入口压力的强迫振荡，它们往往同气蚀振荡难以区分。为了判明发动机失去稳定性的原因，最好能在同箭上供应系统流体动力相似的试验台上进行试验。试验时应当缓慢地改变泵入口压力的平均值。如果入口压力变化时，振荡频率没有变化，那么，振荡原因很可能与气蚀无关。但泵前液体压力的振幅可能会改变，因为气蚀穴的大小随着液体压力在变化，从而影响到振幅。这样，泵入口压力变化对“发动机-调节器”回路的稳定性没有影响。它本身就是区分气蚀振荡和“发动机-调节器”回路强迫振荡的最简单的判断标志。

（2）“箭体-发动机管路”回路失去稳定性

当箭体纵向弹性振动的某个固有频率同从贮箱到泵或发动机的管路段的共振频率一致时，通常就会使该回路失去稳定性。箭体纵向弹性振动带来大振幅的纵向过载振动，其曲线在形状和频率方面与箭体某一固有频率的振动曲线相一致。只是在飞行的某个阶段，当振动回路中某些部件的固有振动频率接近相同时，才会产生箭体的纵向弹性振动。利用这些特征可将纵向弹性振动与其它类型的低频振动区分开来。

（3）“发动机-调节器”回路的振荡

这类振荡也具有低频的特点。其产生原因是调节器的静特性



和动特性与发动机的特性不协调。为了使它们协调起来（见第七章），可以改变调节器的静特性或动特性。前面叙述的判断低频振荡产生原因的方法可以用来确定失去稳定性的原因。但有时会有疑问，因而需要检查调节器参数对发动机稳定性的影响。这时，或者特意地明显改变调节器特性（例如调节器的差率，或运动件的阻尼时间常数），或者在发动机工作时将调节器完全断开，例如将运动件卡住或接入不带调节器的旁通管路。

（4）燃烧室低频振荡

燃烧室低频振荡发生于液体火箭发动机燃烧室和燃气发生器内的燃烧过程中，因而它们的发生首先与燃烧过程的动力学特点有关。这时，发动机其它组合件内（管路、泵、调节器等）所进行过程的动力学对上述低频振荡没有多大影响。但它们影响到发动机某些回路的振荡（见后面的叙述），这也是燃烧室低频振荡与发动机某些回路的振荡的不同之处。

必须说明：虽然对所研究的各种振荡都用了“低频振荡”这个术语，但这并不意味着各类振荡的频率范围都相同。燃烧室振荡的频率范围要比所研究的其它各类振荡的频率范围更宽些。

燃烧室内的压力分布特性是低频振荡与燃烧室内其它类型振荡——高频振荡（见后面叙述）相区别的特点。低频振荡时，燃烧室内各点的压力瞬时值几乎都是一样的。这是因为对于低频振荡来说，燃烧室长度远小于声波长度。相应地，燃烧室低频振荡的主要特征之一，就是它们的频率低于燃烧室内燃气压力声振荡的一阶频率。

产生低频振荡的原因——燃烧室内混气形成区（包括喷注器头部）同具有压力振荡的燃烧区之间的相互作用，此燃烧室可作为具有集中参数的系统，当喷嘴压降减小时，出现低频振荡的可能性就增大。因为，一方面它使推进剂的雾化情况变坏并导致燃烧时间增大；另一方面，使喷注器头部对压力振荡的敏感性增大，因为压力振荡对推进剂组元流量振荡的影响增大。因此，当

发动机推力减小和喷嘴压降降低时，常常会出现低频振荡。

上述特点可以帮助判断发动机工作过程失去稳定性的原因。应当指出，推进剂组元的特性对燃烧室工作过程的稳定性有很大影响。使用燃烧时间短的推进剂时，燃烧室很少产生低频振荡。增大燃烧室容积是促使其稳定的因素之一。

(5) 某些回路内的中频振荡

在某些情况下，液体火箭发动机会产生中频振荡，这时，就不能将这些组件（液路或气路的）视为具有集中参数的系统，因为声波的长度同流路的长度已可以相比。К.И.阿尔塔莫诺夫首先注意长管路内的参数分布对由燃烧室、管路和气瓶所组成回路的工作过程稳定性的影响[3]。含有长管路的推进剂输送系统的波动过程对振荡产生过程有很大影响。由表征燃烧室(燃气发生器)工作过程的各参数所建立的回路过程稳定性边界曲线具有“锯齿”状，这是具有分布参数的系统的特性；同时，稳定性边界处的频率可能接近于管路中液体的固有频率。所产生的振荡频率通常高于前面所叙述的燃烧室低频振荡的频率，但是低于燃烧室声振荡频率(见后面叙述)。因此，这类振荡常称为中频振荡。

如果考虑的不只是单个管路，而是整个发动机供应系统，那么数学模型就大为复杂。这个问题将专门在第七章中予以讨论，并对各回路的振荡与发动机稳定性的关系进行分析。

(6) 燃烧室工作过程的高频不稳定性

当燃烧室工作过程出现高频不稳定时，会激发起声振荡，其频率与气柱的某一振型(纵向、径向或切向)的固有频率相一致。纵向声振的固有频率为$f_{\text{п}}=a/(2L_{\text{к}})$，式中$a$——燃气声速；$L_{\text{к}}$——燃烧室长度[36]；径向振荡时为$f_{\text{р}}=1.22a/D_{\text{к}}$；切向振荡时为$f_{\text{т}}=0.586a/D_{\text{к}}$，其中$D_{\text{к}}$——燃烧室（燃气发生器）直径。上列公式只是描述了最低的一阶振荡。在更高阶的振荡时，也可能失去稳定性。声速决定于燃烧产物的热力性能：$a=\sqrt{\kappa_{\text{к}}R_{\text{к}}T_{\text{к}}}$，式中$\kappa_{\text{к}}$，$R_{\text{к}}$，$T_{\text{к}}$——分别为燃烧室内燃烧产物的绝热指数、气体



常数和温度。

向振荡系统供入能量的反馈机理原则上与低频振荡的机理相似——压力振荡与混气形成、混合和燃烧各过程之间的相互作用。克服高频振荡的方法主要在于改变喷注器头部以便影响燃烧过程；也可以采取其它使过程稳定的方法——设置隔板、声腔等，以改变燃烧室的声学特性[20,22]。

## 1.3 作为调节对象的液体火箭发动机

液体火箭发动机的工况一般由三个系统来控制：发动机的调整系统，发动机内部的调节系统和飞行器控制系统。

利用调整系统可对发动机的零、组件生产过程中不可避免的制造误差进行局部补偿。调整系统包含有设置在液路或气路各截面处的节流装置。在组合件的液流试验，以及在发动机的专门工艺试验时，改变节流圈的流阻可获得所需的发动机性能，使燃烧室压力、推进剂混合比等主要参数的偏差减至最小。发动机调节系统的组件也可用作调整系统的元件，根据液流试验或工艺试验的结果对它们进行补充调整。

发动机内部的调节系统可使发动机参数保持比调整系统更高的精度。这两个系统并不相斥，相反地，它们互相补充。调整系统使调节系统减少了一部分载荷，缩小了需要调节的范围。如果调节系统具有足够的调节范围，能保持（稳定）发动机的主要参数，并按照飞行器控制系统的指令来改变工况，那么也可以不用调整系统。调节系统中有一个或几个调节器（稳定器），用来保持或按程序（指令）改变发动机的主要参数。调节系统可以以液压（气动）调节器为基础（见第五章），或以带有反馈测量装置及使执行机构——节流装置动作的传动装置的箭上电子计算机为基础（见7.7节）。

对于飞行器控制系统来说，液体火箭发动机是执行机构，用

来实现飞行器在空间的姿态变化（或稳定）、推力大小的改变以及贮箱中推进剂组元的同时耗尽。对作为执行机构的发动机的控制是通过以下几种途径来实现的：利用专门装置（节流装置、阀门等）使工况改变；改变调节系统调节器的调整状态；或改变发动机在空中的姿态，或改变发动机上某些部件的姿态，以改变推力方向[2]。

这里仅讨论调节系统，认为发动机调整系统是调节系统的一部分。为了保证能对各种破坏发动机工况稳定性的干扰作用进行补偿，必须有调节系统。进入发动机的推进剂组元的压力、密度、温度的变化，外部环境压力的变化，飞行器加速度的作用（过载）以及箭体的振动等，都属于外界干扰因素。

内部干扰因素决定于发动机各零、组件的结构参数对设计值的偏差，这些偏差同零、组件制造公差有关。零件结构参数的偏差造成用它们装配起来的组合件的性能产生偏差。例如，泵有压头特性和功率特性的偏差，涡轮——喷嘴流量系数及效率的偏差，燃气发生器——在给定混合比下的燃气作功能力（$RT$值）及绝热指数的偏差等。发动机的所有参数都是互相联系的，各组合件的性能偏差会使发动机工况偏离设计值，也就是使发动机推力、混合比等发生变化。

由于内外干扰因素的影响，发动机的工作参数可能对额定值有相当大的偏离，使比冲和混合比发生变化，也就是使发动机的能量特性和飞行器的性能变坏。此外，由于上述偏差，发动机的参数可能超出它的工作范围，成为出现故障的原因（冷却不够使燃烧室烧蚀，高频振荡等）。

飞行器控制系统也可根据它的测量装置的信号来修正发动机的工况，但是这个过程有很大的滞后，因为飞行器作为调节对象时所具有的时间常数要比发动机的时间常数大几个数量级。此外，为了用飞行器控制系统来补偿发动机工作的偏差，就必须扩大控制系统对发动机的调节范围，这样做很复杂，常常是很不合



算的。因此，每台发动机应当具有这类或那类调节系统来保证它的工况。发动机参数必须保持的精度，一方面取决于飞行器控制系统的特性，另一方面，也决定于发动机本身的各种参数。

为使控制系统正常工作，发动机推力（燃烧室压力）的精度必须保持在2%～4%这个范围内[14]。混合比的必须精度则取决于飞行器的控制方案。如果控制系统中有贮箱同时耗尽系统，那么，可将混合比精度限制在3%～5%的范围内，这可以通过发动机的调整来实现。如果没有贮箱同时耗尽系统，那么，混合比精度不仅影响发动机性能，并且通过贮箱内推进剂安全余量影响到飞行器的性能。因此，没有贮箱同时耗尽系统时，混合比精度值最好不大于3%。

除了将发动机主要性能保持在给定范围内的调节器外，在发动机调节系统中还可补充设置其它调节器，其目的在于提高发动机的可靠性。这类调节器有燃气发生器混合比稳定器，燃烧室冷却通道流量调节器等。这些辅助调节器的调节精度范围为4%～5%。

在发动机系统中加上调节器后，使发动机更复杂，并使各参数间形成新的关系。一方面，加上新组合件后，使发动机系统更复杂，造成它的可靠性降低；另一方面，加上调节器可使发动机工作参数的偏差减小，发动机可靠性应当提高。调节系统设计者的主要任务之一就是要保证使增加调节器后所获得的积极效果能明显地超过由于增加发动机组合件数目而可能引起的消极后果。

在发动机系统中加上调节器后还会产生另一个问题——保证调节系统的稳定性。若不带调节器时发动机是稳定的，而“发动机-调节器”系统却失去稳定，这是由于加上调节器后出现了新的、有大的耦合系数（放大系数）的相互关系所造成的。如同前面所指出的那样，可利用发动机和调节器的数学模型来分析稳定性，同时在调节器参数中寻找调节系统的稳定边界。

为了保证系统的稳定性，在选择调节器参数时必须留有一定

的稳定性余量（调节器参数的特征点应当离开发动机稳定边界有一定距离）。稳定性余量的先决条件是，稳定性边界和调节器参数的特征点应同发动机和调节器的额定性能相符，也就是说，应当是它们的数学期望值。各组合件性能对额定值的自然偏差不仅造成发动机和调节器的静态特性偏差，而且还造成了它们的动态特性偏差。因为稳定性边界和调节器参数是由发动机和调节器的动态特性所决定的，所以，它们也会有一定的偏差，即带有概率性。在存在偏差的情况下，为使“发动机-调节器”系统失去稳定性的概率最小，调节器的设计点应离稳定性边界有足够距离。

发动机和调节器的静态及动态特性偏差对系统稳定性的影响表现在振荡状态的再现性常常很差，在同一种发动机的某台试件中并未出现振荡，而同样条件下，在另一台试件中却出现了振荡。

稳定性余量决定着过渡过程的品质——调节器参数的特征点越接近于稳定性边界，过渡过程的振荡幅度就越大。选择足够大的稳定性余量可以基本上避免过渡过程的振荡。过渡过程的参数，以及发动机的频率特性，在很大程度上取决于调节器参数，因此，对发动机动态特性的要求首先在于对发动机调节系统的方案和参数的要求。改变调节方案或调节器参数（时间常数、放大系数），可使发动机动态特性也在一定范围内变化。

如果调节系统包含有几个调节器（例如，燃气发生器燃料流量调节器及燃烧室混合比稳定器），那么，不可避免地它们会互相影响。这种影响是附加干扰，因此在选择调节方案时最好使调节器的相互影响为最小。消除这种影响的可能方案之一是在调节器之间加上专门的修正联系。

在分析飞行器控制系统动力学，计算飞行器在飞行中的纵向稳定性边界时，将发动机连同调节系统在一起的计算动态频率特性作为原始数据。为了选择发动机的调节器参数，在分析调节系统稳定性时，必须有发动机的其它频率特性作为原始数据，这些特性是按发动机无调节器时的数学模型计算获得的。如果发动机



有几个调节器，那么，在分析调节系统的稳定性时，应考虑它们的相互影响。

前已指出，液体火箭发动机具有较宽的通过频带，但是对于调节系统稳定性分析问题，感兴趣的是较窄的频带——50Hz以内。对这样的频率，可只考虑最简单的数学模型方案，将各组合件都看成具有集中参数的元件（燃气路除外，它必须考虑熵波）。这时，应随时注意所采用的数学模型仅适用于限定的频率范围内。

液体火箭发动机的高功率密度对调节装置的结构有很大影响，因为，一方面必须保持高压并获得高的强度和可靠性，而另一方面必须减少各组件的质量。这种矛盾的要求常常用减小组件尺寸的办法来解决，其中包括它们的流道部分。但这样会造成速度头增加，相应地出现强大的涡流，产生噪音和发动机部件的振动，增加作用在调节器的节流元件及敏感元件上的流体动力。为了减少这些不利现象的影响，必须设置分流器及格栅等。

发动机主要组件——燃烧室内的高温是另一个复杂因素。考虑到这个因素以及必须提高发动机可靠性，常常被迫放弃直接保持燃烧室压力不变的调节方案，而采用根据其它参数来保持发动机工况的调节方案。这造成调节系统对主要参数——发动机推力的保持精度下降。

在建立发动机的线性化数学模型时发现，发动机主要组合件的性能曲线变化较平缓，以及发动机组件的方程一般都可进行线性化处理（调节器除外）。这种情况使发动机动力学模型大为简化。调节器的某些元件具有典型的非线性特征：有滞后，无润滑剂的干摩擦，盲腔缓冲器等。很自然，所有线性化方程只适用于规定的线性近似应用范围内。各参数的偏差应不超过稳态工况参数值的15%，这些偏差的计算起点就是稳态工况参数值。

## 1.4 液体火箭发动机的通用系统图

液体火箭发动机的气动液压系统图反映着发动机各结构组件之间通过液路或气路相互联结的关系。根据工作原理以及组件构成情况的不同，液体火箭发动机的气动液压系统图有很多种方案：挤压式（气瓶）或泵压式供应系统的，有一台或两台主涡轮泵的，有预压泵或无预压泵的，有一个或几个燃气发生器的，有一台或几台燃烧室的等等。

对每一种发动机气动液压系统方案专门建立数学模型很不方便，况且它们都是由一些典型的、在各种方案中重复出现的部件组合而成的：液路、气路（燃烧室、燃气发生器、燃气导管）、涡轮泵、调节器（节流装置）及自动器等。

最好编制一个通用的发动机系统图，它包含各种系统方案的所有公用组件。我们来研究一种较简单的、有一台主涡轮泵和两台预压涡轮泵的、单燃烧室的系统方案。将该系统及其数学模型变换成有二台涡轮泵或几台燃烧室的方案并不费力。这种发动机通用系统图示于图1.1。

所研究的系统含有一台燃烧室3，给它供入两种液体推进剂——氧化剂（其质量流量为$G_{ок3}$）、燃料（其质量流量为$G_{г3}$）。燃气发生器的燃气经涡轮作功后由燃气导管4也供入燃烧室。主涡轮泵6有两台双级泵，从第一级泵流出的推进剂进入燃烧室，而从第二级（辅助）泵流出的，则进入燃气发生器。在主泵前设有预压泵。氧化剂预压泵8由水力涡轮驱动，涡轮的液体工质来自氧化剂泵第一级出口，燃料预压泵9由燃气涡轮驱动，它用燃气发生器的燃气作为工质。在采用富燃的燃气发生器1时，这种燃料预压泵供应方案是很方便的。

以上述通用系统为基础，可以建立起下列各种发动机系统的模型：



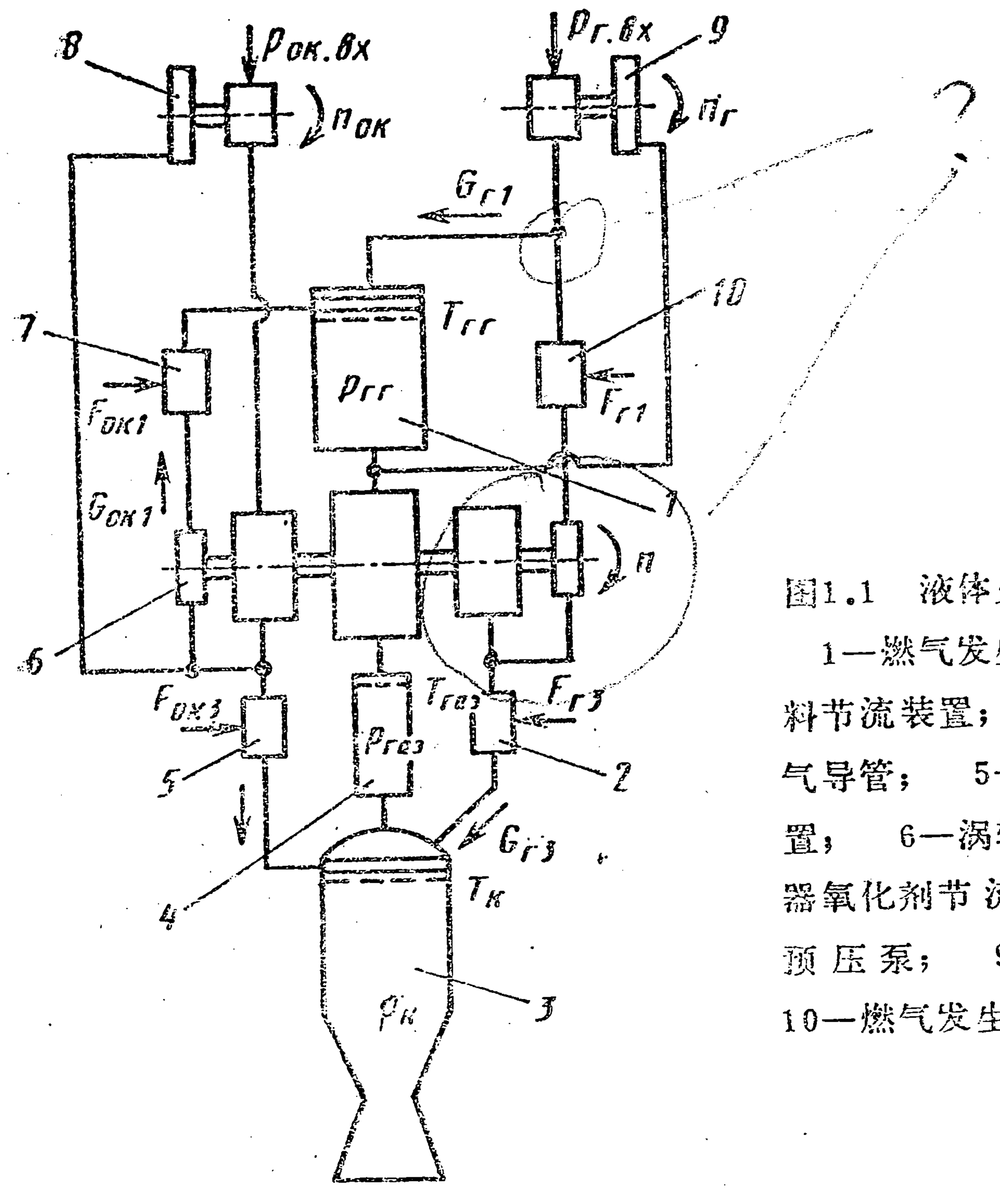



图1.1 液体火箭发动机通用系统图
1—燃气发生器； 2—燃烧室燃料节流装置； 3—燃烧室；4—燃气导管； 5—燃烧室氧化剂节流装置； 6—涡轮泵； 7—燃气发生器氧化剂节流装置； 8—氧化剂预压泵； 9—燃料预压泵；
10—燃气发生器燃料节流装置.

燃气发生器燃气不进行补燃的系统，这时燃气发生器燃气不进入燃烧室，而排入外界环境；

富氧的燃气发生器燃气进入燃烧室补燃的系统，这时，燃烧室的液体氧化剂流量$G_{ок3}=0$；

富燃的燃气发生器燃气补燃系统，这时，燃烧室的液体燃料流量$G_{г3}=0$；

由某一种推进剂组元分解获得的燃气发生器燃气进行补燃的系统（燃烧室的该种液体组元流量为零）；

采用挤压式供应方案的系统，这时没有涡轮泵及燃气发生器。

当系统改变时，预压泵的供应系统也将改变。但考虑到供给

预压泵涡轮的推进剂组元只是很小的一部分，并且预压泵的压头也较低，今后在发动机的动力学分析中，将不考虑预压泵。必须指出，在解保证纵向稳定性及气蚀振荡的抑制条件等问题时，必须考虑预压泵气蚀动力学的影响。

在给某个具体的发动机系统建立数学模型时，可以将那些不需要的组合件从通用系统图中舍弃掉，同时，将这些组合件的方程从发动机通用系统的数学模型中删除，并在剩下的方程中将这些组合件的对应项除掉。当研究比较复杂的系统时，例如有两台主涡轮泵和两台燃气发生器时，需对发动机通用系统图及其数学模型添加上新的组合件及其相应方程，同时在已有方程中加上考虑各组合件间联系的补充项。

选定发动机的气液系统图并规定了频率范围条件就意味着确定了发动机的数学模型，即各种描述发动机参数变化的微分方程组、代数方程组及经验关系式。在自动调节原理中，常根据一些组件和部件的微分方程的类型，将它们作为动态元件进行分类。以后将把发动机的各部件、组件作为动态元件予以研究，而且每一种动态元件各有一章。过程描述的详细程度根据所要解的问题，特别是所关心的频率范围而有不同。例如，在低频区将液路，包括泵的流道在内，整个作为一个动态元件来描述。这样处理是恰当的，因为液路的低频模型只考虑摩擦损失和液柱的惯性，而对于由依次连接的各段导管、泵等所组成的系统，这两种效应是可以叠加的。

如果采用更复杂的、考虑波动过程的模型（即同时考虑介质的惯性和压缩性），那么，上面这样的处理方法就不合适，因为在动力学上每一流路分段入口处和出口处的流量瞬时值是不同的，因此，必须对每一流路分段、泵及其它部件单独描述。模型变得更复杂、庞大。

以后在推导发动机的低频动力学方程时将采用下列参数作为变量（见图1.1）：发动机气路（入口处）的温度和压力（燃气发



生器为$T_{\Gamma\Gamma}$、$P_{\Gamma\Gamma}$，燃气导管为$T_{\Gamma a3}$、$P_{\Gamma a3}$，燃烧室为$T_K$、$P_K$），通过发动机液路的组元流量（燃气发生器流量$G_{OK1}$和$G_{\Gamma1}$，燃烧室流量$G_{OK3}$和$G_{\Gamma3}$），转速（涡轮泵为$n$，氧化剂预压泵为$n_{OK}$及燃料预压泵为$n_\Gamma$），发动机入口处的氧化剂和燃料压力$P_{OK,BX}$，$P_{\Gamma,BX}$，以及供应给预压泵涡轮的工质流量和温度。

在图1.1所表示的发动机通用系统图中，没有包括调节器（它们可能是不同类型的，并带有不同的反馈方式），但是绘出了控制机构的节流装置。改变燃气发生器和燃烧室的燃料流路节流装置10和2的流通截面面积$F_{\Gamma1}$和$F_{\Gamma3}$，以及氧化剂流路节流装置5和7的流通截面面积$F_{OK1}$和$F_{OK3}$，就可产生控制作用。在组合件的编号中采用了数字1和3，这样较方便，当描述有两个燃气发生器的系统时，对第2个燃气发生器的参数就可采用下标2。

为了描述调节对象各组合件之间的相互作用，常采用方块图。与气液系统图不同，方块图不是反映调节对象各组合件间的流路联系，而是反映各种描述组合件过程的变量之间的联系。由于某些组合件可能有几种描述方式，也就是有几种数学模型，因而调节对象的方块图也相应地不同。以后（见第2章）将采用一种专门方法来编制调节对象方块图，就是利用图解原理拟制出发动机动态特性的简单算法。

由图1.1所示的通用系统图，可对具有不同系统方案的发动机的动态特性得出某些共同的结论。补燃发动机的方块图结构同非补燃发动机的相差不大。非补燃发动机只是少了将燃气发生器和燃烧室联结起来的燃气导管4。但是没有这种联结时发动机的动态特性会有很大变化，因为在非补燃发动机中，低频过滤器——涡轮泵对动力学起着决定性的影响。当由燃气发生器进入涡轮泵的信号频率足够高时，由于转动部件的惯性，这种信号并不会引起涡轮泵转速的变化。相应地，这种信号也不会进入燃烧室，因为燃烧室只是通过液路与涡轮泵相连，而没有通过燃气导管直接与燃气发生器相连。因此，如果控制或干扰作用经过燃气发生器进

入发动机时，若频率足够高，就不会影响到燃烧室，因为涡轮泵在起着过滤作用。

在补燃发动机中，任何频率的干扰会经过燃气导管从燃气发生器传入燃烧室，而涡轮泵转速的变化只是影响飞行器控制系统的放大系数。必须指出，控制或干扰信号可以通过其它途径——沿着泵后的燃烧室推进剂供应流路而进入燃烧室。这时，虽然涡轮泵转速同干扰频率之间的关系也是沿着这条通道对放大系数产生影响，但涡轮泵对信号不产生直接过滤作用。

## 1.5 作为飞行器控制系统执行机构的液体火箭发动机

装有液体火箭发动机的飞行器（火箭、航天器）的飞行主要在大气层外进行，因此不可能采用空气动力控制装置，液体火箭发动机是实现飞行器在空间的姿态变化和稳定所需控制力的唯一来源。为了控制飞行器，必须按给定的程序或指令来改变发动机的推力及其方向。飞行器控制系统保证飞行器按预定轨道运动，并对飞行中的干扰影响予以补偿。控制系统的效果，其中主要指标之一——精度，在很大程度上决定于执行机构——发动机的性能。因此，对作为执行机构的发动机以及对发动机引起的各种干扰作用都提出了一定的要求：推力对设计值的偏差，混合比，推力偏心，关机后效冲量偏差等。因此在给发动机设计部门下达的技术文件中，对影响飞行器控制系统工作精度的各种发动机参数偏差都预先作了规定，并在发动机地面热试车时检查这些参数是否符合规定。

为了控制飞行，在很多情况下必须使推力在足够宽的范围内变化。由于使推力比额定值增大10%以上往往很复杂，因而发动机的大幅度调节通常是指发动机的节流（即减小推力）。在发动机节流时，会在保证燃烧室以及燃气发生器的完全燃烧和过程稳定



性方面遇到困难。对这种结果的解释是，在节流过程中减少组元流量时，喷嘴压降也在与流量的平方成正比地减少，这使燃烧室中组元的雾化和混合质量变坏。曾提出了各种特殊的可调喷嘴结构[19]，它们将可以避免在发动机节流时遇到的难题。另一种在大范围内进行推力调节的方法是采用几台不同推力的发动机或几台燃烧室来组成动力装置。这时，可通过接通或关闭某些发动机或燃烧室来实现推力调节。

有很多种控制推力矢量方向的办法[2]。最有效的控制机构是燃气舵——安装在喷管出口截面附近的燃气流中、两个工作表面都有燃气流过的、特殊型面的可转动部件。改变舵面相对于燃气流动方向的攻角，就可按需要的方向产生作用于箭体的力矩。很遗憾，除了由发动机产生有效的侧向分力外，还有阻力作用于舵上，它会造成发动机的推力损失。燃气舵能产生相当大的控制力矩，但同时也造成了发动机能量特性的明显降低。

另一种控制推力矢量方向的办法——改变燃气流从发动机喷口排出时的运动方向。采用此法时，通过喷管壁上的小孔向超声速喷管内的燃气流喷入气体或液体射流。在向超声速气流喷入气体（液体）射流时会产生斜激波。激波后的压力高于未扰动气流的压力，这样就产生作用于发动机喷管的侧向力。改变喷入气体（液体）的喷射位置和喷射压力就可以控制推力的侧向分量。这种向喷管进行喷射的系统所造成的比冲损失不大，但是要采用相当复杂的气体分配装置。对于单燃烧室的动力装置，喷射系统不会产生滚动控制力矩。

利用主燃烧室摆动或专门的游动燃烧室来改变推力矢量的方向，是最有效方法之一。在单燃烧室的发动机中，为了改变推力矢量的方向，将发动机或燃烧室连接在可使推力方向在两个平面内改变的常平座上。这时还需有专门装置来控制滚动。

对于由几台发动机（或燃烧室）组成的动力装置，每台发动机（或每台燃烧室）只要在一个平面内摆动就可改变推力矢量。

在采用摆动发动机（燃烧室）时，比冲损失不大，而控制力矩很大，这种系统的主要缺点是增加了供发动机摆动用的常平座和伺服机构的质量。

另一种控制方法是由几台发动机组成的动力装置——使各台发动机的推力大小不一致，即增大某一台发动机的推力，并同时减小另一台的推力，这样可在每个平面内产生所需的控制力矩。用这种方法来控制推力矢量时，比冲损失不大，也不增加动力装置的质量，但要求发动机的工况调节范围比其它控制方式的更宽些。

除了控制飞行器在空中的姿态以外，发动机还要起着保证推进剂贮箱同时耗尽的作用。由于飞行器的最小干质量（包括推进剂安全余量在内）是影响飞行器效率的最重要性能之一，因此要求在飞行结束时贮箱中的推进剂剩余量应最小。为了补偿各种干扰因素对贮箱内推进剂消耗量的影响，必须要有安全余量。对于运载火箭，常在贮箱耗尽系统的各种方案中选用一种[14]。在贮箱耗尽系统中，沿着贮箱轴线安装了一系列液面计。用电子计算机对各贮箱的液面计发出信号时间进行比较，在必要时由计算机发出指令通过传动机构改变发动机的某一主流路内的节流状态。这种节流状态的改变破坏了发动机的平衡，使混合比改变，各贮箱的推进剂消耗速度也相应改变。由于采用贮箱耗尽系统，大大减少了推进剂安全余量，降低了对发动机混合比精度及贮箱加注精度的要求，使运载火箭的工作效率大为提高[14]。

上述各种控制系统中，某些系统（采用燃气舵、二次喷射、摆动燃烧室）不影响发动机内部的过程。其它系统（如推力调节、贮箱耗尽系统）则改变着发动机工况。视速度调节系统也属于这种系统，它用发动机作为改变推力大小的执行机构。为了求得作为执行机构的发动机的参数，必须利用发动机的数学模型，以描述那些对控制作用的形成有影响的内部过程。同时，对作为执行机构的发动机也提出了一定的要求。其中包括必须的调节范围的



要求，以保证能控制飞行器，并补偿各种干扰作用。另一要求是发动机作为控制系统执行机构时的效率，对于视速度调节通道，该效率由燃烧室压力放大系数所决定，即

$$k_{д} = \delta p'_{к} / \delta \varphi'_{ркс},$$

式中 $\delta p'_{к}$——燃烧室压力的变化值；

$\delta \varphi'_{ркс}$——视速度调节传动装置的转角。

对于贮箱耗尽系统通道，也规定了类似的特性值

$$k_{соб} = \delta k'_{г} / \delta \varphi'_{соб}$$

式中 $\delta k'_{г}$——推进剂质量混合比变化值；

$\delta \varphi'_{соб}$——贮箱耗尽系统传动装置的转角。

除了控制通道的静态放大系数外，在给发动机的技术文件中，还规定了它的一些动态特性值：惯性元件的时间常数，完成控制指令的净滞后时间等。对某些类型的发动机，规定了过渡过程特性，例如从一种工况至另一工况的过渡时间。

发动机的动态特性在很大程度上既决定于它的系统方案（补燃的，非补燃的），也决定于发动机调节系统的结构和参数。改变调节系统的结构或参数，可在一定范围内改变发动机的动态特性。

## 1.6 液体火箭发动机对飞行中箭体纵向稳定性的影响

弹性的火箭箭体连同发动机和推进剂输送管路在一起形成了一个封闭的动力学系统，当各部件的参数以一定条件组合时，系统就可能产生振动，失去稳定性。箭体是一个在外界干扰作用下可能产生纵向振动的弹性系统[12,21]。箭体1（图1.2）的纵向振动导致贮箱及推进剂管路内液体压力的振荡。管路末端（泵入口）的振荡引起发动机各种参数的振荡，其中包括发动机推力的波动，

它们同样又激发起箭体的振动。动力学回路呈封闭状态，反馈作用可导致整个系统失去稳定。

发动机流路中液体的动态特性对系统的稳定性有着决定性影响。如果某一推进剂流路中液体的固有频率或发动机的谐振频率同箭体固有频率一致，那么由于在谐振频率一致时系统的放大系数很大，就可能失去稳定性。由于接近谐振时振动相位的变化剧烈，通常就会形成导致失稳的相位关系。

飞行试验的结果表明[21]，在箭体纵向振动的发展过程中，纵向过载的幅值急剧增加，可能导致火箭毁坏。即使从结构强度观点看过载振幅没有危险性，但对乘员和仪器，这种振幅可能是不允许的。因此，在研制新的运载火箭时，需计算纵向稳定性。计算时要用到发动机中对纵向稳定性有影响的通道——从泵入口到燃烧室的动态特性。这些特性的计算方法将在后面叙述。如果发动机系统中的预压泵或主泵有难以计算的局部气蚀现象，那么，为了证实系统的稳定性，除计算外还必须对发动机进行专门的频率试验，并且在稳定性计算的最终方案中应用这些试验结果。存在气蚀时，频率特性的试验结果可能同计算结果有很大差别。当发动机入口压力的平均值改变时，这些特性可能会有很大变化。

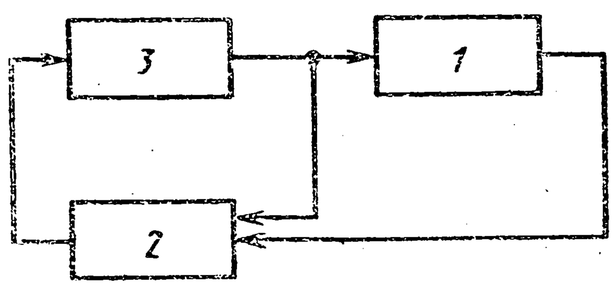



图1.2　封闭动力学系统的方块图
1——箭体；　2——推进剂管路；
3——液体火箭发动机。

必须指出，原则上“弹性箭体-发动机工况调节器运动部件”封闭系统是可能失去纵向稳定性的[31,35]。在这种情况下，当过载振动以箭体固有频率作用于发动机调节器，与发动机谐振频率一致时，失稳的可能性最大。

纵向失稳发生于火箭飞行的某一阶段。随着贮箱内推进剂的



消耗，箭体的纵向固有频率在增加。通常在箭体的纵向固有频率与发动机输送管路的谐振频率一致的时刻，系统就失去稳定性。

在从贮箱到泵的流路中液体的固有频率常常低于这段流路中液柱所固有的声振频率。这种差别与泵入口处存在密集的弹性——局部气蚀区有关[24]，也就是说，这种现象具有气蚀振荡的性质。从贮箱到发动机这段流路中液体的固有频率可以根据发动机在火箭上的试验结果，或根据在推进剂输送管路与箭上管路保持流体动力相似的试车台上进行试验的结果来确定。给液路加上专门的扰动，例如突然关闭部分液体的排放阀，对这时所测到的液路压力进行加工整理，可以求出固有频率。如果阀门关闭时间小于液体的振荡周期，那么在流路中就出现振荡型过渡过程，由此就可求出自振频率。

当发动机频率特性明显地表现出谐振特点时，就可能失去稳定。在发动机中有很多回路，其中某些回路的特征是出现包括较低频振动在内的各种谐振现象。这时，若箭体固有频率与发动机谐振频率一致，也可能使系统失去稳定。

其它原因也可能引起箭体的纵向振动以及发动机的相应振动。例如，在美国“宇宙神”运载火箭的最初几次飞行中，观察到在一阶频率（约5Hz）处有加速度幅值达2g的纵向振动[21]。分析振动产生原因后得出，它们是由于弹性箭体与氧化剂箱增压压力调节系统互相作用而产生的。

为了使火箭在箭体纵向振动方面保持稳定，可根据振动现象的性质采取各种方法。为保证含有增压调节器的系统的稳定性，必须改变调节器本身的特性。当振动是由于箭体的弹性振动与工况调节器运动部件的振动相互作用所造成时，必须改变调节器的安装方向以消除这种相互作用。

对于“箭体—推进剂输送管路—发动机”系统，修正管路的动态特性是主要的稳定方法。为了降低推进剂输送管路的固有频率（它应当低于箭体固有频率），需改变管路的动态特性。降低固

有频率的最有效方法是在管路出口处安装阻尼器。

阻尼器的主要特性是柔性——表征容积变化与压力变化间关系的系数。阻尼器柔性的必需值由下述条件决定：带有阻尼器的液路的固有频率应低于飞行初期箭体纵向振动的最低频率。随着运载火箭尺寸的加大，保证纵向稳定性的问题就更突出。为了分析纵向稳定性，需利用发动机的动态特性，这些特性的计算方法将在第六章中叙述。



# 第二章　液路的数学模型

## 2.1　具有集中参数时流路的动力学方程

### 2.1.1　液体火箭发动机流路的特点

液体火箭发动机许多组成部分的典型元件是有工质——液体或气体在其内流动的流路分段。依照工质的状态，分别将流路称为液路或气路。液体火箭发动机的液路是将各组合件——涡轮泵、燃烧室、燃气发生器、调节器、阀门、节流装置等相互联结起来的管路。此外，发动机还通过液路同飞行器的贮箱相连。泵、调节器、稳定器、节流装置、阀门、燃烧室和燃气发生器的冷却套等组件的流道部分也都是液路，并具有各自的特殊性能。

一般情况下，为了分析液体在某种实际流路内的流动特性，必须考虑它的许多物理性质——压缩性、惯性、粘性。考虑了这些性质的液体非稳态运动的流体力学方程（见第2.2节）是很难解的。因此，为了简化气、液系统的动力学分析，应对低频（50Hz以下）和较高频（500Hz以下）分别建立描述液体非稳态流动的数学模型。在低频区，可认为发动机液路和气路的各个分段具有集中参数，从而大大简化了它们的数学描述。当在更宽的频率范围内分析发动机动力学时，必须考虑声学效应，因而需要解偏微分形式的流体力学方程，也就是说，认为流路的各个分段具有分布参数（见2.4节和3.3节）。

可以采用两种方式来建立液路的数学模型：或将流体力学方程简化，或由一般的物理学定律直接推导液路方程。本书用后一种方式来建立视为具有集中参数系统的液路的数学模型。

为了描述每一组合件的流道内液体非稳态运动的特点，采一些理想化的元件较方便，这些元件的方程具有最简形式，因为只考虑介质的某一种特性——它的压缩性、惯性或粘性（摩擦损失——水力阻力）。利用这些能代替各组合件流容、惯性（液路系统中阻止速度变化的因素）和水力阻力的最简单元件的方程，可以建立起液路系统的数学模型。该模型是以上述各元件所组成的等效网络（线路）的形式来表示的，在低频范围内，可以很好地描述动力学系统[4,6,7]。除这三个无源元件外，还必须加上一个有源元件——泵。

### 2.1.2 流容

对于发动机液路的某些分段，它们的特点是流动速度很小或等于零，即液体几乎不运动。如果该分段的容积足够大（由后面求得的相对流容时间常数所决定），那么就可给它建立考虑介质压缩性的流容方程。对于过流通道的元件，液体的哪一种性质是主要的——惯性，还是压缩性？这个问题要通过对流道内液柱的两个时间常数——惯性的和流容的进行比较来确定。

如果流容时间常数大于惯性的（即使差一个量级），那么必须将这段流路看作流容，如果相反，则作为惯性。如果两个时间常数可以相比，那么必须用更复杂的，既考虑惯性又考虑介质压缩性的数学模型来描述这段流路。对于需考虑流路壁面摩擦损失的问题，也可用这样的方法来解决。如果由液体惯性引起的压降瞬时值比由壁面摩擦引起的压降大得多，那么就可忽略摩擦损失。如果这两数值可以相比，那就必须同时考虑液体的两种性质——惯性和粘性。

现研究有滴状液体流动的液路分段的各种元件(图2.1(a))，由于速度很小，可以忽略液柱惯性和壁面摩擦损失。这时，液路分段的动态特性主要取决于液体的压缩性。压缩性的影响表现在当压力变化时流路内液体的质量也在变化，这意味着入口和出口



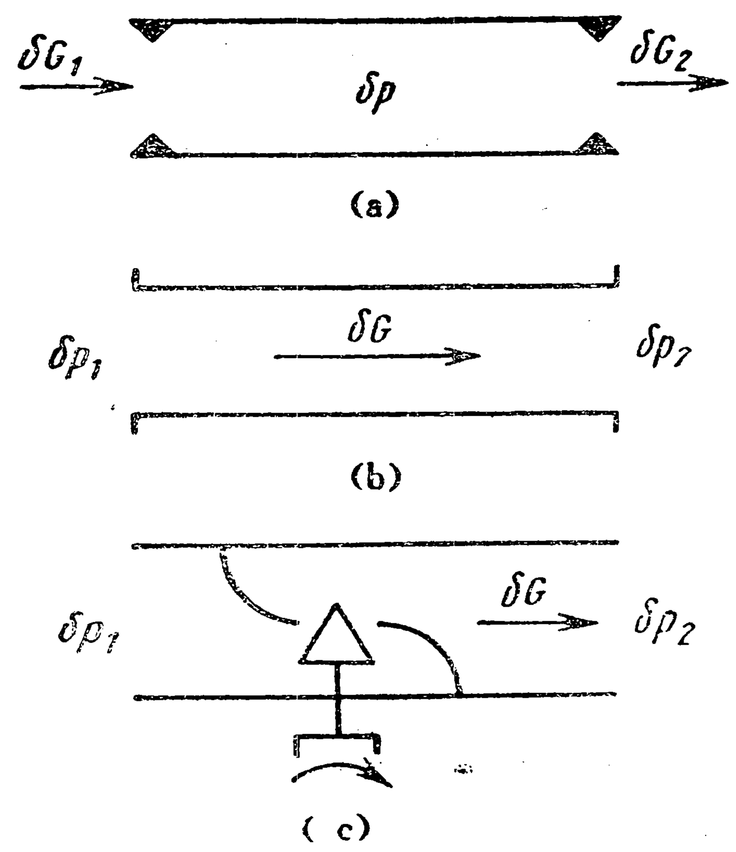



图2.1 液路分段各种元件的示意图
(a) —流容；(b) —惯性；
(c) —局部阻力。

处的流量瞬时值是不相同的。根据上面的各种假设，作为一个流容的这一液路分段在非稳态流动时的质量平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = G_1 - G_2 \qquad (2.1.1)$$

式中 $m$——液路分段内液体质量；$G_1, G_2$——分段入口和出口处的质量流量。

液体质量由流路分段的容积$V$和液体密度$\rho$所决定：

$$m = \rho V \qquad (2.1.2)$$

而滴状液体的密度与压力有关：

$$\rho = \rho_1\left(1 + \frac{p - p_1}{k_{\text{ж}}}\right) \qquad (2.1.3)$$

式中 $\rho_1$——压力$p_1$下的液体密度；$k_{\text{ж}}$——液体的体积弹性模量。

在变换方程(2.1.1)～(2.1.3)之前，将它们线性化，认为各参数相对于某个稳态值只有小的偏差：

$$m = m_0 + \delta m' ;$$

$$G_1 = G_{10} + \delta G_1'\ ;\ G_2 = G_{20} + \delta G_2'$$

$$p = p_0 + \delta p'\ ;\rho = \rho_0 + \delta\rho' \qquad (2.1.4)$$

式中 $m_0$、$G_{10}$、$G_{20}$、$p_0$、$\rho_0$——稳态工况下参数$m$、$G_1$、$G_2$、$p$、$\rho$的数值；$\delta m'$、$\delta G_1'$、$\delta G_2'$、$\delta p'$、$\delta\rho'$——各参数的有量纲偏差值(变化量)。

小偏差的决定条件是各偏差的乘积及其平方比偏差本身要小得多，因而可将它们忽略。将(2.1.4)式代入方程(2.1.1)，并注意在稳态工况下有$G_{10} = G_{20} = G_0$，得：

$$\frac{\mathrm{d}\delta m'}{\mathrm{d}t} = \delta G_1' - \delta G_2' \qquad (2.1.5)$$

利用关系式(2.1.2)，(2.1.3)和(2.1.4)，认为$V$=常数，并从方程(2.1.5)中消去质量变化量，得

$$\frac{\rho_0 V}{k_{ж}}\ \frac{\mathrm{d}\delta p'}{\mathrm{d}t} = \delta G_1' - \delta G_2' \qquad (2.1.6)$$

(2.1.6)式就是介质参数在有量纲小偏差下的流容方程。将该方程写成无量纲的、用各参数的相对变化量表示时，可显得更直观：

$$\tau_e \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t} = \delta G_1 - \delta G_2 \qquad (2.1.7)$$

式中 $\delta p = \delta p'/p_1, \delta G_1 = \delta G_1'/G_1, \delta G_2 = \delta G_2'/G_2$——各参数相对于因变量稳态值的无量纲变化量；$\tau_e = \rho_0 p_0 V/(k_{ж}\ G_1) = pV/(a^2 G_1) = pL/(\rho u_0 a^2)$——流容时间常数；$a = \sqrt{k_{ж}/\rho_0}$——液体中声速；$L$——流路分段的长度；$u_0$——稳态工况下液体在流路中的速度。

式(2.1.7)用于圆柱形流路分段。流容时间常数$\tau_e$表示在入口或出口流量突然变化时容积内压力变化的时间。(2.1.6)及(2.1.7)式所描述的不仅是有流动的流容，也包括了没有流动的盲腔流容。对于盲腔流容，应取$\delta G_2' = \delta G_2 = 0$，而作为尺度用的



流量$G_1$，可取与流路盲腔段或任何其它无流动流容相连的无流动流路的流量。

方程(2.1.7)不仅考虑了液体的压缩性，还可用改变声速公式的办法考虑流路管壁的柔性。例如，对于圆柱形薄壁管，考虑管壁柔性时的声速公式为

$$a = \sqrt{\frac{k_{ж}}{\rho_0[1 + Dk_{ж}/(bE)]}}$$

式中 $D$,$b$——管路内径及壁厚；$E$——管壁材料的弹性模量。

对于厚壁管或其它形状的管路，也有类似的公式。

### 2.1.3 惯性

假定流路分段内充满了无粘性不可压缩的液体。如果非稳态运动时，只有一个特性——液柱的惯性在流路内起着决定性作用，上述这个假定是有根据的。圆柱形流路分段内不可压缩无粘性液柱的非稳态运动（图2.1(b)）可用动量方程来描述：

$$F(p_1 - p_2) = m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \rho LF\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \qquad (2.1.8)$$

式中 $p_1$,$p_2$——流路分段的入口及出口压力；$m = \rho LF$——分段内液柱质量；$F$——分段截面积。

将方程(2.1.8)线性化，得

$$\delta p_1' - \delta p_2' = \rho L\frac{\mathrm{d}\delta u'}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta G'}{\mathrm{d}t} \qquad (2.1.9)$$

式中 $\delta p_1'$,$\delta p_2'$——流路分段入口及出口压力的变化量；$\delta u'$，$\delta G'$——流路分段内液体速度及流量的变化量。

将(2.1.9)式转成无量纲变化量，则有

$$\tau_{и}\frac{\mathrm{d}\delta G}{\mathrm{d}t} = \tau_{и}\frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}t} = \delta p_1 - \delta p_2 \qquad (2.1.10)$$

式中 $\tau_{и} = \rho uL/p = GL/(pF)$——流路分段的惯性时间常数

（为了简化，此处及以后对稳态工况参数值不加下标“0”）；$\delta p_1 = \delta p_1'/p$；$\delta p_2 = \delta p_2'/p$；$\delta u = \delta u'/u$；$\delta G = \delta G'/G$；$G = \rho \cong F$——液体的平均流量。

方程(2.1.9)或(2.1.10)描述了只考虑液体的一种性质——惯性时流路分段内液体的非稳态运动情况。因而这些方程（类似于电工学中的电感方程)称为惯性方程。方程(2.1.9)和(2.1.10)表明，流路内速度（流量）的变化同液体的惯性有关，在采用有量纲变量的表示式中，惯性由参数$\rho L$或$L/F$来表示；而采用无量纲变量时，则为惯性时间常数$\tau_{и}$。惯性是用来建立液路系统模型的元件之一。

假若流路由许多不同流通截面面积的圆柱形分段所组成，并且对它们可忽略去液体的压缩性和粘性（即壁面的摩擦及不同截面的分段对接处的局部水力损失），那么，对每个分段可列出方程(2.1.9)或(2.1.10)。考虑到在所规定的假设条件下各分段对接处两侧截面上的压力变化量应相等，将各分段的方程累加后得到

$$\delta\Delta p' = \delta p_1' - \delta p_{n+1}' = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{F_k}\right) \frac{d\delta G'}{dt} \qquad (2.1.11)$$

或变为无量纲变化量

$$\delta\Delta p = \delta p_1 - \delta p_{n+1} = \tau_{и} \frac{d\delta G}{dt} \qquad (2.1.12)$$

式中 $\tau_{и} = \frac{G}{p}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{F_k}\right)$；$\delta p_1 = \delta p_1'/p$；$\delta p_{n+1} = \delta p_{n+1}'/p$；

$L_k/F_k$——表征第$k$个流路分段的惯性的量，称为折合惯性；$\delta\Delta p = \delta\Delta p'/p$——无量纲的压差变化量。

这样，对于由各个截面积不同的圆柱形分段所组成的流路，在惯性时间常数中包含有各段液柱的折合惯性之和。如果流路的截面积是连续变化的，那么，将流路分成许多圆柱形的微段，然后



求极限，即以积分代替加法：

$$\tau_{и} = \frac{G}{p}\int_0^L \frac{dx}{F(x)} \qquad (2.1.13)$$

式中 $F(x)$——流路截面面积，是相对于起始截面的距离$x$的函数。

### 2.1.4 局部阻力

局部阻力(图2.1(c))或者是为了控制组元的流量而在发动机液路中专门设置的（节流装置、阀门、调节器、喷嘴、调整用孔板等)，或者是由流路的结构特点造成的(截面积变化和转弯等)。在发动机流路中，局部阻力几乎总是在紊流状态下产生的，对于局部阻力，流量$G$与压差$\Delta p = p_1 - p_2$有平方关系。忽略液体的惯性，可表示为

$$G = \mu F \sqrt{\rho(p_1 - p_2)} \qquad (2.1.14)$$

式中 $\mu$——流量系数；$F$——局部阻力处流通截面面积。

在可调节的局部阻力中（节流装置、阀门、调节器等)，流通截面面积及流量系数决定于可移动的调节件的位置。将(2.1.14)式线性化，得

$$\delta G' = \frac{G}{\mu F}\delta(\mu F)' + \frac{G}{2(p_1 - p_2)}\delta p_1' - \frac{G}{2(p_1 - p_2)}\delta p_2' \qquad (2.1.15)$$

式中 $\delta(\mu F)'$——有量纲的流通截面面积变化量(考虑了流量系数的变化)。将方程(2.1.15)转为无量纲变化量形式，得

$$\delta G = \delta(\mu F) + \frac{1}{2}\frac{p_1}{p_1 - p_2}\delta p_1 - \frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1 - p_2}\delta p_2 \qquad (2.1.16)$$

式中 $\delta(\mu F)$——流通截面面积的无量纲变化量（考虑了$\mu$的变化)。

### 2.1.5 离心泵

离心泵是涡轮泵的组成部分，但是将描述泵压头特性的关系式列为液路方程中的有源元件的方程较为方便，这些有源元件提供液体运动所必需的能量。具有一定压力的容器——气瓶、贮箱等也可作为液路系统中的有源元件。下面将对有源元件中型式最复杂的离心泵进行研究。气瓶（挤压）式供应系统可列为泵压式系统的独特情况。

我们只研究泵的最简单的工况——流道内无气蚀现象。泵入口的气蚀影响到泵前管道中液体的固有振荡频率，有时还影响泵的放大系数，即泵出口压力振幅对入口振幅的比值[24]。这些动力学过程首先影响火箭在飞行中的纵向稳定性（见1.5节）。目前还没有能根据泵的结构数据来确定气蚀区动态特性的计算方法。但纵向稳定性分析不在本书所研究问题的范围内，因此，本节不研究气蚀动力学问题。

在建立泵内液体流动的数学模型时，忽略掉液体的压缩性及泵壳的柔性，因为流道内液体的速度很大，从低频动力学的观点来看，液体惯性的影响是决定性因素。进行液路动力学分析时采用泵的压头特性。而功率特性将在第四章中研究。

在稳态工况下，泵产生的压头$\Delta p_{HO}$（图2.2(a)）由多项式表示为

$$\Delta p_{HO} = An^2 + BnG + CG^2 \qquad (2.2.17)$$

式中 $n$——泵的转速；$G$——通过泵的液体流量；$A,B,C$——常数。

在非稳态工况下，液体的惯性对泵的流道中的液体有影响，也就是对泵的压头有影响。可利用充满于泵叶轮内的液体的动量矩变化方程来评估液体惯性的影响[17]（见图2.2(b)），即

$$\frac{dR_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho r c_u dV + \int_f \rho r c_u c_n df$$



$$= \int_V \rho r F_u dV + \int_f r p_u df \qquad (2.1.18)$$

式中 $R_z$——主动量矩在与泵轴一致的$z$轴上的分量；$r$——液流中环形微元的半径；$c_u, c_n$——液体的绝对速度在面积微元$f$的法线以及在牵连（圆周）速度$u$方向上的投影；$F_u$——重力在速度

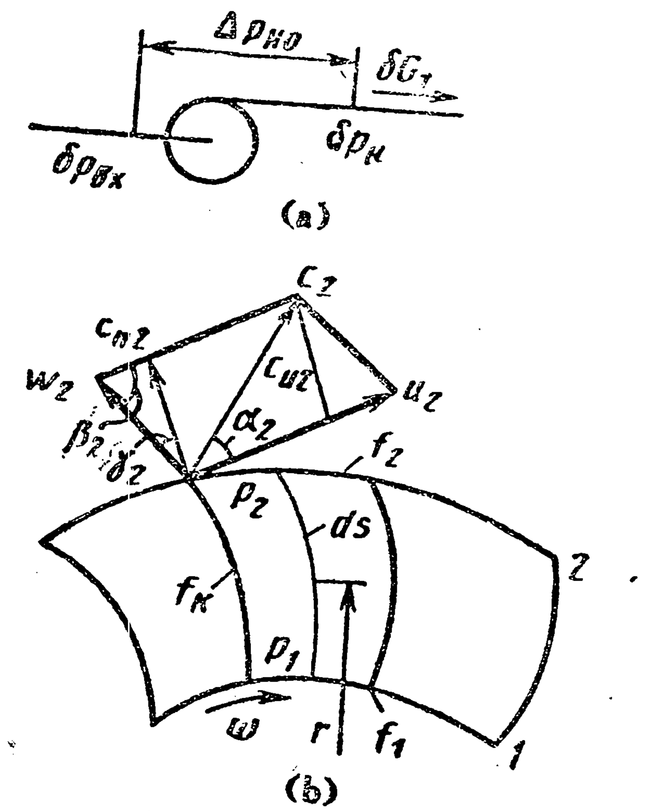



图2.2 离心泵的示意图
（a）—在系统中的连接；
（b）—叶轮几何学。

$u$方向上的投影；$p_u$——压力在速度$u$方向上的投影。

下面将研究绝对运动，因为相对运动中必须考虑离心力和哥氏力，方程较复杂。必须指出，即使在泵的稳态工况下，液体在泵的旋转叶轮中的绝对运动也是不稳定的，因为在液体绕叶轮的叶片流动时产生一定的速度场和压力场，在靠近叶轮出口的固定点上可感受到脉动，其闪动频率等于叶片数与叶轮转速的乘积。在图2.2b上，画出了泵叶轮出口截面2的速度三角形，因此，给各参数加上下标“2”。下标“1”则表示入口截面的参数。由泵的速度三角形得出

$$c_u = w + u = u - w\sin\gamma \qquad (2.1.19)$$

式中 $w$——液体运动的相对速度；$u = \omega r$；$\omega$——叶轮旋转的角

速度。

(2.1.18)式中的第2个积分可以分成三个积分：沿着叶轮表面$f_k$，沿着叶轮入口流通截面$f_1$及叶轮出口流通截面$f_2$。为了避免考虑绝对速度场的非稳态性，A.A.洛马金提出了叶轮入口和出口的平均速度矩的概念：

$$(\overline{c_u r})_1 = \int_{f_1} \rho r c_u c_n \mathrm{d}f \Big/ \int_{f_1} \rho c_n \mathrm{d}f = \int_{f_1} r c_u \mathrm{d}G/G$$

$$(\overline{c_u r})_2 = \int_{f_2} \rho r c_u c_n \mathrm{d}f \Big/ \int_{f_2} \rho c_n \mathrm{d}f = \int_{f_2} r c_u \mathrm{d}G/G$$

式中 $G$——液体的每秒质量流量。

考虑上述关系式后，方程(2.1.18)中的第2个积分可由下式求得

$$\int_f \rho r c_u c_n \mathrm{d}f = G\left[(\overline{c_u r})_2 - (\overline{c_u r})_1\right] + \int_{f_k} \rho r c_u c_n \mathrm{d}f \tag{2.1.20}$$

必须强调，液体在叶轮中运动的绝对速度既同叶轮的转角$\vartheta$有关，也同时间有关。为了避免积分计算的困难，必须假定当平均流量改变时叶轮内速度分布曲线的特性不变。根据这个假设及(2.1.19)式，方程(2.1.18)中第1个积分可表示为

$$\int_V \rho r\left(\frac{\partial c_u}{\partial t} - \frac{\partial c_u}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = \int_{s_1}^{s_2} \rho r F\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sin\gamma \frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}s - \int_{s_1}^{s_2} \rho r F \frac{\partial w}{\partial t}\sin\gamma \mathrm{d}s \tag{2.1.21}$$

式中 $\mathrm{d}s$——叶轮中流动路程微元；$s_1, s_2$——入口和出口坐标。积分时，考虑$\partial u/\partial \vartheta = 0$。

文献[17]指出，(2.1.20)式和(2.1.21)式中后一项积分是相等的，因而在相加时互相抵消。根据叶轮中液体流动对称的条件，



方程(2.1.18)右边部分的重力投影的积分等于零。方程(2.1.18)中后一个积分给出了叶轮与液流的相互作用力矩，也就是叶轮轴上的扭矩（不考虑摩擦力）：

$$\int_f r p_u \mathrm{d}f = M_{kp} \tag{2.1.22}$$

将(2.1.20)、(2.1.21)及(2.1.22)式中的积分值代入方程(2.1.18)，得出泵叶轮中液体动量矩方程的新表达式

$$\frac{\mathrm{d}R_z}{\mathrm{d}t} = G\left[(\overline{c_u r})_2 - (\overline{c_u r})_1\right] + \int_{s_1}^{s_2} \rho r F\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sin\gamma \frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}s = M_{kp} \tag{2.1.23}$$

由速度三角形(见图2.2b)得

$$c^2 = (u - w\sin\gamma)^2 + w^2\cos^2\gamma = u^2 - 2uw\sin\gamma + w^2 \tag{2.1.24}$$

叶轮中液体流动的动能等于

$$E = \int_V \rho \frac{c^2}{2}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} (u^2 - 2uw\sin\gamma + w^2)\rho F \mathrm{d}s \tag{2.1.25}$$

作用在叶轮中液体上的力每秒所做的功(即功率)决定于扭矩及叶轮入口压力$p_1$及出口压力$p_2$所做的功：

$$N = M_{kp}\omega + p_1 F_1 w_1 - p_2 F_2 w_2$$

另一方面，作用力所做的功与液体的动能变化有关。利用方程(2.1.25)，得

$$N = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(u^2 - 2uw\sin\gamma + w^2)\rho w F\Big|_1^2 + \int_{s_1}^{s_2}\left[u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \left(u\frac{\partial w}{\mathrm{d}t} + w\frac{\partial u}{\mathrm{d}t}\right)\sin\gamma + w\frac{\partial w}{\mathrm{d}t}\right]\rho F \mathrm{d}s$$

$$= G\omega\left[(\overline{c_u r})_2 - (\overline{c_u r})_1\right] + \int_{s_1}^{s_2} \omega r\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\sin\gamma\right)\rho F \mathrm{d}s$$

$$+ p_1F_1w_1 - p_2F_2w_2 \qquad (2.1.26)$$

考虑到$\omega r = u$; $\rho wF = G$，而关于$c_u$有(2.1.19)式，现将方程(2.1.26)变换成求叶轮所产生的理论压头的关系式

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}[(u_2^2 - w_2^2) - (u_1^2 - w_1^2)]$$

$$- \rho\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{dw}{dt} - \frac{du}{dt}\sin\gamma\right)ds \qquad (2.1.27)$$

实际上，在叶轮及其它部件中有泄漏、摩擦、冲击、液体的弯转等损失，它们由泵的转速及通过泵的液体流量所决定。而泵所产生的理论压头也是由这些参数决定。在静力学中泵的压头特性以多项式(2.1.17)的形式表示较方便。

在动力学中，由于液体的惯性，在方程中应出现一些补充部分。在方程(2.1.27)中——这是一个积分。此外，还必须考虑在泵的不运动部件（进口管、蜗壳、扩压器）中液体的惯性。对于第$k$个元件，惯性项$J_k$可以用与变截面液路中相同的方法(见2.1.3节）来求得：

$$J_k = \rho\int_{s_k}^{s_{k+1}}\frac{dw}{dt}ds = \frac{dG}{dt}\int_{s_k}^{s_{k+1}}\frac{ds}{F_k(s)} \qquad (2.1.28)$$

式中 $F_k$——第$k$段流道的流通截面面积。

用$J_1$来表示(2.1.27)式中的积分项，并将它变换成更方便的形式(见图2.2(b))：

$$J_1 = \rho\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{dw}{dt} - \frac{du}{dt}\sin\gamma\right)ds$$

$$= \rho\frac{dG}{dt}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\beta}}{\mu\rho F}ds - 2\pi\rho\frac{dn}{dt}\int_{s_1}^{s_2}r\sin\gamma ds \qquad (2.1.29)$$

式中 $\beta$——叶片切线与牵连速度$u$的方向之间的夹角；$\mu$——由叶片造成的截面排挤系数。



最终可将泵的压头特性方程表示为：

$$\Delta p_H = \Delta p_{H0} - A_G\frac{dG}{dt} + A_n\frac{dn}{dt} \qquad (2.1.30)$$

式中系数$A_G$和$A_n$由(2.1.28)和(2.1.29)式中的积分求得。

为了算出积分，必须知道泵的流道部分的几何特性。将方程(2.1.30)线性化，得

$$\delta\Delta p_H = \psi_G\delta_G + \psi_n\delta n - \tau_H\frac{d\delta G}{dt} + \tau_n\frac{d\delta n}{dt} \qquad (2.1.31)$$

式中 $\psi_G = \frac{G}{\Delta p_H}\frac{\partial\Delta p_H}{\partial G}$； $\psi_n = \frac{n}{\Delta p_H}\frac{\partial\Delta p_H}{\partial n}$；

$$\tau_H = A_G\frac{G}{\Delta p_H} = \frac{G}{\Delta p_H}\left(\int_{s1}^{s_2}\frac{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\beta}}{\mu F}ds + \sum_k\int_{s_k}^{s_{k+1}}\frac{ds}{F}\right) \qquad (2.1.32)$$

$$\tau_n = A_n\frac{n}{\Delta p_H} = \frac{n}{\Delta p_H}\left(2\pi\rho\int_{s_1}^{s_2}r\sin\gamma ds\right) \qquad (2.1.33)$$

对泵流道部分（除叶轮外)的所有不运动部件求出(2.1.32)式中积分之和。线性方程(2.1.31)—(2.1.33)描述了有源元件——离心泵的近似特性，在泵的流道部分中考虑了由时间常数$\tau_H$（相对运动的）和$\tau_n$(牵连运动的)所表征的液体惯性。在时间常数$\tau_H$中既考虑了旋转叶轮中液体的质量，也考虑了泵的不运动部件的流道中的液体质量。

### 2.1.6 燃烧室和燃气发生器供应流路的方程

在建立适用于低频范围的燃烧室和燃气发生器供应流路的数学模型时，将从泵入口到喷嘴出口（通往气路）的整个推进剂输送液路通道视为一个流路。这种处理方法很方便，可以用有限数目的发动机数学模型方程十分详细地描述各参数的变化，既考虑了流路中所有元件（泵、导管、节流装置和调节装置、喷嘴等）

的静态特性，也考虑了由流路中液柱的惯性所决定的动态分量。

对于长度较大的流路，例如从飞行器贮箱到发动机泵的流路，即使在低频范围内，也必须考虑液体的压缩性。本章仍停留在描述具有集中参数系统的发动机各组件动力学模型的范围内，可对长流路的振荡特性作出估计，在动力学模型中同时会有惯性、流容及阻力。

如果认为液体不可压缩，但具有惯性和粘性，那么从泵入口到燃烧室或燃气发生器喷嘴的整个流路可由一个方程来描述。这时，流量瞬时值沿着整个流路都一致，压力则由于惯性及摩擦损失而沿着流路长度在改变。

为了确定这种处理方法的可能应用范围，现在来求同一段圆柱形流路的惯性时间常数与流容时间常数之间的关系。利用求这两个常数的公式(2.1.7)和(2.1.10)，得

$$\frac{\tau_{и}}{\tau_{е}}=\frac{\rho uL}{p}\Big/\frac{pL}{\rho ua^{2}}=\left(\frac{\rho ua}{p}\right)^{2} \qquad (2.1.34)$$

以后在分析具有分布参数，即考虑声学效应的液路的动态特性时，还会遇到上面这个综合参数，它称为流路的无量纲波动阻力(见2.2节)。对于发动机内部的各流路，假定$\rho=10^{3}\mathrm{kg/m^{3}}$；$u=30\mathrm{m/s}$；$a=10^{3}\mathrm{m/s}$；$p=10^{7}\mathrm{Pa}$，得$\tau_{и}/\tau_{е}\approx10$。这样，惯性时间常数要比流容时间常数大一个数量级，因而，在低频范围内，对于发动机内部流路的数学模型，可忽略掉液体的压缩性。

先来研究将泵后推进剂组元只供入燃气发生器的液路（用于补燃发动机)。该液路包含有离心泵的流道(若有预压用涡轮泵，则为两个泵)，各段管路及局部阻力元件——可调节或不可调节的自动器装置、喷嘴、发动机调整孔板等。在液体不可压缩以及同一流路内各个元件串联布置的情况下，由惯性及局部阻力所造成的压降瞬时值应累加，而所有分段上的流量瞬时值都一样，等于$G_1$。

假设可将由泵入口1至燃气发生器2的流路(图2.3(a))分为两段，其中第一段含有调节装置3（带有传动机构4)，而第二段含有



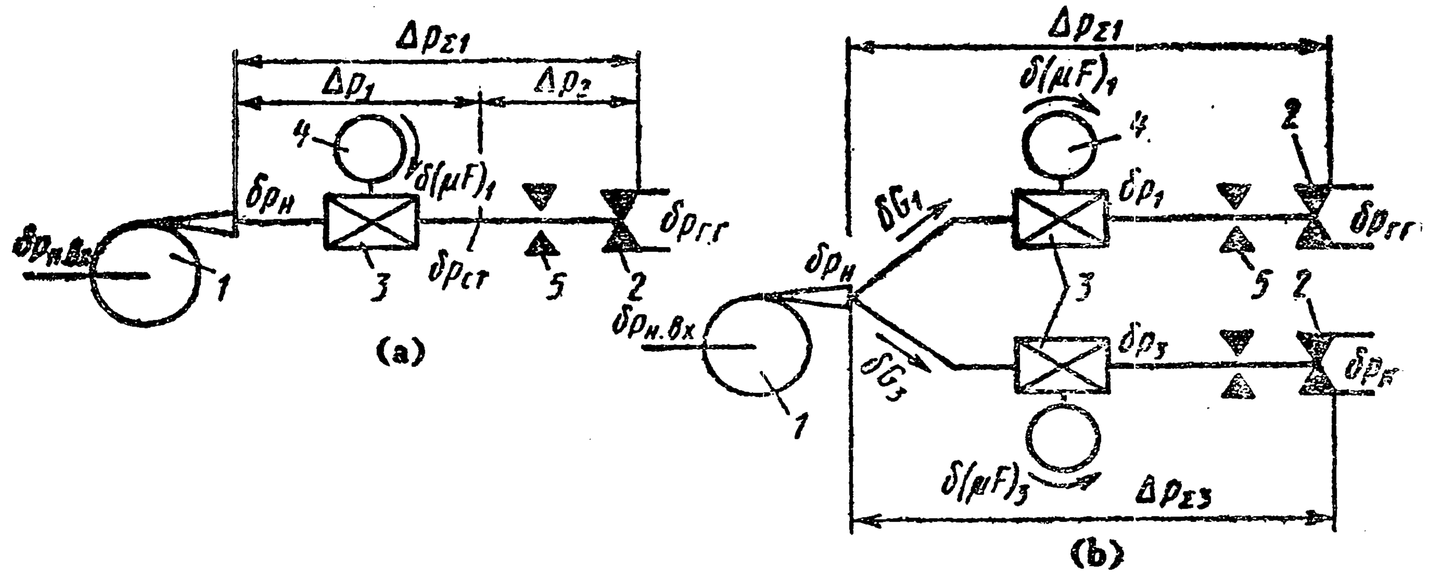



图2.3 发动机液路示意图

(a)—由泵入口至燃气发生器；(b) —由泵入口分支至燃烧室及燃气发生器。

不可调节的局部阻力元件5。将方程(2.1.10)和(2.1.16)确定的由惯性和局部阻力造成的压降$\Delta p_1$和$\Delta p_2$(压降变化量)累加，管壁摩擦损失视为局部阻力，对两个分段可列出

$$\delta p_{н}=\frac{2\Delta p_1}{p_{н}}\delta G_1+\frac{p_{ст}}{p_{н}}\delta p_{ст}+\frac{G_1L_1}{p_{н}F_1}\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}-\frac{2\Delta p_1}{p_{н}}\delta(\mu F)_1 \qquad (2.1.35)$$

$$\delta p_{ст}=\frac{2\Delta p_2}{p_{ст}}\delta G_1+\frac{p_{гг}}{p_{ст}}\delta p_{гг}+\frac{G_1L_2}{p_{ст}F_2}\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t} \qquad (2.1.36)$$

式中 $\delta p_{н}$，$\delta p_{гг}$——流路起点(泵出口)和终点（燃气发生器)处压力的无量纲变化量；

$\delta p_{ст}$——两段流路对接面上压力的无量纲变化量；

$\delta G_1$——燃气发生器喷嘴流量的无量纲变化量；

$\delta(\mu F)_1$——可调节阻力处流通截面面积的无量纲变化量；

$L_1$，$L_2$，$F_1$，$F_2$——管路段长度及（有效）截面面积；

$\Delta p_1$，$\Delta p_2$——第一段和第二段的局部阻力处压降平均值；

$p_{н}$，$p_{гг}$，$p_{ст}$——压力平均值。

从方程(2.1.35)和(2.1.36)中消去变化量$\delta p_{ст}$，得

$$\delta p_{\text{н}}=\frac{2(\Delta p_1+\Delta p_2)}{p_{\text{н}}}\delta G_1+\frac{G_1}{p_{\text{н}}}\left(\frac{L_1}{F_1}+\frac{L_2}{F_2}\right)\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}$$

$$+\frac{p_{\text{гг}}}{p_{\text{н}}}\delta p_{\text{гг}}-\frac{2\Delta p_1}{p_{\text{н}}}\delta(\mu F)_1$$

如果流路包含有很多段管路，并都有局部阻力，那么，类似地可列出

$$\delta p_{\text{н}}=\frac{2}{p_{\text{н}}}\left(\sum_{i=1}^{m}\Delta p_i\right)\delta G_1+\frac{G_1}{p_{\text{н}}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{L_i}{F_i}\right)\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}$$

$$+\frac{p_{\text{гг}}}{p_{\text{н}}}\delta p_{\text{гг}}-\frac{2\Delta p_1}{p_{\text{н}}}\delta(\mu F)_1 \qquad (2.1.37)$$

利用方程(2 1.31)，对它的左端进行变换后得

$$\frac{p_{\text{н}}}{\Delta p_{\text{н}}}\delta p_{\text{н}}-\frac{p_{\text{н.вх}}}{\Delta p_{\text{н}}}\delta p_{\text{н.вх}}$$

$$=\psi_{\text{G}}\delta G_1+\psi_{\text{n}}\delta n-\tau_{\text{н}}\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}+\tau_{\text{n}}\frac{\mathrm{d}\delta_{\text{n}}}{\mathrm{d}t} \qquad (2.1.38)$$

式中 $p_{\text{н.вх}},\delta p_{\text{н.вх}}$——泵入口压力及其无量纲变化量。

将(2.1.37)式代入方程(2.1.38)，求得一种组元全部进入燃气发生器时由泵入口至燃气发生器的液路方程

$$\left(2-\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\psi_{\text{G}}\right)\delta G_1+\left(\tau_{\text{и}1}+\tau_{\text{н}}\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\right)\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}$$

$$-\psi_{\text{n}}\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta n-\tau_{\text{n}}\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}+\frac{p_{\text{гг}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta p_{\text{гг}}$$

$$-\frac{p_{\text{н.вх}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta p_{\text{н.вх}}-2\frac{\Delta p_{\text{p}1}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta(\mu F)_1=0 \qquad (2.1.39)$$

式中 $\Delta p_{\Sigma 1}=\sum_{i=1}^{m}\Delta p_i$——由泵至燃气发生器的流路压力损失总和；



$\tau_{\text{и}1}=\dfrac{G_1}{\Delta p_{\Sigma 1}}\sum_{i=1}^{m}\dfrac{L_i}{F_i}$——流路内液柱的惯性时间常数；

$\Delta p_{\text{p}1}$——调节装置（节流装置、调节器等）的压降。

与惯性时间常数公式(2.1.12)不同，在推导方程（2.1.39）时，不是采用压力而是采用流路压力损失之和$\Delta p_{\Sigma 1}$作为比例量。

如果在发动机的系统方案中有两台涡轮泵，流过这两台泵的组元是同一流量$G_1$，那么在方程(2.1.39)中出现两个附加项：

$$-\psi_{\text{nб}}\frac{\Delta p_{\text{н·б}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta n_{\text{б}}\ \text{和}-\tau_{\text{nб}}\frac{\Delta p_{\text{н·б}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta n_{\text{б}}}{\mathrm{d}t}$$

其中变量$\delta_{\text{nь}}$及所有带下标б的参数都属于辅助（预压）泵，同样地，在方程(2.1.39)的前两项的系数中也分别添上附加部分：

$$-\frac{\Delta p_{\text{н·б}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\ \text{和}\tau_{\text{н·б}}\frac{\Delta p_{\text{и·б}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}$$

上述液路型式只是在一种液体组元全部流入燃气发生器的补燃发动机中才具有。对于将一种组元全部供入燃烧室的液路，可用与(2.1.39)类似的方程来描述。这时，只要改变某些下标：表示流路序号的下标由1变为3，以及气路中压力变化量的下标由гг变为к。

在其它情况下，从泵后开始分支（图2.3(б)），并形成以泵入口为起点的两个流路。沿着一个流路（序号1）组元供入燃气发生器，而沿着另一流路（序号3）——供入燃烧室。如果系统方案中有两台燃气发生器，那么组元沿着流路2供入第二台燃气发生器。正是考虑到有两台燃气发生器的系统方案，所以采用这种流路编号方法。在图2.3及以后的叙述中，各参数符号的下标与流路的编号相对应。在一次近似时可假定流路的分支直接位于泵后，而在系统方案中未采用第二级泵来将组元供入燃气发生器（在补燃发动机中）。这时，可忽略去由泵至分支点这段流路内的阻力及组元

液柱的惯性，并认为分支截面处的压力等于泵后压力。因而对于由分支点至燃气发生器或燃烧室的每一流路可采用方程(2.1.37)，只要将方程中各参数符号的下标1变为3，而下标гг变为к。方程(2.1.38)也几乎不变，仅方程中所包含的不是流量变化量$\delta G_1$，而是经过泵的总流量变化量$\delta G$，它由流量平衡方程确定

$$\delta G=\bar{G}_1\delta G_1+\bar{G}_3\delta G_3 \qquad (2.1.40)$$

式中 $\bar{G}_1=G_1/(G_1+G_3)$；$\bar{G}_3=1-\bar{G}_1=C_3/(G_1+G_3)$；$G_1,G_3$——进入燃气发生器和燃烧室的流量平均值；$\delta G_1,\delta G_3$——$G_1,G_3$的无量纲变化量。此处及以后，除非有特别说明，平均参数上方的横道表示该参数是无量纲的。

对方程(2.1.37)和(2.1.38)中$\delta G$的下标进行替换，从方程中消去变化量$\delta p_н$并考虑(2.1.40)式，求得由泵至燃气发生器这一流路的方程

$$\left(2-\bar{G}_1\psi_G\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ1}}\right)\delta G_1+\left(\tau_{и1}+\tau_н\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ1}}\bar{G}_1\right)\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}$$

$$-\bar{G}_3\psi_G\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ1}}\delta G_3+\tau_н\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ1}}\bar{G}_3\frac{\mathrm{d}\delta G_3}{\mathrm{d}t}-\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ1}}\psi_n\delta n$$

$$-\tau_n\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ1}}\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}+\frac{p_{гг}}{\Delta p_{Σ1}}\delta p_{гг}^{*}-2\frac{\Delta p_{p1}}{\Delta p_{Σ1}}\delta(\mu F)_1$$

$$-\frac{p_{н.вх}}{\Delta p_{Σ1}}\delta p_{н.вх}=0 \qquad (2.1.41)$$

类似地将下标1换成3，并相反地将3换成1，求得由泵至燃烧室的流路方程

$$\left(2-\bar{G}_3\psi_G\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ3}}\right)\delta G_3+\left(\tau_{и3}+\tau_н\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ3}}\bar{G}_3\right)\frac{\mathrm{d}\delta G_3}{\mathrm{d}t}$$

$$-\bar{G}_1\psi_G\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ3}}\delta G_1+\tau_н\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ3}}\bar{G}_1\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}-\psi_n\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ3}}\delta n$$



$$-\tau_n\frac{\Delta p_н}{\Delta p_{Σ3}}\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}+\frac{p_к}{\Delta p_{Σ3}}\delta p_к-2\frac{\Delta p_{p3}}{\Delta p_{Σ3}}\delta(\mu F)_3$$

$$-\frac{p_{н.вх}}{\Delta p_{Σ3}}\delta p_{н.вх}=0 \qquad (2.1.42)$$

式中 $\Delta p_{Σ3}=\sum_{i=1}^{k}\Delta p_i$——由泵至燃烧室的流路压力损失总和；

$\tau_{и3}=\dfrac{G_3}{\Delta p_{Σ3}}\sum_{i=1}^{k}\dfrac{L_i}{F_i}$——由泵至燃烧室的流路内液柱的惯性时间常数；

$p_к,\delta p_к$——燃烧室压力及其无量纲变化量；

$\Delta p_{p3}$——燃烧室供应流路内调节装置的压降；

$\delta(\mu F)_3$——该调节装置流通截面面积的无量纲变化量。

应当注意，由于用同一台泵给两条流路供应推进剂，因而在由泵至燃气发生器的流路的方程(2.1.41)中包含有由泵至燃烧室的流路的流量变化量$\delta G_3$，并且相反地，在由泵至燃烧室的流路的方程(2.1.42)中则含有由泵至燃气发生器的流路的流量变化量$\delta G_1$。在每条流路的方程中包含有该流路的外界干扰变量的变化量（以及它们的导数），这些变量有流经另一条流路的组元流量、涡轮泵转速、燃烧室（燃气发生器）压力等。其中有些变量可从发动机对应组件的方程求得。有些变量则是对整个发动机的外界干扰作用，例如$\delta p_{н.вх},\delta(\mu F)_1,\delta(\mu F)_3$。

在方程(2.1.41)和(2.1.42)中包含有不同正负号的变化量$\delta G_1$项和$\delta G_3$项以及它们的导数项。由于泵的内部损失，离心泵的压头流量特性曲线的斜率$\psi_G$通常具有负号，这样使含有流量变化量及其导数的各项符号相同。在发动机节流时，假若由于发动机工况的改变而进入压头特性曲线中压头随流量增大而增大的区域，即对应有$\psi_G>0$，那么，变量及其导数的符号差异就是系统可能失

稳的征兆。

在方程(2.1.41)和(2.1.42)中未使用推进剂组元的下标，因为方程的形式与组元种类无关，面对于发动机具体系统方案的流路方程，后面将以发动机通用数学模型的形式进行推导。

如果在燃气发生器流路中有二级的辅助泵(在补燃系统中)，那么，除了方程(2.1.38),(2.1.39)和(2.1.40),还必须利用辅助泵的压头方程（忽略两泵间流路的水力阻力和液体惯性）

$$\frac{p_{\text{н.д}}}{\Delta p_{\text{н.д}}}\delta p_{\text{н.д}}-\frac{p_{\text{н}}}{\Delta p_{\text{н.д}}}\delta p_{\text{н}}=\psi_{\text{Gд}}\delta G_1+\psi_{\text{nд}}\delta n-\tau_{\text{нд}}\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}+\tau_{\text{nд}}\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.43}$$

式中 $p_{\text{н.д}},\delta p_{\text{н.д}}$——辅助泵的泵后压力及其无量纲变化量；

$\Delta p_{\text{н.д}},\psi_{\text{Gд}},\psi_{\text{nд}}$——辅助泵的压头、压头流量特性曲线、压头转速特性曲线的无量纲斜率；

$\tau_{\text{н.д}},\tau_{\text{nд}}$——辅助泵流道中液体相对运动和牵连运动的时间常数。

对(2.1.38),(2.1.39),(2.1.40)及(2.1.43)式进行变换后得到带有辅助泵的燃气发生器供应流路的方程

$$\left(2-\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\bar{G}_1\psi_{\text{G}}-\frac{\Delta p_{\text{н.д}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\psi_{\text{Gд}}\right)\delta G_1+\left(\tau_{\text{и}1}+\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\bar{G}_1\tau_{\text{н}}+\frac{\Delta p_{\text{н.д}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\tau_{\text{н.д}}\right)\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\bar{G}_3\psi_{\text{G}}\delta G_3+\tau_{\text{н}}\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\cdot\bar{G}_3\frac{\mathrm{d}\delta G_3}{\mathrm{d}t}-\left(\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\psi_{\text{n}}+\frac{\Delta p_{\text{н.д}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\psi_{\text{nд}}\right)\delta n-\left(\tau_{\text{n}}\frac{\Delta p_{\text{н}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}+\tau_{\text{nд}}\frac{\Delta p_{\text{н.д}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\right)\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}+\frac{p_{\text{гг}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta p_{\text{гг}}-2\frac{\Delta p_{\text{p}1}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta(\mu F)_1$$



$$-\frac{p_{\text{н.вх}}}{\Delta p_{\Sigma 1}}\delta p_{\text{н.вх}}=0 \tag{2.1.44}$$

式中 $\Delta p_{\Sigma 1}=p_{\text{н.д}}-p_{\text{гг}}$。

如果液路具有复杂的型面，沿着第$i$段流路的长度有着流通截面面积$F(x_i)$的连续变化，例如冷却套，那么，以积分的形式来求惯性时间常数（对于第$i$段流路）：

$$\tau_{\text{и}i}=\frac{G_i}{\Delta p_{\Sigma i}}\int_0^{L_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{F(x_i)} \tag{2.1.45}$$

式中 $x_i$——沿着流路轴线的流动坐标。

对于结构更复杂的液路——有多个燃气发生器或燃烧室，有旁通段等等，可对具有多个支路的分支应用(2.1.38)、(2.1.39)、(2.1.43)型方程及类似于(2.1.40)的方程来建立起数学模型。这时，假定液体不可压缩，有多少个独立的组元流量变化量，就列出相应个数的流路方程。

### 2.1.7 考虑液体的惯性和压缩性时液路分段的数学模型

如果管路有足够的长度(在2.3节将对各种模型的应用性进行评价)，那么在它的数学模型中必须既考虑液体的惯性，又考虑液体的压缩性。这个模型是近似的，但可在前面所说明的视为具有集中参数的元件的发动机组合件及系统的低频模型范围内应用。除了惯性和压缩性，还考虑了流路壁面的摩擦损失，将它们合并到流路分段边界处的局部阻力中。当然，这个模型只适用于可忽略声学效应的有限的低频范围(见2.3节)。应当指出，类似的模型也可用于描述具有分布参数的系统，这时将流路分成很多小段，对每一小段用考虑了介质的惯性和压缩性的、具有集中参数的元件的方程来描述[31]。

有时在发动机的流路中有必须考虑介质压缩性的一些分段：泵入口气蚀区[21]，燃烧室或燃气发生器头部，自动器装置等。此

外，在发动机的系统中有时专门设置了阻尼元件来抑止振荡。

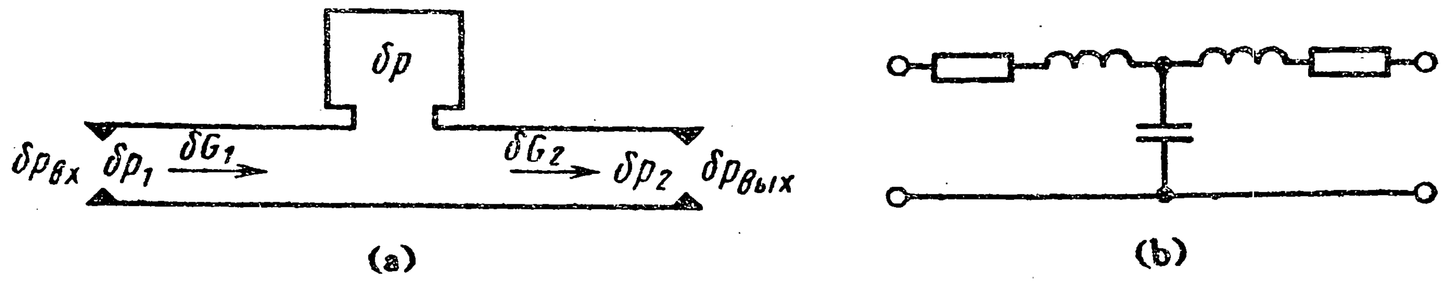



图2.4 液路分段示意图和液路等效模型

(a)—考虑液体惯性及压缩性时液路分段的示意图；(b)—液路等效模型。

注：此处及以后的液路图中采用电工学的符号(因为描述液路元件的方程与电路元件的方程有相似性)。

先来研究无流容流路的数学模型。可以用一包含入口和出口处两个局部阻力，两个不可压缩无粘性的液柱，以及它们之间的流容的模型来对液路分段(图2.4(a)) 的非稳态过程作近似描述。由两个阻力元件$R_1$和$R_2$、两个惯性时间常数分别为$\tau_{и1}$和$\tau_{и2}$的惯性元件和一个时间常数为$\tau_{\circ}$的流容元件所组成的液路，就是这个流路分段的模型(图2.4(b))[24]。图上由流容将圆柱形流道的液柱分隔成两个半段(见图2.4(a))，对它们应用方程(2.1.10)，并考虑到$\tau_{и1}=\tau_{и2}=\tau_{и}/2$，得

$$\delta p_1-\delta p=\frac{\tau_{и}}{2}\frac{\mathrm{d}\delta G_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\delta p-\delta p_2=\frac{\tau_{и}}{2}\frac{\mathrm{d}\delta G_2}{\mathrm{d}t} \qquad (2.1.46)$$

式中 $\delta p_1,\delta p_2,\delta p$——流路分段起点、终点及中点处相对于流路平均压力的无量纲压力变化量；

$\delta G_1,\delta G_2$——流路分段起点和终点处相对于平均流量的无量纲流量变化量；

$\tau_{и}=GL/(pF)$——流路分段内整个液柱的惯性时间常数；

$L$，F——流路分段的长度及横截面积；



$p$，$G$——压力和流量的平均值。

在流路模型的流容方程中考虑流路内所有液体的压缩性。利用(2.1.7)式得

$$\tau_{\circ}\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}=\delta G_1-\delta G_2 \qquad (2.1.47)$$

式中 $\tau_{\circ}=pLF/(Ga^2)$——流路分段内液体的流容时间常数；

$a$——考虑了壁面柔性的流路分段内的声速。

认为流路入口和出口具有固定的(不可控制的)局部流体阻力，其中包含流路壁面的摩擦损失。据方程(2.1.16)，对于局部阻力有

$$\delta G_1=\frac{p_{вх}}{2(p_{вх}-p)}\delta p_{вх}-\frac{p}{2(p_{вх}-p)}\delta p_1 \qquad (2.1.48)$$

$$\delta G_2=\frac{p}{2(p-p_{вых})}\delta p_2-\frac{p_{вых}}{2(p-p_{вых})}\delta p_{вых} \qquad (2.1.49)$$

式中 $p_{вх},p_{вых}$——流路入口压力（在入口流阻之前)和出口压力（在出口流阻之后)；

$\delta p_{вх}$，$\delta p_{вых}$——流路入口前和出口后相对于变量$p_{вх}$和$p_{вых}$平均值的无量纲压力变化量。

对方程组(2.1.46)～(2.1.49)进行变换，消去变化量$\delta p_1$，$\delta p$，$\delta G_1$和$\delta G_2$，并因为时间常数很小而略去二阶以上的导数。最后求得将第二段流路终点处压力变化量$\delta p_2$与流路入口及出口压力变化量联系在一起的方程

$$\frac{\tau_{\circ}\tau_{и}}{2}(\psi_2-\psi_1)\frac{\mathrm{d}^2\delta p_2}{\mathrm{d}t^2}+(\tau_{и}-\tau_{\circ}\psi_1\psi_2)\frac{\mathrm{d}\delta p_2}{\mathrm{d}t}+(\psi_2-\psi_1)\delta p_2$$

$$=-\frac{\tau_{\circ}\tau_{и}}{2}\gamma_2\psi_1\frac{\mathrm{d}^2\delta p_{вых}}{\mathrm{d}t^2}+\tau_{и}\gamma_2\frac{\mathrm{d}\delta p_{вых}}{\mathrm{d}t}$$

$$-\gamma_2\psi_1\delta p_{вых}+\gamma_1\psi_2\delta p_{вх} \qquad (2.1.50)$$

式中 $\psi_1=-2(p_{вх}-p)/p$；

$\psi_2=2(p-p_{вых})/p$——流路分段以及整个流路的入口和出口处的无量纲阻力(阻抗)；

$\gamma_1=p_{вх}/p$；

$\gamma_2=p_{вых}/p$——对流路分段以及整个流路的入口和出口处的外界干扰的放大系数。

在2.3.3节中，将流路分段视为具有分布参数的元件来描述，当角速度$\omega$比较小时，通过将强迫振荡的精确解展开成级数的方式也会获得恰似(2.1.50)式那样的关系式。这种一致性表明，所采用的较简单的流路模型对于可忽略三阶或更高阶$\omega$项的低频区是完全可信的。在2.1.8节中列出了证实这一事实的试验资料。

方程(2.1.50)将流路分段终端的压力偏差同外界干扰——分段界面上即所研究分段前后的压力偏差联系起来。对连有气体或液体流容、特征参数为压力偏差的流路进行动力学描述，以及将计算结果同试验时很易测量的压力偏差数据进行比较时，这个方程很方便。对液体火箭发动机入口流路，另一种表示形式显得更方便，在该表示式中将流路入口（贮箱内）压力偏差及出口（泵后）流量的偏差作为外界干扰，而将流路出口，即泵入口处的压力偏差仍作为要求出的变量。

如果不考虑气蚀现象，并且泵的流量完全由在干扰量——泵入口压力偏差的作用下而变化的各种内部参数的组合所决定（这时干扰量成为一个内部参数），则采用这种表示形式。从方程组(2.1.45)~(2.1.49)中消去变量$\delta p_1,\delta p_2,\delta p,\delta G_1$，求得流路分段方程的另一种表示形式

$$\frac{\tau_э\tau_и}{2}\gamma_2\frac{d^2\delta p_{вых}}{dt^2}-\tau_э\gamma_2\psi_1\frac{d\delta p_{вых}}{dt}+\gamma_2\delta p_{вых}$$



$$=\frac{\tau_э\tau_и}{2}(\psi_1-\psi_2)\frac{d^2\delta G_2}{dt^2}+(\tau_э\psi_1\psi_2-\tau_и)\frac{d\delta G_2}{dt}$$

$$+(\psi_1-\psi_2)\delta G_2+\gamma_1\delta p_{вх} \qquad (2.1.51)$$

如果必须考虑泵入口处气蚀现象，则用方程(2.1.50)和(2.1.51)来描述流路动力学不很方便，在最简单的情况下，这些气蚀现象可用流容方程来描述，因为流容入口和出口处的流量偏差在动力学中是有区别的。这时，泵入口处也就是流路分段出口处的流量偏差$\delta G_2$为出口参数，对于该参数解出泵入口处的流路方程，而外界干扰则为流路分段入口和出口处的压力偏差。所有这些偏差都出现在方程(2.1.51)中，因此由它可获得所需要的方程，只要将带有$\delta G_2$的项移至左边，带有$\delta p_{вых}$的项移至右边。

假若泵入口处气蚀区内的压缩性大大高于气蚀区外液体的压缩性，那么后者可忽略。在这种情况下，泵入口流路内液柱的固有振荡频率明显地降低（与声振相比）。带有专门阻尼装置的流路也有类似的特性，这种装置是一个弹性（容积）元件，用来抑制箭体的纵向振动[11,21]，减弱强迫振荡[34]，降低水击力等。

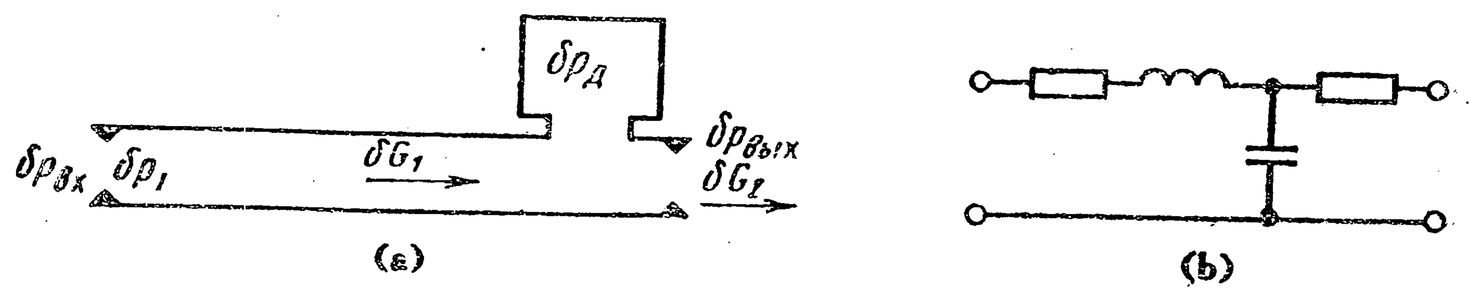



图2.5 液路示意图及液路等效模型

(a)—带有流容及局部阻力的液路示意图；(b)—液路等效模型。

现研究由入口处局部阻力、只考虑惯性的圆柱段、部分地充满气体的流容及出口处局部阻力所组成的流路（图2.5(a)）。等效液路如图2.5(b)所示。对于流容，要考虑将流容与流路联结起来的颈部的液柱惯性。对流路的圆柱段应用惯性方程(2.1.10)

$$\delta p_1-\delta p_2=\tau_и\frac{d\delta G_1}{dt} \qquad (2.1.52)$$

式中 $\delta p_1, \delta p_2$——流路分段入口及出口处无量纲压力变化量；

$\delta G_1$——分段入口处无量纲流量变化量；

$\tau_{и} = GL/(pF)$——流路分段的惯性时间常数。

对流路入口和出口处局部阻力采用(2.1.48)和(2.1.49)式，液容（阻尼器、气蚀区等)内气体压力的偏差用方程(2.1.7)来描述，该方程将流容——阻尼器内压力变化量$\delta p_{д}$的导数同流容前后的流量变化量$\delta G_1$和$\delta G_2$联系在一起：

$$\tau_{е.д}\frac{\mathrm{d}\delta p_{д}}{\mathrm{d}t} = \delta G_1 - \delta G_2 \qquad (2.1.53)$$

式中 $\tau_{е.д} = V_{д}\rho/G$——流容—阻尼器的时间常数；

$V_{д}$——流容内的气体体积；

$\rho, G$——液体密度及其通过流路的流量。

阻尼器颈部液体的惯性和摩擦损失可利用由(2.1.10)和(2.1.16)式得出的线性化关系式来计算，

$$\delta p_2 - \delta p_{д} = \tau_{и.г}\frac{\mathrm{d}\delta G_{д}}{\mathrm{d}t} + \psi_{г}\delta G_{д} \qquad (2.1.54)$$

该式描述了具有时间常数$\tau_{и.г} = GL_{г}/(pF_{г})$的颈部惯性元件与具有无量纲阻力$\psi_{г}$的局部阻力串联在一起时的液体运动情况。这里$L_{г}$、$F_{г}$——颈部的有效长度和截面面积；$G, p$——流路内流量和压力的平均值。

由于没有经过颈部的固定支流，因此$\psi_{г}$只有在可以忽略颈部入口和出口损失的层流流动状态下才能精确地确定[7]，但是这种流动状态的出现概率很小。在紊流流动状态下，$\psi_{г}$与经过颈部的流量的振幅有关，因为对于无固定支流的平方型阻力只可能谐波线性化[5]。为了不使问题复杂化，在第一次近似时采用某个有效常数$\psi_{г}$。对方程组(2.1.48)、(2.1.49)、(2.1.52)、(2.1.53)和(2.1.54)进行变换，消去除$\delta p_1$以外的所有内部参数的变化量，略去带有三



阶导数的微量项并利用(2 1.50)式中的符号，得

$$\begin{aligned}
&[(\psi_2+\psi_{г})\tau_{и}\tau_{е.д} + (\psi_2-\psi_1)\tau_{и.г}\tau_{е.д}]\frac{\mathrm{d}^2\delta p_2}{\mathrm{d}t^2}\\
&+\left[\tau_{и} + \tau_{е.д}(\psi_2\psi_{г} - \psi_1\psi_2 - \psi_1\psi_{г}\right]\frac{\mathrm{d}\delta p_2}{\mathrm{d}t} + (\psi_2-\psi_1)\delta p_2\\
&= \gamma_1\psi_2\left(\tau_{и.г}\tau_{е.д}\frac{\mathrm{d}^2\delta p_{вх}}{\mathrm{d}t^2} + \tau_{е.д}\psi_{г}\frac{\mathrm{d}\delta p_{вх}}{\mathrm{d}t} + \delta p_{вх}\right)\\
&+\gamma_2\left[(\tau_{е.д}\tau_{и}\psi_{г} - \tau_{и.г}\tau_{е.д}\psi_1)\frac{\mathrm{d}^2\delta p_{вых}}{\mathrm{d}t^2}\right.\\
&\left.+(\tau_{и} - \tau_{е.д}\psi_{г}\psi_1)\frac{\mathrm{d}\delta p_{вых}}{\mathrm{d}t} - \psi_1\delta p_{вых}\right] \qquad (2.1.55)
\end{aligned}$$

假如选取入口压力变化量$\delta p_{вх}$和流路分段出口流量变化量$\delta G_2$作为外界干扰作用，那么对原始方程组变换后得

$$\begin{aligned}
&(\tau_{и.г}+\tau_{и})\tau_{е.д}\frac{\mathrm{d}^2\delta p_1}{\mathrm{d}t^2} + \tau_{е.д}(\psi_{г}-\psi_1)\frac{\mathrm{d}\delta p_2}{\mathrm{d}t} + \delta p_2\\
&= \gamma_1\left(\tau_{и.г}\tau_{е.д}\frac{\mathrm{d}^2\delta p_{вх}}{\mathrm{d}t^2} + \tau_{е.д}\psi_{г}\frac{\mathrm{d}\delta p_{вх}}{\mathrm{d}t} + \delta p_{вх}\right)\\
&+\gamma_2\left[(\tau_{е.д}\tau_{и}\psi_{г} - \tau_{е.д}\tau_{и.г}\psi_1)\frac{\mathrm{d}^2\delta G_2}{\mathrm{d}t^2}\right.\\
&\left.+(\tau_{и} - \tau_{е.д}\psi_{г}\psi_1)\frac{\mathrm{d}\delta G_2}{\mathrm{d}t} - \psi_1\delta G_2\right] \qquad (2.1.56)
\end{aligned}$$

线性化方程(2.1.55)及(2.1.56)将流路终端（在入口流路的情况下——至发动机前）的压力偏差同外界参数——流路入口压力偏差及流路出口的压力偏差或流量偏差联系在一起。

### 2.1.8 作为集中参数系统的液路分段的若干动力学特点

现在来研究视为集中参数系统的、用非高阶——不高于二阶

的微分方程来描述的液路分段的若干动态性能特点。液路分段动力学方程(2.1.50)、(2.1.51)、(2.1.55)及(2.1.56)中的每一个方程，如果将它左端各项除以该端第一项的系数，则变为振荡环节的方程：

$$\frac{d^2\delta x_1}{dt^2} + 2\Delta\frac{d\delta x_1}{dt} + \omega_0^2\delta x_1 = f(t)$$

式中 $\delta x_1$——流路内某个流动参数的无量纲变化量；

$\Delta$——振荡衰减系数；

$\omega_0$——振子固有振荡频率；

$f(t)$——确定外界干扰作用的函数。

由方程(2.1.50)及(2.1.51)得出，固有振荡频率（在无损失或可将损失忽略时）由下式确定：

$$\omega_0 = \sqrt{2/(\tau_e\tau_и)} \qquad (2.1.57)$$

而表示固有振荡振幅随时间的衰减速度(对于有损失的系统)的阻尼系数将不相同：如果将含有变化量$\delta G_2$的项移至左端，含$\delta p_{вых}$的项移至右端，对于方程(2.1.50)有

$$\Delta = \frac{\tau_и - \tau_e\psi_1\psi_2}{\tau_e\tau_и(\psi_2 - \psi_1)} \qquad (2.1.58)$$

对于方程 (2.1.51)

$$\Delta = -\psi_1/\tau_и \qquad (2.1.59)$$

在(2.1.58)和(2.1.59)式中，入口阻力$\psi_1$通常为负的，因此，$\Delta$是正的。衰减系数既同由阻力$\psi_1$和$\psi_2$所决定的分段终端压力损失有关，也同流路分段的数学模型中所包含的惯性和流容时间常数有关。在求由方程(2.1.51)所描述流路的衰减系数的(2.1.59)式中，不包含出口阻力$\psi_2$。这是因为各种干扰或是通过$\delta G_2$的改变，或是通过$\delta p_{вх}$的改变而传入这类流路的。对于视为线性系统的流路，假设每种干扰都是独立的，因而当给定偏差$\delta p_{вх}$时，出口流量保持不变，亦即$\delta G_2 = 0$，相应地当$\delta G_2$改变及



$_{вх}$改变时，流路出口流量振荡是已知的(其中也包括$\delta G_2 = 0$)，同时，流路出口阻力对描述振荡环节的方程的各消散项没有影响。这个阻力只是对引起出口流量强迫振荡的装置产生附加载荷。

现将用(2.1.57)式获得的液路分段固有振荡频率同用液流声学模型（见2.4节)求得的该液路分段的固有振荡频率进行比较。为此，通过流路的几何参数及介质的物理参数来表示$\tau_e$和$\tau_и$：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{\tau_e\tau_и}} = \sqrt{2\frac{pF}{GL}\frac{a^2G}{pLF}} = \sqrt{2}\frac{a}{L} \qquad (2.1.60)$$

由边界阻力与波动阻力之间的关系所决定声学模型给出流路固有振荡频率（一阶）的两个可能值：$\omega_a = (\pi/2)(L/a)$或$\omega_a = \pi(L/a)$。如果其中一个大于1，而另一个小于1，那么$\omega_a = (\pi/2)(L/a) \approx 1.57L/a$。近似式(2.1.57)给出固有振荡频率值$\omega_0 = \sqrt{2}L/a \approx 1.42L/a$，同声振频率之一略有相差。前已指出，近似式(2.1.50)与通过将声学解简化所得到的关系式是相符的，其中所作简化在于在展开成三角函数级数时只取展开式的最少数几项。在展开时，只取$\sin\varpi \approx \varpi$，$\cos\varpi = 1 - \varpi^2/2$项，式中$\varpi = \omega L/a$，而舍弃了$-\varpi^3/3!$及$\varpi^4/4!$项。

如果考察被舍弃项中的大项$\varpi^3/3!$，则在$\varpi = 1$时，该项造成的误差为$1/6 \approx 0.17$(即17%)，而在谐振频率下，当$\varpi = 1.57$，该项等于0.645，也就是误差相当大。这样，对于作为二阶集中参数系统的液路分段（振荡环节)的近似关系式(2.1.50)、(2.1.51)等，只是在满足条件$\varpi \leqslant 1$的较低的频率范围内，能以大致可接受的精度来描述液路分段的动态特性。用该最简单的数学模型所求得的液路固有振荡频率要低于按更精确的声学关系式所求得的频率值。在接近固有振荡的声学频率时，不能采用这些近似关系式，因为误差太大。

采用近似模型时使固有振荡频率值降低的解释是，(2.1.60)式中所包含的时间常数$\tau_e$和$\tau_и$考虑了液路内整个液柱的压缩性和

惯性。实际上，作为分布参数系统的液路振荡时，不是全部液体都会具有最大速度，也不是全部液体作为统一整体受到压缩。相应地，$\tau_{\text{。}}$和$\tau_{\text{и}}$的有效值将低于(2.1.60)式给出的值，而固有振荡频率值则要高些。

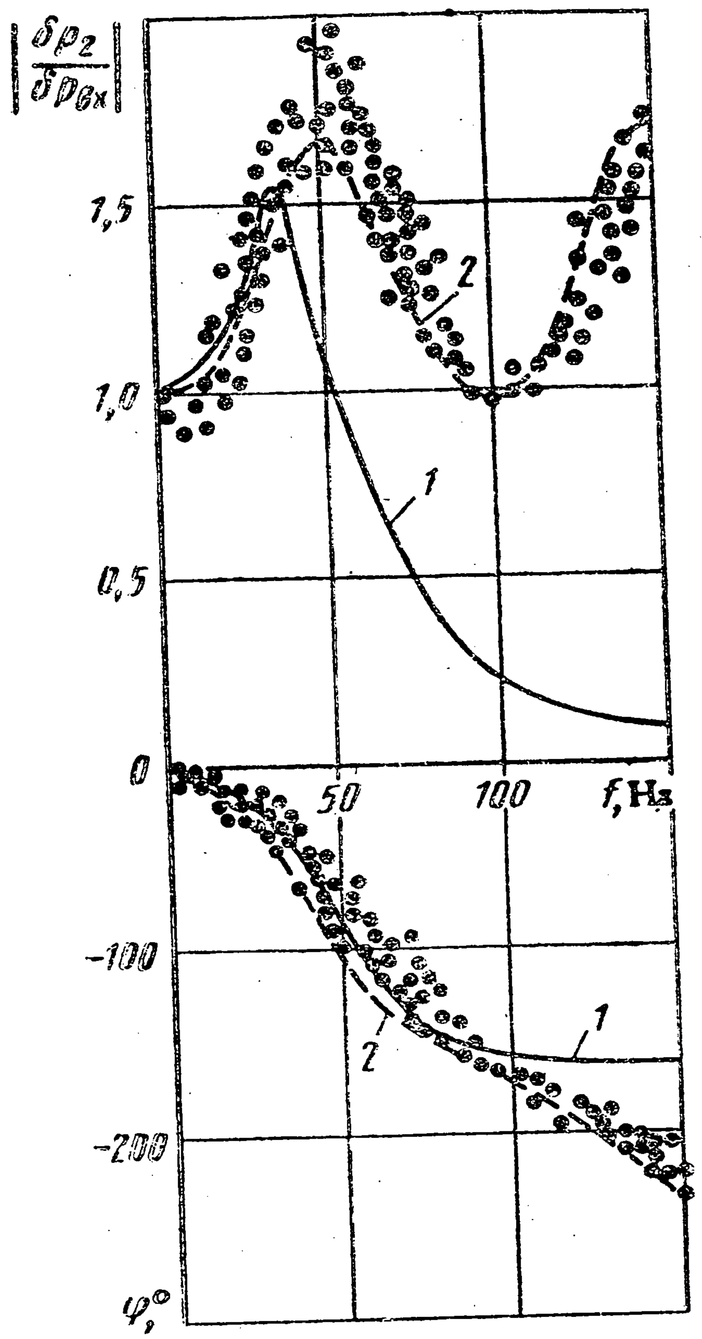



图2.6　液路的幅频和相频特性
1—按公式(2.1.50)计算的特性；
2—按声学关系式计算的特性；
• —试验点；φ—相位差；
$\delta p_2$—液路分段出口压力的变化；
$\delta p_{вх}$—液路入口压力的变化。

图2.6给出了长度为6.3m，直径为20mm的液路按近似式(2.1.50)计算的幅频和相频特性(曲线1)。图上还给出了同一液路在频率试验时所得到的试验点[6]。曲线2是按更严格的声学关系式(见2.3节)计算的。液路的声学数学模型可在相当宽的频率范围内很满意地求出液路的动态特性。当频率低于由(2.1.57)式求出的谐振频率时，即低于液路内液体纵向振荡的一阶声学谐振



频率时，曲线1同试验数据是一致的。当频率更高时，不能使用(2.1.50)式。

自然地，如果采用更复杂的数学模型，将作为集中参数系统的液路段分成许多单元，对每个单元列出(2.1.50)式那样的关系式，则可以在较宽的频率范围内，甚至接近于固有振荡频率，相当精确地描述液路的动态特性[31]。但是描述精度的提高是靠很复杂的模型来实现的。

在大多数情况下，对于从贮箱到发动机入口的液路不需要采用这样复杂的模型，因为泵入口处的气蚀现象使液路的固有振荡频率低于由声学关系式得出的频率。这时，固有振荡频率不是由液路中液体的压缩性所决定，而是决定于液路出口、泵内气蚀区的压缩性以及液路中液柱的惯性[31]，因而可只采用(2.1.55)和(2.1.56)式所表示的数学模型。

对于发动机内部各液路，在低频区可采用更简单的方程(2.1.39)，(2.1.41)，(2.1.42)或(2.1.44)，在这些方程中考虑了液路中液体的惯性、摩擦压力损失以及局部阻力损失。

## 2.2　流体力学方程

### 2.2.1　原始方程

在液体火箭发动机的液路中，常常不能满足将它们视为集中参数元件的限止条件——与波长相比时几何尺寸很小，例如长度$L \ll \lambda$，式中$\lambda = a/f_{max}$——最大振频$f_{max} = \omega_{max}/(2\pi)$下纵向声波的长度；$a$——声速。这时，必须将液路分段，以及整个液路系统看成分布参数系统。

圆柱形导管是液路的典型元件，它遵守条件$R \ll L$，其中$R$、$L$——导管的直径和长度。这时作轴对称流动的假设是很自然的。在液体火箭发动机的液路中实际上总有紊流状态。但是层流

理论研究得更充分些，因此，先来研究以圆柱坐标中奈维-斯托克斯方程所描述的圆柱形导管中可压缩滴状液体的层流运动，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$+\frac{\nu}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) \qquad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)$$

$$+\frac{\nu}{3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial r}\right) \qquad (2.2.2)$$

式中 $u,v$——液体的轴向和径向速度；$F_x,F_r$——质量力的轴向和径向分量；$\nu$——液体的运动粘度；$r$——半径方向上坐标的现时值。

在推导方程(2.2.1)和(2.2.2)时作了下列假设：液体遵守牛顿力学，粘性不变，流动是恒温的，管壁是刚性的。方程(2.2.1)和(2.2.2)中含有四个变量：$u,v,\rho$和$p$，因此，为了完整地描述液体运动还必须有两个方程。其中之一是连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial r}+\rho\frac{v}{r}=0 \qquad (2.2.3)$$

除了连续方程，还必须利用能量方程。采用能量方程的哪种表示形式较方便，这与所要解的问题的类型有关。本节研究恒温、弱压缩性滴状液体中扰动传播过程。这时，用表示绝热（液体比熵$s=\text{const}$）压缩过程中液体密度与压力间关系的状态方程来代替能量方程较方便：



$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=a^2 \qquad (2.2.4)$$

式中 $a$——绝热声速。

### 2.2.2 无量纲方程

方程(2.2.1)—(2.2.4)描述了液体的非稳态、恒温运动。为了简单起见，将它们变换为无量纲形式较方便。进行这种流体力学方程变换时会出现表示这类流动特性的各种相似准则[29]。将方程和边界条件变换成无量纲形式后，可对具有不同参数的许多相似流动状态进行描述。利用相似理论来研究流动相似问题是很方便的。

变换成无量纲方程的另一个重要优点是能对方程各项的显著性进行比较，从而舍弃那些不显著的项，解决使方程简化的问题[6]。

为将流体力学方程变换成无量纲形式，引入各变量的特征比例值：$p_0,L,\rho_0,R,u_0,t_0,F_0$，其中$L,R$——液路的长度和半径（在多数情况下，采用固定值作为比例值）。

对于液体管路，绝大多数情况下有$L\gg R$。这时利用比值$L/R$可将半径方向上液体运动的比例参数（速度$v$和质量力分量$Fr$）同沿着轴线流动的对应参数相联系起来[6]。用带有短划的字母表示无量纲变量，得

$$p=p_0\bar{p};\quad u=u_0\bar{u};\quad \rho=\rho_0\bar{\rho};\quad v=u_0(R/L)\bar{v};$$

$$x=L\bar{x};\quad r=R\bar{r};\quad t=t_0\bar{t};\quad F_x=F_0\bar{F}_x;$$

$$Fr=F_0(R/L)\bar{F}r。$$

将这些无量纲变量代入方程（2.2.1）和（2.2.2），对方程(2.2.1)的各项除以$u_0^2/L$，方程(2.2.2)则除以$u_0^2R/L^2$，经变换后得无量纲形式的运动方程

$$Sr\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}=\frac{1}{F_r}\bar{F}_x-\frac{Eu}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{R}{L}\right)\left[\frac{4}{3}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}+\left(\frac{L}{R}\right)^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{r}^2}+\left(\frac{L}{R}\right)^2\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}\partial\bar{r}}+\frac{1}{3}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right] \qquad (2.2.5)$$

$$Sr\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}=\frac{1}{Fr}\bar{F}r-\frac{E_u}{\bar{\rho}}\left(\frac{L}{R}\right)^2\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}}$$

$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{L}{R}\right)\left[\left(\frac{R}{L}\right)^2\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{r}^2}+\frac{4}{3}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}\frac{\bar{v}}{\bar{r}^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{r}}\right] \qquad (2.2.6)$$

式中 $Sr=L/(u_0t_0)$——斯特劳哈尔数；

$Fr=u_0^2/(F_0L)$——弗劳德数；

$Eu=p_0/(\rho u_0^2)$——欧拉数；

$Re=u_0R/\nu$——雷诺数。

利用(2.2.4)式，从连续方程(2.2.3)中消去密度，得

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\right)+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial r}=0 \qquad (2.2.7)$$

为了将方程(2.2.7)变为无量纲变量式，对各项除以$p_0a/L$，得

$$SrMa\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}}+\alpha\bar{p}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}+\frac{\bar{v}}{\bar{r}}\right)+Ma\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}}\right)=0 \qquad (2.2.8)$$

式中 $Ma=u_0/a$——马赫数；$\alpha=\rho_0au_0/p_0$——无量纲的液体波动阻力。

### 2.2.3 方程的简化

现在来估计无量纲运动方程(2.2.5)和(2.2.6)中各项的数量级，这时考虑到条件$L/R\gg1$。在符合上述条件的情况下，方程



(2.2.5)右端方括弧中各项，除第2项和第3项外，其余项均可忽略掉。该方程的其余各项一般都有相同的数量级，其中包括非线性对流项（左端的第2项和第3项），这些非线性项的存在使解方程困难。在方程(2.2.6)中，仅右端第2项有系数$(L/R)^2$，这意味着其余各项比它小很多。这样，对于径向速度分量的运动方程(2.2.6)，可归结成条件

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}}=0 \qquad (2.2.9)$$

它是由条件$L\gg R$所得出的结果。

在连续方程(2.2.8)中，各项(除$\partial\bar{p}/\partial\bar{r}$)一般都保留。这样，在符合条件$L\gg R$的情况下，三个流体力学方程只保留两个描述液体不稳定纵向（沿轴线）运动的方程。这时，决定液体在半径方向上运动情况的方程(2.2.6)可忽略，也就是将径向运动本身忽略掉。

对于液路各段，除了两端，条件(2.2.9)都是正确的。对液路两端的流动（在半径量级的距离内），还必须考虑径向速度分量的方程[27,30]，但在整个液路的动力学分析时，通常只限于以边界阻抗的形式考虑液路两端总的流动特性。

在分析一段时间范围内液路波动过程的特性时，宜采用扰动在液路长度上传输的时间$t_0=L/a$作为时间尺度。这时，斯特鲁哈尔数和欧拉数通过马赫数及无量纲阻力$\alpha$来表达：

$$Sr=L/(u_0t_0)=La/(u_0L)=1/Ma$$

$$Eu=p_0/(\rho_0u_0^2)=(p_0/\rho_0u_0a)(a/u_0)=1/(\alpha Ma) \qquad (2.2.10)$$

考虑(2.2.10)式后，无量纲变量的连续方程可写成下列形式：

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial t}+\alpha\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}+\frac{\bar{v}}{\bar{r}}\right)+Ma\bar{u}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}=0$$

(2.2.11)

类似地，将(2.2.10)式代入(2.2.5)方程，略去一些次要项后得到它的另一种形式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}+Ma\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+Ma\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}=\frac{Ma}{F_r}\bar{F}_x-\frac{1}{\alpha\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

$$+\frac{Ma}{Re}\left(\frac{L}{R}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial \bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}\right) \qquad (2.2.12)$$

方程(2.2.11)和(2.2.12)描述了粘性可压缩液体在圆柱形液路段内的轴对称运动。在这些方程中包含有马赫数$Ma$，它作为非线性项$\bar{u}\partial\bar{u}/\partial\bar{x}$，$\bar{v}\partial\bar{u}/\partial\bar{r}$和$\bar{u}\partial\bar{p}/\partial\bar{x}$的系数。压缩性微小的滴状液体在液路中流动时，其马赫数$Ma$很小，因为$u_0\ll a$，从而可忽略掉这些非线性项。对于气体流动，也常满足条件$u_0\ll a$，因而相应地在方程(2.2.11)和(2.2.12)中可略去对流项。这时以及当$\bar{p}\approx 1$时，流路的动力学方程组表现为线性的，不需线性化，也就是不需作小偏差变换。

当不满足条件$u_0\ll a$时，解气体流动的非线性流体力学方程会遇到一定困难。但对于很多问题，解用小偏差参数表示的线性化方程已完全足够。然而，在将方程线性化以前必须注意到方程组(2.2.11)和(2.2.12)是不封闭的，因为两个方程中包含着四个变量$\bar{u},\bar{v},\bar{p},\bar{\rho}$。边界层方程组也有类似情况[16]，这些方程也是在边界层的长度和厚度有很大差别的假设下得出的。

由于描述可压缩液体的二维流动，方程组(2.2.11)，(2.2.12)十分复杂。可尝试简化这个方程组，并消除前已指出的不确定性，变为在每一截面上有速度、密度和压力的平均瞬时值$\tilde{u}$，$\tilde{\rho}$和$\tilde{p}$的一维流动方程：

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r u(x,r,t)\mathrm{d}r;$$

$$\tilde{p}(x,t)=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r p(x,r,t)\mathrm{d}r;$$



$$\tilde{\rho}(x,t)=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r \rho(x,r,t)\mathrm{d}r \qquad (2.2.13)$$

由条件(2.2.9)得出，$\tilde{p}(x,t)=p(x,r,t)$及$\tilde{\rho}(x,t)=\rho(x,r,t)$。将方程(2.2.11)和(2.2.12)中的变量回复到有量纲变量，可列出粘性可压缩液体在长液路中流动的简化流体力学方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho a^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial r}\right]=0 \qquad (2.2.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (2.2.15)$$

为了将这些方程变换为一维近似方程，对方程(2.2.14)各项乘上$2r/R^2$，并对$r$由0到$R$进行积分，以及将$\bar{p}=\tilde{p}(x,t)$和$\rho=\rho(x,t)$移到积分符号外面，得

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}+\frac{2}{R^2}\int_0^R ru\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}r+\tilde{\rho}a^2\left[\frac{2}{R^2}\int_0^R r\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}r\right.$$

$$\left.+\frac{2}{R^2}(vr)\Big|_0^R\right]=0$$

考虑到条件(2.2.9)，可将上列方程中第二项的导数$\partial p/\partial x=\partial\tilde{p}/\partial x$从积分符号下移出。将导数从方括弧中第一项的积分符号下移出，而对第二项则利用条件$v(R)=0$进行变换。经上述运算后，并注意到方程(2.2.13)，得

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}+\tilde{\rho}a^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}=0 \qquad (2.2.16)$$

或利用方程(2.2.4)，回到起始形式：

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u})}{\partial x}=0 \qquad (2.2.17)$$

在进行求平均值的运算之前，先对方程(2.2.15)作变换，给它的各项乘上$\rho r$，给方程(2.2.14)的各项乘上$ur$，然后将两者相

加。此外，利用(2.2.4) 方程，以对密度的导数替换对压力的导数，经这些变换后得

$$\frac{\partial(r\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(r\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(r\rho uv)}{\partial r}=r\rho F_x-r\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$+r\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]$$

给该方程的各项乘上$2/R^2$，并对$r$由0到$R$积分，得

$$\frac{2}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\int_0^R ru\mathrm{d}r\right)+\frac{2}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}\int_0^R ru^2\mathrm{d}r\right)$$

$$+\frac{2}{R^2}(r\rho uv)\Big|_0^R=\bar{\rho}F_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{2\mu}{R^2}r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_0^R$$

由于$\rho=\bar{\rho}$，在前两项中可将密度从积分下移出。在进行求均值的运算后，在运动方程中出现新的平均量——均方根速度

$$\hat{u}(x,t)=\sqrt{\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi ru^2\mathrm{d}r} \qquad (2.2.18)$$

考虑到关于管壁摩擦的牛顿公式

$$\mu\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}=-\tau_\omega(x,t)$$

及附着条件$v(R)=u(R)=0$，利用定义(2.2.18)，得到以平均量表示的运动方程：

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}^2)}{\partial x}=\bar{\rho}F_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{2\tau_\omega(x,t)}{R} \qquad (2.1.19)$$

式中 $\tau_\omega(x,t)$——摩擦应力，亦即液路壁面单位面积上摩擦力的瞬时值。

为了从动量方程中消去两个平均速度$\tilde{u}$和$\hat{u}$，引入修正系数$\gamma$——考虑平均速度与均方根速度差别的动量修正[33]：

$$\hat{u}^2=\gamma\tilde{u}^2 \qquad (2.2.20)$$

式中 $\gamma(x,t)=\dfrac{1}{\tilde{u}^2\pi R^2}\displaystyle\int_0^R 2\pi ru^2\mathrm{d}r$



在文献[33]中，修正系数以差数的形式引入。考虑到这个因素，在表示式中令该系数等于$\gamma-1$。

利用定义(2.2.20)，从方程(2.2.19) 中减去预先乘上$\tilde{u}$的方程(2.2.17)，经变换后得到一维近似运动方程的最终形式

$$\bar{\rho}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\gamma\bar{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+(\gamma-1)\tilde{u}\frac{\partial\bar{\rho}\tilde{u}}{\partial x}+\bar{\rho}\tilde{u}^2\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$=\bar{\rho}F_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{2\tau_\omega(x,t)}{R} \qquad (2.2.21)$$

由于转换成平均速度和平均压力，从运动方程和连续方程中消去了径向速度分量$v$，但出现了新的变量——系数$\gamma(x,t)$及壁面摩擦应力$\tau_\omega(x,t)$，对于非稳态的层流运动，它们可由方程(2.2.11)和(2.2.12)求得。这样，弱压缩性滴状液体在圆柱形流路内的非稳态层流运动可以用含有六个变量$u,v,p=\bar{p},\tilde{u},r$和$\tau_\omega$的封闭方程组 (2.2.11)，(2.2.12)，(2.2.16)，(2.2.20)，(2.2.21)及关于摩擦的牛顿公式来确定。如果液体是可压缩的，那么还必须给方程组补充将密度$\bar{\rho}$同其它流动参数联系起来的关系式。

液体非稳态流动时的速度分布图及对应的壁面摩擦应力同稳态流动时的相应特性有显著差别（见2.7节，以及文献[6,7,26,35]）。$\gamma$和$\tau_\omega$随振荡频率而变化的关系或随液流参数变化梯度及其发展过程而变化的关系，就是这种差别的后果。在某些情况下，当低频振荡或液流参数的梯度不大时，速度分布图同稳态流动的差别不大，因而可采用准稳态近似，也就是说可将稳态流动的$\gamma$和$\tau_\omega$值代入非稳态运动方程(2.2.21)，该稳态流动的平均速度与它的瞬时值相等。但是当振荡频率很高或参数随时间变化的梯度很大时，如同后面将指出的那样，准稳态近似不能获得应力值的正确数据，也意味着不能获得液体流动的能量损耗值。为了获得足够精确的非稳态流动模型，必须考虑摩擦应力及其它等效特性

同频率以及参数随时间变化梯度之间的关系。

如果用摩擦阻力系数$\lambda$及速度头来表示摩擦应力，那么对于平均瞬时速度的运动方程(2.2.21)的分析将更方便。通常对圆柱形流路内任一流动状态可采用关系式$\tau_\omega = \lambda\bar{\rho}\tilde{u}^2/8$，在层流的情况下，该式可变换为

$$\tau_\omega = 4\mu\tilde{u}/R$$

如果采用系数$\lambda$，则方程(2.2.21)具有下列形式：

$$\bar{\rho}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\gamma\bar{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+(\gamma-1)\tilde{u}\frac{\partial\bar{\rho}\tilde{u}}{\partial x}+\bar{\rho}\tilde{u}^2\frac{\partial\gamma}{\partial x}$$

$$=\bar{\rho}F_x-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{\lambda}{4R}\rho\tilde{u}|\tilde{u}| \qquad (2.2.22)$$

用乘积$\tilde{u}|\tilde{u}|$来代替$\tilde{u}^2$项，这样可考虑液体在流路中的运动方向。在非稳态流动中，$\lambda$值同摩擦应力值$\tau_\omega$一样，取决于频率或参数随时间变化的梯度。但是在多数情况下，对液体在流路内流动情况的动力学分析只限于简化了的研究[4,7,28,35]——采用具有稳态值的$\gamma$和$\lambda$的一维流动模型。这时取$\gamma=1$(更严格些[33]——紊流取$\gamma\approx1.03$，层流取$\gamma=1.33$)。这时方程(2.2.22)简化为

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\lambda}{4R}\rho u|u| \qquad (2.2.23)$$

式中 $\lambda=8\tau_\omega/(\rho u^2)$——稳态状况下的阻力系数。

此处及以后，在不会引起误解的情况下，将省略去液流参数的取平均值符号。

由于对包含非线性对流项的原始动量方程(2.2.15)进行了简化，得到一维流动方程(2.2.23)，在该方程中含有考虑摩擦应力与速度的平方关系的非线性项。原始方程(2.2.15)只用来描述层流，而简化方程(2.2.23)既适合于层流，也适合于紊流，它的主要优点也就在于这里。为了用方程(2.2.23)来描述有$\lambda-1/u$关



系的层流，必须用线性项替换方程中的非线性项。对于紊流，$\lambda$与雷诺数$Re$的关系较弱(0.25次方)，也意味着与平均速度的关系较弱，因此，保留非线性项。

前已指出，在非稳态流动中，当速度分布图变化时，$\gamma$、$\tau_\omega$，因而以及$\lambda$都在改变。所以$\lambda=$const的假设是不够准确的。很遗憾，目前还没有简单的、适合于工程计算的、非一维非稳态紊流计算方法。同时，试验表明(见2.7节，以及文献[6])，在很多情况下，一维流动方程能相当满意地描述流路中的非稳态流动。因此本章以后将采用简化的一维非稳态流动方程(2.2.16)和(2.2.23)，假设可使用系数$\lambda$的准稳态值。

### 2.2.4 线性化方程

为了在液体火箭发动机的动力学和调节方面解更宽范围的问题，完全可以采取线性化的方法来简化方程，用参数的平均稳态值与参数变化量之和来代替各变量。将可压缩液体一维等温流动方程(2.2.16)和(2.2.23)线性化，去掉平均值符号，考虑各平均量的(2.2.16)和(2.2.23)方程，得

$$\frac{\partial\delta p'}{\partial t}+u\frac{\partial\delta p'}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial\delta u'}{\partial x}+\left(\delta u'-\frac{u\delta p'}{\rho a^2}\right)\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad (2.2.24)$$

$$\frac{\partial\delta u'}{\partial t}+u\frac{\partial\delta u'}{\partial x}-\delta F_x'+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\delta p'}{\partial x}+\frac{\lambda}{2R}u\delta u'$$

$$-\frac{1}{\rho^2a^2}(\delta p'+\rho u\delta u')\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad (2.2.25)$$

式中 $\delta p',\delta u',\delta F_x'$——压力、速度和质量力轴向分量的有量纲变化量。

为了将方程中可舍弃的微量项分出来，以得到无量纲形式的方程(2.2.24)和(2.2.25)，需引入无量纲变化量

$\delta p = \delta p' / p_0$；$\delta u = \delta u' / u_0$；

$\delta F_x = \delta F'_x / F_x$；$\bar{p} = p / p_0$；$\bar{\rho} = \rho / \rho_0$；

$\bar{u} = u / u_0$；$x = L\bar{x}$；$t = (L/a)\bar{t}$，

式中 $p_0$，$u_0$——流路内压力和速度的稳态值；

$L$——流路长度；

$F_x$——质量力轴向分量的稳态值。

将方程(2.2.24)和(2.2.25)变换成无量纲形式后，得

$$\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{t}} + Ma\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}a\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{x}} + Ma_0\left(\delta u - \frac{Ma}{a\bar{\rho}}\delta p\right)\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{2.2.26}$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{t}} + Ma\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{x}} - \frac{Ma_0}{F_r}\delta F_x + 2\frac{\Delta p_0}{p_0}\frac{\bar{u}}{a}\delta u + \frac{1}{a}\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{x}} - \frac{Ma_0}{a\bar{\rho}}\left(\frac{1}{a\bar{\rho}}\delta p + Ma\delta u\right)\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{2.2.27}$$

式中 $Ma = u/a$；$Ma_0 = u_0/a$；$F_r = u_0^2/(F_x L)$；$\alpha = \rho_0 u_0 a / p_0$；

$$\Delta p_0 = \lambda\frac{L}{2R}\frac{\rho_0 u_0^2}{2}$$

一般情况下，参数值$\bar{p}$，$\bar{u}$，$\bar{\rho}$，$M$沿着流路长度是变化的，即微分方程(2.2.26)和(2.2.27)具有变值系数。但是对于液体火箭发动机的流路，除了$\bar{p}$以外，所有参数的变化可以忽略。液路中压力变化可能很大，而$Ma$和$Ma_0$值很小，因此方程(2.2.26)和(2.2.27)的后面几项可忽略。对于气路，不总是符合条件$Ma \ll 1$，通常压力梯度$\partial p/\partial x$很小，可忽略，因而对它们又可略去这些项。考虑到这种情况，可以用下列简化了的线性化方程来描述液路中液体的非稳态流动(对于这些液路，认为$Ma \approx 0$；$\bar{u} = \bar{\rho} = 1$；$\partial \bar{p}/\partial \bar{x} = \delta F_x \approx 0$)：

$$\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{t}} + \alpha\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{2.2.28}$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{x}} + 2\frac{\Delta p_0}{p_0}\frac{1}{\alpha}\delta u = 0 \tag{2.2.29}$$



对于气路，摩擦损失通常不大，这样，对于圆柱形流路，在非稳态流动情况下，可认为$\partial \bar{p}/\partial \bar{x} \approx \Delta p_0/p_0 = 0$，而等温流动时$\bar{u} = \bar{\rho} = 1$。因而方程(2.2.26)和(2.2.27)有下列形式：

$$\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{t}} + Ma\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{x}} + \alpha\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{2.2.30}$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{t}} + Ma\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{2.2.31}$$

方程(2.2.28)～(2.2.31)是建立那些描述非稳态流动状态——工作介质的强迫振荡或过渡过程的液路和气路的线性数学模型的基础。

## 2.3 对强迫振荡的流体力学线性化方程求解

### 2.3.1 边界条件

前面所推导的流路数学模型方程为偏微分方程，为了对它求解必须确定初始条件和边界条件。初始条件决定了微分方程积分开始时刻系统（工作介质）的状态。边界条件则表征液体与外界环境（与流路管壁、与液体入口处和出口处的装置等）相互作用的条件。在简化的一维流动方程中（2.2.3节和2.2.4节）不需要流路壁面处的边界条件，因为它们已由方程中考虑液体对壁面的粘性摩擦力的那一项所代替。

当计算流路分段内的流动状态时必须知道流路分段的入口和出口条件，因为它们决定了相邻流路分段内或相连组件(泵、燃烧室、燃气发生器等)内的流动条件对液体在流路内的流动状态的影响，以及产生控制（干扰）作用的装置（调节器、节流装置、脉动器等）液流所发生的作用。本节只限于研究非稳态流中的一种特殊流动方式——具有稳定的强迫振荡的液体流动。这时不考

虑振荡发展的初期情况，即从周期性的干扰源作用开始到振荡的振幅和相位稳定为止（对给定频率）的过渡工况。

初始条件只对过渡工况有影响，而由于这里不研究过渡工况，故不使用初始条件。此外，还必须作出如下假设：流路分段入口处和出口处具有非一元流的流动变换区长度（即距流路分段边界上各装置的前后距离）只占流路分段长度的一小部分，因而此区对流路内液体动态特性的影响可忽略不计。

现利用前面所推导的具有集中参数元件的线性模型来研究液路分段几个典型边界条件的例子。从最简单的并经常遇到的元件——局部水力阻力开始。而且认为，阻力的流通截面积是可调节的。对于成滴液体（如果忽略它的惯性），通过局部阻力的流动参数的小偏差可用线性化关系式(2.1.16)联系起来，把它用作边界条件时变换成下列形式较方便：

$$\delta p_2 = -\frac{2(p_1-p_2)}{p_2}\delta G + \frac{2(p_1-p_2)}{p_2}\delta(\mu F) + \frac{p_1}{p_2}\delta p_1 \tag{2.3.1}$$

对于描述气体经过局部阻力的流动状态来说，如果可以忽略气体的压缩性，即经过阻力的狭窄截面的流速满足条件$M \ll 1$时，上列关系式也是适用的。

式（2.3.1）联系了4个变量。设局部阻力位于流路分段入口处，把变量$\delta p_2$和$\delta G$当作流路分段内的流动参数，而把参数$\delta(\mu F)$和$\delta p_1$当作外界干扰量。如果局部阻力位于流路分段出口处，则关系式(2.1.16)可推导成另一式子：

$$\delta p_1 = \frac{2(p_1-p_2)}{p_1}\delta G - \frac{2(p_1-p_2)}{p_1}\delta(\mu F) + \frac{p_2}{p_1}\delta p_2 \tag{2.3.2}$$

式中 $\delta p_1$、$\delta G$——流路分段内流动参数的变化量；

$\delta(\mu F)$、$\delta p_2$——外界干扰量的变化量。

应当注意，在入口边界条件（2.3.1）式和出口边界条件



(2.3.2)式中，流量变化量$\delta G$的系数具有不同的正负号。将流路中压力偏差与流量偏差联系起来的系数本身称作边界阻抗。流路分段入口处的边界阻抗必定是负值，因为，当保持变量$\delta(\mu F)=\delta p_1=0$时，流量的增加($\delta G>0$) 导致阻力后面的压力下降($\delta p_2<0$)。

通常，液路由某些局部阻力所划分成的许多分段组成。在这种情况下对每一流路分段边界处的阻力写出关系式（2.3.1)和式(2.3.2)，这时每一个关系式对这一段流路来说是入口条件，而对另一段流路来说则是出口条件。由许多流路分段组成的液路系统，其数学模型的建立方法将在第2.8和2.9节中进行论述。

现研究流路分段边界条件的另一个例子，即泵安装在流路入口或出口处的边界条件。舍弃泵内两项液体的惯性项后，就简化了泵线性化的压头特性（2.1.31）式。泵在流路分段入口处时可用下式表示：

$$\delta p_2 = \frac{\Delta p_H}{p_2}\psi_G\delta G + \frac{\Delta p_H}{p_2}\psi_n\delta n + \frac{p_1}{p_2}\delta p_1 \tag{2.3.3}$$

而泵在流路分段出口处时可用下式表示：

$$\delta p_1 = -\frac{\Delta p_H}{p_1}\psi_G\delta G - \frac{\Delta p_H}{p_1}\psi_n\delta n + \frac{p_2}{p_1}\delta p_2 \tag{2.3.4}$$

考虑了液体的惯性项后，可得出边界阻抗与频率的关系式。式(2.3.3) 和式 (2.3.4)中包含的泵压头-流量特性曲线的无量纲斜率$\psi_G$通常为负值，因为当通过泵的液体流量增加时泵产生的压头要下降。相应地泵在流路入口处的边界阻抗(像局部阻力一样)为负值，而在出口处则为正值。

将边界条件的关系式（2.3.1)～(2.3.4)相互进行比较，可以发现，它们都具有相同的表示形式。所以在建立强迫振荡流动的数学模型时，对安装在液路系统上的各装置及组件最好利用广义的边界条件表示式。考虑到在流体力学方程(见第2.2.4节）中使用了平均速度变化量$\delta u$，而对于成滴液体来说，无量纲的平均速

度变化量和流量变化量是相等的($\delta G=\delta u$)，对流路分段入口截面($\bar{x}=0$)就可用下式表示：

$$\delta p=\psi_1\delta u+\sum_{i=1}^{m}\gamma_{1i}\delta y_{1i} \tag{2.3.5}$$

而对出口截面($\bar{x}=1$)则为

$$\delta p=\psi_2\delta u+\sum_{j=1}^{n}\gamma_{2j}\delta y_{2j} \tag{2.3.6}$$

式中 $\psi_1$、$\psi_2$——流道分段入口处($\bar{x}=0$)和出口处($\bar{x}=1$)装置的边界阻抗(无量纲阻力)；

$\gamma_{1i}$、$\gamma_{2j}$——来自入口和出口方面第$i$和$j$项干扰量的放大系数；

$\delta y_{1i}$、$\delta y_{2j}$——来自流路分段入口和出口方面干扰量（参数）的无量纲变化量。

上列流路分段边界条件的例子都是最简单的。在许多情况下边界阻抗和放大系数不一定纯粹是有功分量(如前面所研究的)，也可以包含无功分量，而且两个分量都可能取决于频率。如果流容位于流路分段的边界上或在泵的压头特性中必须考虑惯性项等等就会出现上述情况。利用第2.1节所列的最简单的集中参数元件的方程，就可得出边界条件关系式，用以描述结构极不相同的装置内的流动。

从上列边界条件关系式可得到分析流路声学特性的各种特点时常用的极限情况下（声学上为流路开端和闭端的情况）的最简单的关系式。等式$\psi_1=0$就是流路开口始端的条件，即没有粘滞阻力（有功的或无功的)；而等式$\psi_2=0$则为开口终端的条件，即$p_1-p_2=0$。这个条件是理想化了的，特别对于有液体过流的流路来说，因为对它们来说始终具有与水力损失有关的有功分量，也具有被液体的附加质量所决定的无功分量。关于液体的虚拟质量问题只是对在声学上两端都是开端的无液体过流的流路进行了研究[30]。



对无液体过流流路的另一种极限情况即闭端是非常容易实现的，但对有液体过流的流路实现起来真的并不那么简单，在该流路的一端不能安置无孔的壁。对于有液体过流的流路，闭端条件$\delta G=\delta u=0$严格地说是实现不了的，因为在所取的边界条件表示式（2.3.5）和式（2.3.6)中，此条件对应为$\psi_1\to\infty$，或$\psi_2\to\infty$。这时对于从具有闭端流路方面作用的外界干扰应当遵守条件$\gamma_{1i}/\psi_1\neq0$或$\gamma_{2j}/\psi_2\neq0$。

可以把安装在流路出口处的高压离心泵(无气蚀现象)作为一个系统范例，此系统的边界条件非常接近闭端的边界条件。在这种情况下按照式（2.3.4）$\psi_2=\Delta p_H/p_1$，这时$\Delta p_H\gg p_1$。对式（2.3.4）各项除以$\Delta p_H/p_1$，得

$$\frac{p_1}{\Delta p_H}\delta p_1=-\psi_G\delta G-\psi_n\delta n+\frac{p_2}{\Delta p_H}\delta p_2$$

当$p_1/\Delta p_H\approx0$及当没有外界干扰即当$\delta_n=0$时，上式得出$\delta G\approx0$即为闭端条件。

### 2.3.2 流路内液体的强迫振荡

在圆柱形流路内成滴粘性液流中一维流动时的小干扰传播用流体力学线性化方程（2.2.28）和（2.2.29）来描述。在液体火箭发动机流路中（燃烧室冷却套除外）壁面摩擦压力损失跟局部阻力损失（节流装置、阀、调节器、调整用节流圈等的损失）相比通常是很小的。故为了解方程简单起见，最好的办法是把方程（2.2.29）中带$\Delta p_0$的项舍弃掉，把流道壁面摩擦损失压降加到最邻近的局部损失压降上。

在进行强迫振荡分析时最好把干扰量以指数函数的形式$\delta y_i=\delta\bar{y}_i\exp(i\bar{\omega}\bar{t})$给出，

式中 $\delta\bar{y}_i$——第$i$个干扰量的幅值；

$\bar{\omega}$——强迫振荡无量纲角频率。

变化量（有量纲的或无量纲的）上面的短横表示强迫振荡下

的幅值。因为被求解的方程（2.2.28)和（2.2.29）以及边界条件式（2.3.5)和（2.3.6)都是线性方程，故求出的复数形式的解也将是指数函数形式，而（必要时）在求解的最后阶段把解的实数部分分出来。这种解的表示形式使用起来很方便，因为在动力学和调节等问题中它可用来确定系统的稳定性，用来确定对象的动态特性等。现只举出方程组（2.2.28)、(2.2.29)的一个周期特解，这个解有如下形式：

$$\delta p(\bar{x},\bar{\omega},\bar{t}) = \delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})\exp(i\bar{\omega}\bar{t})$$
$$\delta u(\bar{x},\bar{\omega},\bar{t}) = \delta\bar{u}(\bar{x},\bar{\omega})\exp(i\bar{\omega}\bar{t}) \qquad (2.3.7)$$

式中 $\delta\bar{p}$、$\delta\bar{u}$——压力和速度无量纲变化量的幅值(复数)；

$\bar{\omega}=\omega L/a$——无量纲角频率。

下面把方程组（2.2.28）和（2.2.29)简化为一个方程，首先对方程(2.2.29)沿$\bar{x}$求积分，并认为$\Delta p_0=0$，得

$$\delta p = -\alpha\int\frac{\partial\delta u}{\partial\bar{t}}\mathrm{d}\bar{x} \qquad (2.3.8)$$

把式（2.3.8）代入方程(2.2.28)，经变换后得

$$\frac{\partial^2\delta u}{\partial\bar{x}^2} - \frac{\partial^2\delta u}{\partial\bar{t}^2} = 0 \qquad (2.3.9)$$

以周期特解（2.3.7）代入求得的波动方程（2.3.9）和式(2.3.8)后，得到压力和速度变化幅值的方程

$$\bar{\omega}^2\delta\bar{u} + \frac{\mathrm{d}^2\delta\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{x}^2} = 0 \qquad (2.3.10)$$

$$\delta\bar{p} = -i\bar{\omega}\alpha\int\delta\bar{u}\mathrm{d}\bar{x} \qquad (2.3.11)$$

偏导数方程组(2.2.28)和(2.2.29)在代入周期特解后就简化为描述速度(或压力)振幅沿流路分段长度分布的常微分方程(2.3.10)。当给定频率$\bar{\omega}$时方程(2.3.10)就具有常系数。方程组(2.3.10)、(2.3.11)的解具有如下形式：



$$\delta\bar{p} = A\exp(q_1\bar{x}) + B\exp(q_2\bar{x})$$
$$\delta\bar{u} = C\exp(q_1\bar{x}) + D\exp(q_2\bar{x}) \qquad (2.3.12)$$

式中 $q_1$、$q_2$——特征方程的根；

$A$、$B$、$C$、$D$——任意常数。

上述两个解式(2.3.12)的特征方程之根是一致的，因为$\delta u$的原始波动方程(2.3.9)和$\delta p$的类似方程的形式是一致的，从原始方程组(2.2.28)、(2.2.29)消去变量$\delta u$之后，就可证实。相应地确定变量$\delta u$和$\delta p$的特征方程的形式也是一致的：

$$q^2 + \bar{\omega}^2 = 0$$

从特征方程可求出根

$$q_{1,2} = \pm i\bar{\omega} \qquad (2.3.13)$$

二阶的方程组(2.3.8)和(2.3.9)以及相应地它们的解应包含二个任意常数。在写出变化幅值的解(2.3.12)时引入4个常数，而这些解的常数之间的相互关系事先是不明确的。为了求出这个关系把考虑到解式(2.3.7)的解式(2.3.12)代入原始的连续方程(2.2.29)。经变换后求出

$$A = -\alpha C;\ B = \alpha D$$

并把解式(2.3.12)的第一式变为下式

$$\delta\bar{p} = -\alpha[C\exp(q_1\bar{x}) - D\exp(q_2\bar{x})] \qquad (2.3.14)$$

将解式(2.3.12)和(2.3.14)代入边界条件式(2.3.5)和(2.3.6)，就求出任意常数$C$和$D$，在解式(2.3.12)和(2.3.14)中利用常数$C$和$D$，最后得到以$\bar{x}$和频率$\bar{\omega}$为坐标函数的压力和速度振幅分布关系式

$$\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega}) = \frac{\alpha}{D}[(\alpha+\psi_1)\exp(-i\bar{\omega}\bar{x}) - (\alpha-\psi_1)\exp(i\bar{\omega}\bar{x})]$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}\gamma_{2j}\delta\bar{y}_{2j} - \frac{\alpha}{D}\{(\alpha+\psi_2)\exp[i\bar{\omega}(1-\bar{x})]$$
$$-(\alpha-\psi_2)\exp[-i\bar{\omega}(1-\bar{x})]\}\sum_{i=1}^{m}\gamma_{1i}\delta\bar{y}_{1i} \qquad (2.3.15)$$

$$\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{\omega})=\frac{1}{D}[(\alpha+\psi_1)\exp(-i\bar{\omega}\bar{x})+(\alpha-\psi_1)$$

$$\times\exp(i\bar{\omega}\bar{x})]\sum_{j=1}^{n}\gamma_{2j}\delta\bar{y}_{2j}-\frac{1}{D}\{(\alpha+\psi_2)\exp[i\bar{\omega}(1-\bar{x})]$$

$$+(\alpha-\psi_2)\exp[-i\bar{\omega}(1-\bar{x})]\}\sum_{i=1}^{m}\gamma_{1i}\delta\bar{y}_{1i} \qquad (2.3.16)$$

式中

$$D=(\alpha+\psi_1)(\alpha-\psi_2)\exp(-i\bar{\omega})-(\alpha-\psi_1)(\alpha+\psi_2)\exp(i\bar{\omega})$$

从关系式(2.3.15)和(2.3.16)看出，压力和速度振幅既与$\bar{\omega}$和$\bar{x}$有关，也与$\psi_1$、$\psi_2$、$\alpha$、$\gamma_{1i}$和$\gamma_{2i}$有关。一般情况下，$\psi_1$、$\psi_2$以及$\gamma_{1i}$、$\gamma_{2i}$都是与频率有关的复数。

### 2.3.3 强迫振荡各解式的简化

解式(2.3.15)和(2.3.16)描述了宽频率范围的压力和速度振幅的分布情况。用于低频时这些解式可以简化，只要把指数函数展开成级数：

$$\exp(\pm i\bar{\omega}\bar{x})=1\pm i\bar{\omega}\bar{x}-(\bar{\omega}\bar{x})^2/2+\cdots$$

这种简化的前提条件是与1相比时舍弃项是微小量。舍弃的最大项为$(\bar{\omega}\bar{x})^3/6$，这样当取$\bar{x}=1$，就可写出代替的前提条件$\bar{\omega}^3/6\ll 1$。当$\bar{\omega}<1$时，这是可满足的。将上列指数的近似式代入式(2.3.15)和(2.3.16)后，得流路出口处($\bar{x}=1$)无量纲压力变化幅值的近似关系式

$$\delta\bar{p}(1)=\frac{2\alpha\gamma_2[\psi_1(1-\bar{\omega}^2/2)-i\bar{\omega}\alpha]\delta\bar{y}_2-2\alpha\gamma_1\psi_2\delta\bar{y}_1}{2\alpha[\psi_1-\psi_2-(\psi_1-\psi_2)\bar{\omega}^2/2-i\bar{\omega}\alpha+i\bar{\omega}\psi_1\psi_2/\alpha]}$$

$$=\frac{\gamma_2[\psi_1(1-\tau_{\text{。}}\tau_{\text{и}}\omega^2/2)-i\omega\tau_{\text{и}}]\delta\bar{y}_2-\gamma_1\psi_2\delta\bar{y}_1}{\psi_1-\psi_2-(\psi_1-\psi_2)\tau_{\text{。}}\tau_{\text{и}}\omega^2/2+i\omega(\psi_1\psi_2\tau_{\text{。}}-\tau_{\text{и}})} \qquad (2.3.17)$$

进行变换时利用了如下很明显的关系式，它们与以前引入的



流容时间常数$\tau_{\text{。}}$和惯性时间常数$\tau_{\text{и}}$（见2.1节）这两个无量纲参数有关：

$$\alpha\bar{\omega}=\frac{\rho ua}{p}\frac{\omega L}{a}=\frac{\rho uL}{p}\omega=\tau_{\text{и}}\omega$$

$$\frac{\bar{\omega}}{\alpha}=\frac{p}{\rho ua}\frac{\omega L}{a}=\frac{pL}{\rho ua^2}\omega=\tau_{\text{。}}\omega \qquad (2.3.18)$$

$$\bar{\omega}^2=\left(\frac{\omega L}{a}\right)^2=\frac{\rho uL}{p}\frac{pL}{\rho ua^2}\omega^2=\tau_{\text{и}}\tau_{\text{。}}\omega^2$$

把$\bar{x}=0$或$\bar{x}=1$以及指数的级数代入后，即可得到流路分段入口和出口处液体速度(流量)无量纲变化幅值的近似关系式

$$\delta\bar{u}(0)=\frac{\gamma_2\delta\bar{y}_2-\gamma_1[1-\tau_{\text{и}}\tau_{\text{。}}\omega^2/2+i\omega\tau_{\text{。}}\psi_2]\delta\bar{y}_1}{\psi_1-\psi_2-(\psi_1-\psi_2)\tau_{\text{и}}\tau_{\text{。}}\omega^2/2+i\omega(\psi_1\psi_2\tau_{\text{。}}-\tau_{\text{и}})} \qquad (2.3.19)$$

$$\delta\bar{u}(1)=\frac{\gamma_2[1-\tau_{\text{и}}\tau_{\text{。}}\omega^2/2-i\omega\tau_{\text{。}}\psi_1]\delta\bar{y}_2-\gamma_1\delta\bar{y}_1}{\psi_1-\psi_2-(\psi_1-\psi_2)\tau_{\text{и}}\tau_{\text{。}}\omega^2/2+i\omega(\psi_1\psi_2\tau_{\text{。}}-\tau_{\text{и}})} \qquad (2.3.20)$$

所得公式可确定集中参数元件频率范围内的流路分段的数学模型。2.1.6节中用另一种方法得到了类似的模型。考虑到转换为频率范围时，对时间的一阶导数以系数$i\omega$代替，而对时间的二阶导数则以$\omega^2$代替，将方程(2.1.50)跟(2.3.17)进行比较，再将方程(2.1.51)跟(2.3.20)进行比较，就可以确信它们是等效的。按近似公式对$\bar{\omega}<1$的频段计算结果接近于试验数据(见图2.6)，这证明利用所得出的简化公式来描述液路动态特性是合理的。

## 2.4 液体在流路分段内的固有振荡频率

当分析调节对象动态特性时，成为其数学模型的一些方程采用了两种形式的解：对于强迫振荡，是给出系统频率特性的解；

对于自由振荡，是确定这个系统过渡过程的解。

外界干扰作用结束后，系统内就产生固有(自由)振荡，在采用(2.3.5)和(2.3.6)式边界条件时(这时它们也起着初始条件的作用)，对应有同样的关系式，即$\delta y_{11}=\delta y_{21}=0$。自由振荡以及首先是这些振荡的频率（所谓系统固有频率）对解释系统动态特性的各种特点是很重要的。

应当指出，对于守恒系统，即无能量损失的系统，自由振荡频率是可精确算出的。有液体过流的液路即使不考虑壁面摩擦损失，该系统也不是守恒的，因振荡能量经过流路分段的边界会被带走($\psi_i=0$或$\psi_i=\infty$这些不切实际的情况除外)。尽管系统是非守恒的，但和振动理论一样，也使用固有频率的概念，并认为这是复数。

当计算液体在流路分段内的自由振荡频率时，去解有初始和边界条件的原始方程组(2.2.28)和(2.2.29)是没有意义的。现只讨论利用解式(2.3.14)的情况，并认为固有振荡频率$\bar{\theta}=\bar{v}+i\bar{\omega}$为无量纲复数。这时在干扰作用结束后系统内发生的固有振荡频率$\bar{\theta}$既决定了振荡频率$\bar{\omega}$，也决定了振幅随时间变化的特征。如$\bar{v}<0$，则振荡衰减（系统是稳定的），如$\bar{v}>0$，则振荡不衰减(系统是不稳定的)。

把解写为如下形式：

$$\delta\bar{p}=-\alpha[C\exp(\bar{\theta}\bar{x})-D\exp(-\bar{\theta}\bar{x})] \qquad (2.4.1)$$

为消去常数$C$和$D$，引入波反射系数的概念。在式(2.3.15)和(2.3.16)以及式(2.4.1)中都包含有相应于波在两个方向传播——直射波和反射波的两个项（这个问题在下一节要做较为详细的分析)。相应地可把每一个参数的变化幅值分为两个分量，它们在指数函数的变量$\bar{x}$前有不同的正负号。考虑到式(2.3.12)和(2.3.14)的关系，可以列出流路分段出口截面($\bar{x}=1$)处各参数变化幅值的关系式

$$\delta\bar{p}(1)=\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1)+\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)$$



$$\delta\bar{u}(1)=\delta\bar{u}_{\text{пр}}(1)+\delta\bar{u}_{\text{отр}}(1)=\frac{1}{\alpha}[\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1)-\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)] \qquad (2.4.2)$$

式中 $\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1)$、$\delta\bar{u}_{\text{пр}}(1)$——到达流路出口截面处的压力和速度直射波的幅值；

$\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)$、$\delta\bar{u}_{\text{отр}}(1)$——流路出口截面处压力和速度反射波的幅值。

当没有外界干扰时流路分段出口处压力和速度变化幅值之间的关系只决定于边界阻抗$\psi_2=\delta\bar{p}(1)/\delta\bar{u}(1)$。利用这些情况之后，借助于式(2.4.2)可求出

$$\psi_2=\alpha\frac{\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1)+\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)}{\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1)-\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)}=\alpha\frac{1+\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)/\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1)}{1-\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)/\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1)} \qquad (2.4.3)$$

流路分段边界前，即流路内引起反射的不均质前压力反射波幅值与直射波幅值之比称为流路分段相应端压力波反射系数。对出口截面压力波反射系数为

$$P_{\text{p}2}=\delta\bar{p}_{\text{отр}}(1)/\delta\bar{p}_{\text{пр}}(1) \qquad (2.4.4)$$

对于表达式(2.4.4)所确定的反射系数可从解方程(2.4.3)后得出

$$P_{\text{p}2}=(\psi_2-\alpha)/(\psi_2+\alpha)=(\psi_2/\alpha-1)/(\psi_2/\alpha+1)$$
$$=(\bar{\psi}_2-1)/(\bar{\psi}_2+1) \qquad (2.4.5)$$

式中 $\bar{\psi}_2=\psi_2/\alpha$——流路分段出口截面的无量纲边界阻抗。

对流路的另一个入口截面($\bar{x}=0$)重复上述运算之后得

$$P_{\text{p}1}=(\psi_1+\alpha)/(\psi_1-\alpha)=(\bar{\psi}_1+1)/(\bar{\psi}_1-1) \qquad (2.4.6)$$

式中 $P_{\text{p}1}=\delta\bar{p}_{\text{отр}}(0)/\delta\bar{p}_{\text{пр}}(0)$——流路分段入口截面压力波反射系数；

$\bar{\psi}_1=\psi_1/\alpha$——流路分段入口截面的无量纲边界阻抗。

由式(2.4.5)和(2.4.6)看出，反射系数只取决于无量纲边界

阻抗。一般情况下，$\bar{\psi}_1$和$\bar{\psi}_2$，也意味着反射系数$P_{p1}$和$P_{p2}$是与频率有关的复数。

利用反射系数就能求得解式(2.4.1)中的常数$C$和$D$之值，它们决定了流路分段边界处实现条件的可能性。在解式(2.4.1)中对于出口截面来说，直射波由$D\exp(-\bar{\theta}\bar{x})$这一项来描述，而反射波则由$C\exp\bar{\theta}\bar{x}$这一项来描述。取$\bar{x}=1$，利用表征边界条件的反射系数可求出常数$C$和$D$之间的关系：

$$P_{p2}=-C\exp\bar{\theta}/[D\exp(-\bar{\theta})]=C\exp 2\bar{\theta}/D$$

另一方面，对于流路分段入口截面来说$C\exp\bar{\theta}\bar{x}$这一项描述直射波，而$D\exp(-\bar{\theta}\bar{x})$这一项则描述反射波。故当$\bar{x}=0$时$P_{p1}=-D/C$。从求$P_{p2}$和$P_{p1}$的等式中消去比值$C/D$，可得计算固有振荡频率大小的关系式：

$$P_{p1}P_{p2}=\exp 2\bar{\theta}$$

考虑到把反射系数与无量纲边界阻抗联系在一起的关系式(2.4.5)和(2.4.6,)可得

$$\exp 2\bar{\theta}=\frac{(1+\bar{\psi}_1)(1-\bar{\psi}_2)}{(1-\bar{\psi}_1)(1+\bar{\psi}_2)} \tag{2.4.7}$$

认为无量纲边界阻抗$\bar{\psi}_1$和$\bar{\psi}_2$是实数也是常数，并把方程式(2.4.7)左边部分分解为实部和虚部之后得

$$\exp 2\bar{\nu}\cos 2\bar{\omega}=\frac{(1+\bar{\psi}_1)(1-\bar{\psi}_2)}{(1-\bar{\psi}_1)(1+\bar{\psi}_2)} \tag{2.4.8}$$

$$\exp 2\bar{\nu}\sin 2\bar{\omega}=0 \tag{2.4.9}$$

由于$\exp 2\bar{\nu}\neq 0$，故频率的级数$\bar{\omega}=n\pi/2$ ($n=0,1,2,\cdots$) 满足方程(2.4.9)，但不是这个级数的所有各项都满足方程(2.4.8)。指数函数始终为正值，因此方程(2.4.8)中余弦的符号应与此方程右边部分的符号相一致。这时$n$为偶数时余弦符号为正号，而$n$为奇数时则为负号。根据上面所述，可写出确定流路分段内液柱纵向固有振荡频率的关系式[6]：



$$\bar{\omega}=n\pi/2\begin{cases}n=2,4,6,\cdots,\text{如}(1+\bar{\psi}_1)(1-\bar{\psi}_2)/\\ \quad/[(1-\bar{\psi}_1)(1+\bar{\psi}_2)]>0\\ n=1,3,5,\cdots,\text{如}(1+\bar{\psi}_1)(1-\bar{\psi}_2)/\\ \quad/[(1-\bar{\psi}_1)(1+\bar{\psi}_2)]<0\end{cases} \tag{2.4.10}$$

由于在按式(2.4.10)计算的固有振荡频率中，余弦的模量等于1，故利用方程(2.4.8)就可得出阻尼系数$\bar{\nu}$的关系式：

$$\bar{\nu}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\bar{\psi}_1)(1-\bar{\psi}_2)}{(1-\bar{\psi}_1)(1+\bar{\psi}_2)}\right| \tag{2.4.11}$$

对于方程组(2.4.8)和(2.4.9)，当综合参数$(1+\bar{\psi}_1)(1-\bar{\psi}_1)=0$时，方程组就没有解，这就意味着流路分段内的液柱没有固有振荡。这个综合参数可以求出使流路内液体的固有振荡频率会发生跃变的$\psi_1$或$\psi_2$值。这里可以采用与声学中引入的关于流路开端和闭端类似的概念。这时对于流路内不动的液柱来说，无局部阻力地与外界介质连接的那一端认为是开端，该端的边界阻抗等于零。另一种极限情况，流路一端用无孔刚性隔板截断，它的边界阻抗等于无限大（没有速度振荡）。当液体从开端过渡到闭端时，流路内液体的固有振荡频率发生跃变。

如果$Ma\ll 1$，流路内不动液体按声学取得的固有振荡频率值与用式(2.4.10)算出的值是一致的。因此把声学条件类推到有流体过流的流路端，当满足不等式$|\bar{\psi}_1|<1$时，可以称为流路的声学开端条件，而当$|\bar{\psi}_1|>1$时则称为流路的声学闭端条件。

从不等式(2.4.10)看出，固有振荡频率值与$\bar{\psi}_1$和$\bar{\psi}_2$的组合值有关。如果两个无量纲边界阻抗的模量同时小于1或大于1，即流路有对称的边界条件，那么流路内液体的固有振荡频率等于$n\pi$($n=1,2,3\cdots$)。如果边界条件是不对称的，即一个无量纲边界阻抗（按模量）大于1，而另一个小于1，那么流路内液体的固有振荡频率等于$n\pi/2$($n=1,2,3\cdots$)。这种情况下应注意到：通常为$\psi_1\leqslant 0$，而$\psi_2\geqslant 0$。图2.7在无量纲边界阻抗平面上给出了对应于

液体固有振荡各种频率的范围。

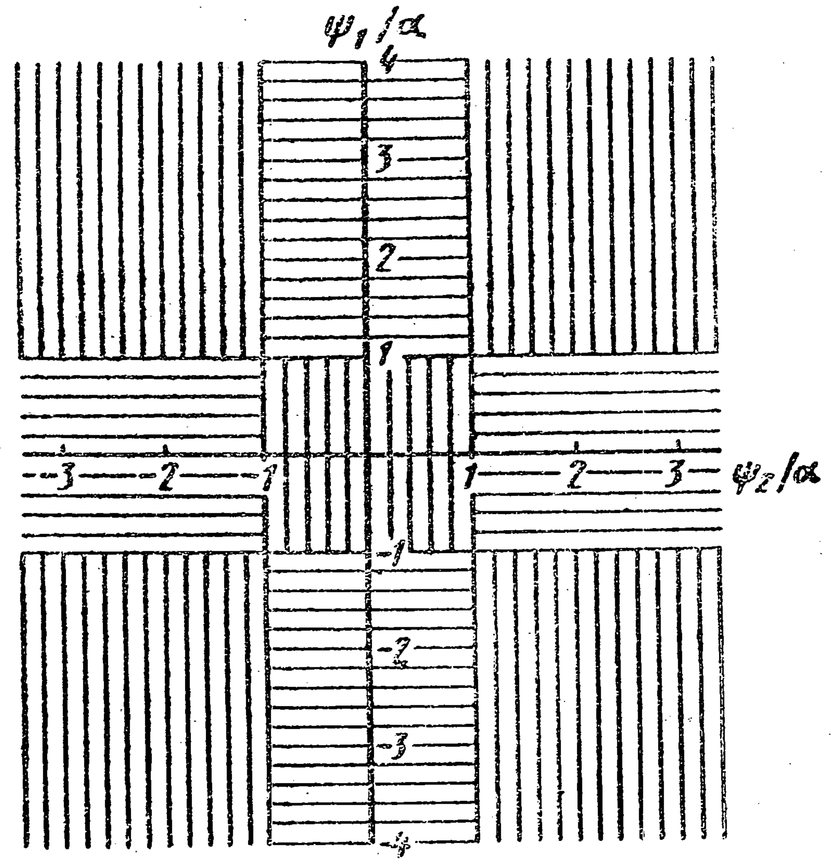



图2.7 流路内液体固有振荡在$\psi_1/\alpha$和$\psi_2/\alpha$平面上的各种频率范围

|||—$\bar{\omega}=\pi n(n=1,2,3,\cdots)$；

二—$\bar{\omega}=(2n+1)\pi/2(n=0,1,2,3)$

这样，流路分段两端的条件单值地确定了一组固有振荡的频率，流路内液体可能按这些频率作自由纵向振荡。数值$n$决定振荡的阶次：$n=1$——一阶振荡$n=2$——二阶振荡等等。利用解式(2.4.1)和反射系数公式(2.4.5)可得出计算沿流路长度液体压力自由振荡幅值分布的关系式(振荡公式)：

$$\delta\bar{p}=-\alpha C\{\exp(\bar{\theta}\bar{x})-[(1+\bar{\psi}_1)/(1-\bar{\psi}_1)]\exp(-\bar{\theta}\bar{x})\} \tag{2.4.12}$$

常数$C$可不必求出，因为它对幅值沿长度的分布特性没有影响，此分布特性只取决于式(2.4.12)中大括号内的各项。一般情况下对于有液体过流的流路固有振荡的频率是一个复数，它的实部考虑了(在稳定系统中)振荡能量经流路边界带走的情况。把复数$\bar{\theta}$代入式(2.4.12)，导出烦冗而又不够直观的式子。因此研究边界阻抗极限的情况$\psi_i=0$或$\psi_i=\infty$是比较合适的，在此情况下根据式(2.4.11)$\bar{\nu}=0$，即固有振荡频率是一个虚数。取$\bar{\psi}_1=\bar{\psi}_2=0$，并相应地取$\bar{\nu}=0,\bar{\omega}=n\pi$，由式(2.4.12)得



$$\delta\bar{p}/(\alpha C)=\exp(in\pi\bar{x})-\exp(-in\pi\bar{x})=i2\sin(n\pi\bar{x}) \tag{2.4.13}$$

式中 $i=\sqrt{-1}$。

如果对速度变化幅值(2.3.12)的解也进行相似的变换，则在同样的边界条件下得到

$$\delta\bar{u}/C=\exp(in\pi\bar{x})+\exp(-in\pi\bar{x})=2\cos(n\pi\bar{x}) \tag{2.4.14}$$

从式(2.4.13)和(2.4.14)可知，压力和速度的振幅沿着流路是按谐波定律变化的，而且在所取的边界条件下发生的波是驻波，因为它们的幅值只与坐标有关，而各点的参数振荡都发生在同一相位内。振幅始终是常数，因为$\bar{\nu}=0$。压力波节(最小幅值)位于端面处，波腹(最大幅值)位于流路中点。对速度来说，则恰恰相反，波腹位于流路的两端，因为按公式(2.4.13)和(2.4.14)压力和速度振荡的相移为$\pi/2$。当边界阻抗在非极限值的其它情况下，振荡的形状比较复杂，因为在波中既有驻波分量，也有行波分量，自由振荡的幅值也随着时间变化($\bar{\nu}\neq 0$)。

## 2.5 过渡过程

### 2.5.1 由集中参数元件组成的流路

过渡过程就是参数随时间的变化过程，它是系统对外界干扰的响应，一般情况下外界干扰具有很不相同的特性。在自动调节原理中通常只限于研究阶跃函数类型的最简单的干扰，并按照系统对这种干扰的响应，即按照过渡过程的类型来评估系统的动态特性。

过渡过程的解题方法很大程度上取决于包含在系统数学模型中的微分方程类型。首先着重研究比较简单的一种情况，就是把研究对象看作具有集中参数的系统，也就是可用常微分方程来描

述。现以流路的微分方程(2.1.50)作为一个例子，并认为在$t=0$的时刻干扰以压力阶跃变化$\delta p_{вх}$的方式作用于入口处，而在流路出口处则保持条件$\delta p_{вых}=0$。

把方程(2.1.50)表示为振荡元件的一般形式：

$$\frac{d^2\delta p_2}{dt^2}+2n\frac{d\delta p_2}{dt}+q^2\delta p_2=a\delta p_{вх} \qquad (2.5.1)$$

式中 $2n=\dfrac{2(\tau_и-\tau_e\psi_1\psi_2)}{\tau_e\tau_и(\psi_2-\psi_1)}$

$$q^2=\frac{2}{\tau_e\tau_и}$$

$$a=\frac{2\gamma_1\psi_2}{\tau_e\tau_и(\psi_2-\psi_1)}$$

以$t=0$时的如下初始条件解方程(2.5.1)：

$$\delta p_2=\frac{d\delta p_2}{dt}=0 \qquad (2.5.2)$$

对方程式(2.5.1)引入一个新的变量

$$y=\delta p_2-\frac{a}{q^2}\delta p_{вх}$$

得通解

$$\delta p_2=Ae^{-nt}\cos(q_1t+\varphi_0)+\frac{a}{q^2}\delta p_{вх} \qquad (2.5.3)$$

式中 $q_1$——特征方程$q_1=\sqrt{q^2-n}$（对$q>n$的情况）复数根的虚数分量。

把解式(2.5.3)代入初始条件后，得自由振荡的幅值$A$及相位值$\varphi_0$：

$$A=-\frac{a}{q^2\cos\varphi_0}\delta p_{вх};\quad \operatorname{arctg}\varphi_0=\frac{n}{q_1}$$

图2.8列出了当$q=1$时用方程(2.5.1)描述的振荡元件在不同的$n$



值下的过渡过程曲线。

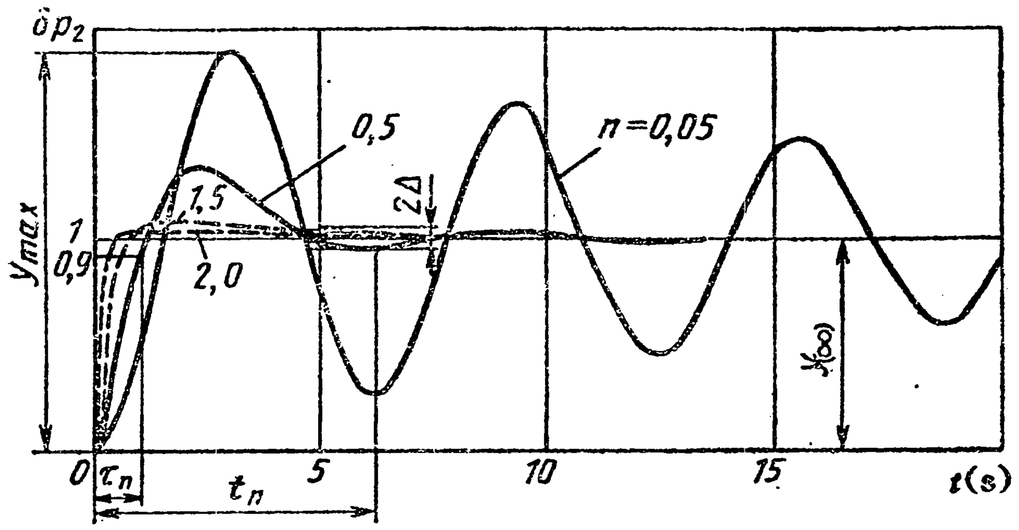



图2.8 当$q=1$时振荡元件在不同$n$值下的过渡过程曲线
——按式(2.5.3)计算的曲线；
-----按式(2.5.4)计算的曲线。

随着比值$n/q$接近1，振荡衰减速度加快。当$n/q\geqslant 1$时解式(2.5.3)就不适用，因为特性方程的根变了，它们变为负实数：

$$n_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-q^2}$$

因此解式写成下式：

$$\delta p_2=C_1e^{n_1t}+C_2e^{n_2t}+\frac{a}{q^2}\delta p_{вх} \qquad (2.5.4)$$

把解式(2.5.4)代入边界条件(2.5.2)求得常数

$$C_1=\frac{an_1}{q^2(n_2-n_1)}\delta p_{вх}$$

$$C_2=-\frac{an_2}{q^2(n_2-n_1)}\delta p_{вх}$$

为了进行比较，图2.8列出了按公式(2.5.4)计算的在各种$n$值下的曲线。用式(2.5.4)获得的曲线与按式(2.5.3)算出的曲线就其特征而言是不同的——振荡消失了，参数随时间的变化变得平缓。

用描述系统的微分方程的分析解来建立过渡过程的曲线是个别的，也是很少遇到的情况。关于比较复杂的微分方程就要借助于拉普拉斯或卡森-海维赛德变换法以及借助于实部频率特性等方法来求过渡过程。计算时广泛利用计算机——数字的或模拟

的[5]。

借助于图2.8所列的曲线，可对作为动态系统(包括调节系统）对象的过渡过程的某些特性进行分析[5]。在过渡过程振荡特性的情况下，过调量是其主要特性之一。过调量就是被调量或任何一个指定的量$y_{max}$(见图2.8）高出过渡过程结束后这一个量的稳定值$y(\infty)$的超出量。

通常在$y(\infty)\neq 0$时过调量是按下式以百分比来评估

$$\sigma=\frac{y_{max}-y(\infty)}{y(\infty)}\times 100 \qquad (2.5.5)$$

过调量在一定程度上表征了系统对振荡的倾向性，因而也表征了系统稳定性的余量。从强度、安全性等观点出发对每一个系统都应规定一个允许的过调量。

系统的作动快速性由过渡过程的持续时间$t_{П}$来决定，也即决定于从施加干扰瞬间算起到参数与稳定值$y(\infty)$之间的偏差小于预先规定的误差$\Delta$时的时间(见图2.8)：

$$|y(t)-y(\infty)|=\Delta$$

有时除过调量$\sigma$外，计算时要利用过渡过程时间内允许的振动次数。此外，也可给定过渡过程的特征时间$\tau_{П}$，也即输出量达到新稳态值$y(\infty)$50%、90%所需的时间(从施加阶跃式输入量的瞬间算起）可以用参数随时间变化的范围来规定，它不应超出此规定范围等等。

### 2.5.2 由分布参数元件组成的流路

在液体火箭发动机系统图上包含有许多各种长度的液路。其中还必须包括发动机与贮箱相连的流路，它的长度可以相当长。当分析液体火箭发动的过渡过程时，必须解决应当把哪些流路视作具有集中参数的系统，把哪些流路视作具有分布参数的系统的问题。是否要考虑波动过程，即考虑干扰沿流路传输的结束时间，取决于引起过渡过程的干扰发展的特征时间$\tau_{B}$和干扰沿流路



长度传输时间$L/a$之间的关系，其中$L$——流路长度；$a$——声速。如$\tau_{B}\gg L/a$，则波动过程可以不考虑，如这两个特征时间是可以比量的，则过渡过程非考虑不可。

当系统相当复杂，并由具有各种时间常数的组件组成（液体火箭发动机即属于这类系统)，在计算过渡过程的特征时间时，除$\tau_{B}$外，还必须考虑整个对象的过渡过程时间$\tau_{П}$(见图2.8)。若$\tau_{П}>\tau_{B}$(这在阶跃式干扰下常会发生)，这时在选择对象元件的模型时要采用时间$\tau_{П}$作为特征时间。

液路内由于液流工况发生急剧变化而引起的过渡过程与出现以下一些特点有关：当液体急剧减速时流路内压力大大增高（所谓水击)，反之，当液流加速时压力大大降低。当压力降低时有可能出现局部沸腾，液柱断裂——气蚀。在入口流路内，气蚀可能首先出现在泵入口处。泵入口处的气蚀可导致泵所产生的压头发生变化，从而也会引起各组件以及整台发动机的工作状态发生变化——燃气发生器内的温度升高，推力下降等。

视作具有分布参数系统的流路可以有许多计算方法[6]：达伦贝尔经典法、积分变换法(包括拉普拉斯运算法)、图解法和数值法。如果只研究液体在流路内非稳态流的一维模型，则特征线法是计算过渡过程的最方便最简单的方法之一。

液体的一维流方程归属于双曲线类型的方程，其特点是在坐标-时间区域内存在着二个实频率特征线族，在这些特征线上可用压力和速度（流量)的常微分方程来代替偏导数方程(2.2.16）和(2.2.23)[6,33]。当$Ma\ll 1$时，两个特征线族的方程如下式：

$$\mathrm{d}x-a\mathrm{d}t=0;\ \mathrm{d}x+a\mathrm{d}t=0 \qquad (2.5.6)$$

而各流动参数在特征线上的微分方程为

$$\mathrm{d}p+\rho a\mathrm{d}u+\lambda\rho\mathrm{d}u|u|/(4R)=0 \qquad (2.5.7)$$

$$\mathrm{d}p-\rho a\mathrm{d}u+\lambda\rho\mathrm{d}u|u|/(4R)=0 \qquad (2.5.8)$$

沿特征线$C^{+}$解方程(2.5.7)(图2.9(a))，而沿特征线$C^{-}$解方

程(2.5.8)。在$a=\text{const}$的个别情况下，按照式（2.5.6）方程(2.5.7)和(2.5.8)的解有着直线方程的类型(以图2.9(a)为图例)

$$x_A - at_A = x_B - at_B$$

$$x_D + at_D = x_B + at_B$$

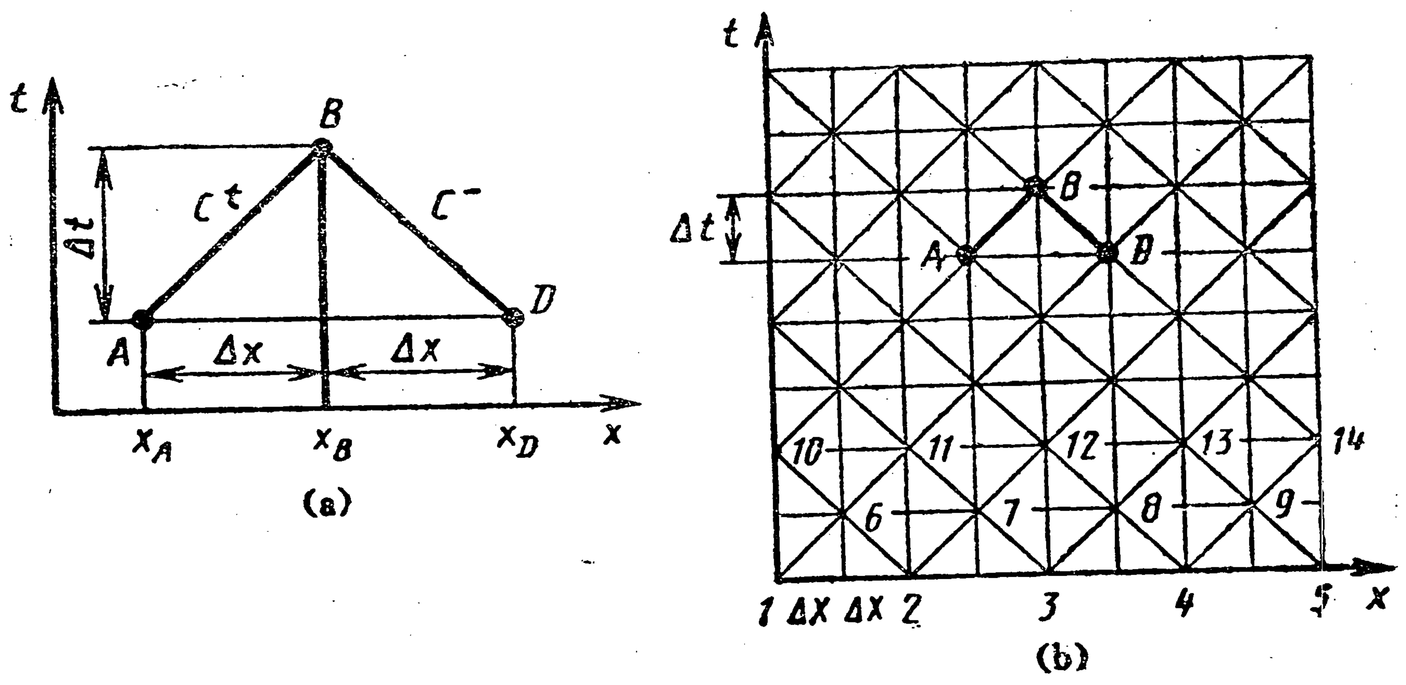



图2.9 特征线及其网格

（a）两个双曲线方程的特征线；

（b）这些特征线的网格。

式中下标A、B、D表示对应于图2.9(a)上点$A$、$B$、$D$的参数。给定步长$\Delta x$或$\Delta t$，且按声速$a$求出特征线倾角，在$xt$平面(图2.9(b))的特征线网格上对流路的微分方程组（2.5.7）和（2.5.8）进行求解。

利用特征线法对微分方程(2 5.7)和(2.5.8)进行数值积分的原理在于：它们与一阶有限差代数方程相近似。尤其是对于图2.9(a)所示的由点$A$和$D$与$B$点相连接在一起的特征线$C^+$和$C^-$来说，根据方程(2.5.7)和(2.5.8)可以写成有量纲参数变化量

$$\delta p'_B - \delta p'_A + \rho a(\delta u'_B - \delta u'_A) + \lambda \rho u \delta u'_A (x_B - x_A)/(4R) = 0 \tag{2.5.9}$$



$$-(\delta p'_B - \delta p'_D) + \rho a(\delta u'_B - \delta u'_D) + \lambda \rho u \delta u'_A (x_B - x_D)/(4R) = 0 \tag{2.5.10}$$

式中 $\delta p'_i$、$\delta u'_i$——液体压力和速度的变化量；

$x_i$——特征线上点的坐标。

对上面所研究的准稳态近似方程在层流情况下摩擦阻力系数为$\lambda = 64/Re$，在紊流情况下（按布拉西乌斯公式）$\lambda = 0.316/Re^{0.25}$，式中$Re$——以平均速度$u$表示的雷诺数。当系数$\lambda$取决于流动状态的变化过程这种比较复杂的情况将在2.7节中进行研究。

方程（2.5.9)和(2.5.10)是已线性化了的方程，虽然不同于其它方法，特征线法用来解非线性问题不会有特别困难。

当已知$\delta p'_A$、$\delta p'_D$、$\delta u'_A$和$\delta u'_D$诸值时，方程(2.5.9)和(2.5.10)可求出$\delta p'_B$和$\delta u'_B$之值。在计算过渡过程时把流路划分为偶数($n$)节，并以$x$坐标轴的步长$\Delta x = L/n$和$t$坐标轴的步长$\Delta t = \Delta x/a$建立网格。利用方程(2.5.9)和(2.5.10)，对特征线(斜线，见图2.9(b))的所有交叉点进行计算，而在流路分段的边界处则对特征线同垂直线的交叉点进行计算。分段的边界交叉点位于距离为$2\Delta t$处。相对于特征线交叉点$B$处的流动参数的偏差解方程（2.5.9）和（2.5.10）后，可得

$$\delta p'_B = 0.5[\delta p'_A - \delta p'_D + \rho a(\delta u'_A - \delta u'_D) + \lambda \rho u(\delta u'_A - \delta u'_D)\Delta x/(4R)]$$

$$\delta u'_B = \delta u'_A - [\delta p'_B - \delta p'_A - \lambda \rho u \delta u'_A \Delta x/(4R)]/(\rho a)$$

如声速沿着流路长度是在变化的，那么对方程（2.5.6）积分后得含有积分的关系式，利用此式可求出网格在$x$轴和$t$轴上步长之间的关系：

$$\Delta t_i = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} \frac{dx}{a(x)} \tag{2.5.11}$$

计算时比较方便的是把时间步长取为定值$\Delta t_i = \Delta t$，而长度步长$\Delta x_i$则由方程(2.5.11)来确定。步长$\Delta t$之所以不变决定于必须满足流路两端的边界条件。这时可出现这样的情况，即在流路两

端网格沿$x$轴的分段边界可能与流路边界不吻合。这种情况下，或者应稍微修改流路长度，或稍许改变声速，或者采用插值法。

为解网格所有各节点(见图2.9(b))的代数方程组(2.5.9)和(2.5.10)必须给出$t\leqslant 0$时的初始条件

$$\delta p'(x)=f_1(x);\delta u'(x)=f_2(x) \tag{2.5.12}$$

和$t>0$时的边界条件(写出后暂时不用线性化)

$$\begin{aligned} x&=0;u=F_1(p,p_1,t)\\ x&=L;u=F_2(p,p_2,t)\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

式中 $f_1$、$f_2$、$F_1$、$F_2$——已知函数；

$p_1$、$p_2$——位于流路分段边界上装置前后的压力。

初始条件(2.5.12)决定了$t\leqslant 0$时位于$x$轴上的网格节点1，…，5(见图2.9(b))的压力和速度偏差。边界条件方程(2.5.13)要与式(2.5.9)或式(2.5.6)联合求解。例如，对特征线网格节点10处流路起点来说，流动参数是由根据方程(2.5.10)和方程(2.5.13)第一式得出的关系式来计算的

$$\delta p'_{10}-\delta p'_6-\rho a(\delta u'_{10}-\delta u'_6)-\lambda\rho u\delta u'_6\Delta x/(4R)=0$$

$$\delta u'_{10}=F_0(\delta p'_{10},\delta p'_1,2\Delta t)$$

下标6和10对应于网格节点号。函数$F_0$的类型由流路分段入口处装置的型式和特性来确定。压力偏差$\delta p'_{10}$取决于入口处装置的边界阻抗，$\delta p'_1$由装置前的条件来确定，尤其是，可以由相邻流路分段特征线的关系式来确定，或按一定的规律变化(如当程序控制时)，或等于零(贮箱中，容器中等)。对网格的其它节点可列出流路分段始端和其末端截面的类似条件。

图2.10列出了充满粘性液体(润滑油)的长流路($L=36$m)在出口处阀门迅速关闭后按公式(2.5.9)和(2.5.10)计算的过渡过程曲线。压力偏差$\delta p'$统一除以液柱突然滞止时产生的水击压力增量$\Delta p=\rho au$[33]。振荡频率取决于扰动沿流路长度行进的时间$L/a$，压力升高值在数值上与突然滞止时压力增量是相吻合的。准稳态流对振幅减小的速度有影响，但振荡的形状随着时间是不变



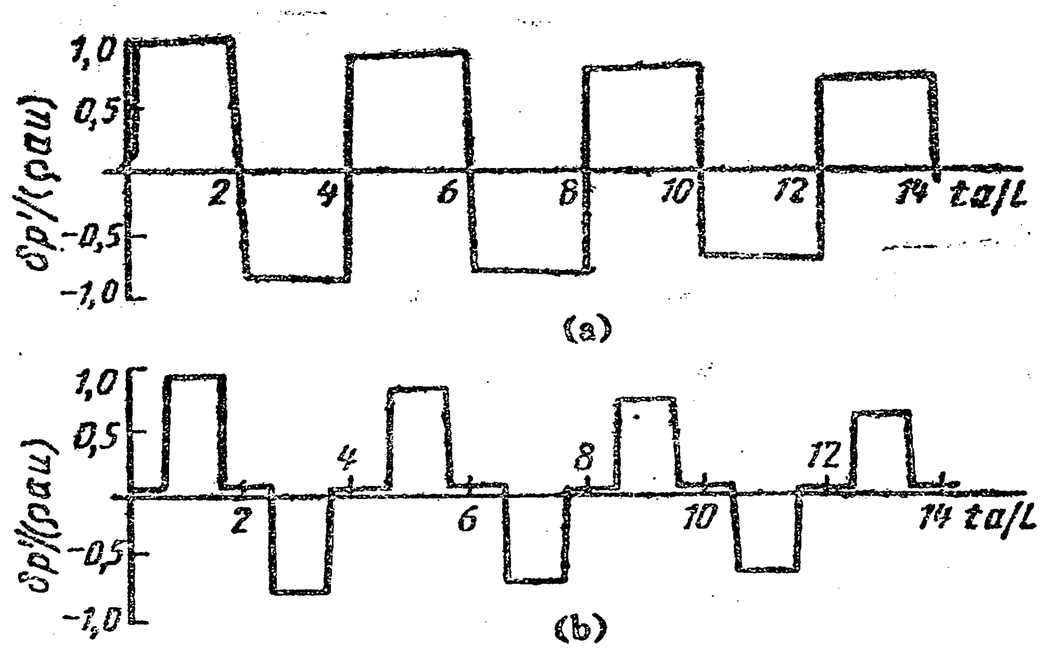



图2.10 阀迅速关闭后过渡过程的计算曲线

(a) 流路出口处； (b) 流路中点处。

的，因为全部压力偏差的谐波是同样衰减的。关于过渡过程振荡衰减的问题将在2.7.3节中进行比较详细的研究。

## 2.6 过流流路频率特性曲线的特点

所研究系统的动态特性一方面决定了2.5节所描述的过渡过程的曲线，而另一方面决定了频率特性曲线。特别是频率特性曲线可提供很多信息。有两种表示频率特性曲线的方法：一种以单独的幅频特性曲线和相频特性曲线的方式表示，另一种在复数域以同时兼有幅相频率特性曲线的方式表示，对于后者矢径决定相对幅值，而其转角决定强迫振荡的相位。

幅频特性曲线决定了系统指定点上给定参数的振幅与干扰作用幅值之比的模数，而相频特性曲线则决定了所研究参数的振荡与干扰作用振荡之间的相位差。在线性系统的情况下，幅频特性曲线和相频特性曲线与干扰幅值的绝对值无关(如果干扰幅值足够小的话)。

系统的频率特性曲线有两种形式：一种是频率传递函数，它使表征系统内过程的参数振荡与其入口处参数振荡(干扰作用)联

系在一起；另一种是入口阻力，它使系统入口处压力偏差与速度(流量偏差)联系在一起。传递函数表征了所研究的系统内强迫振荡的传播特性：幅频特性曲线上的频率和谐振峰值(如果它们有的话)及谷值的高度，通过频率的范围，相位差等。一个系统可以有许多传递函数，它们由于干扰(压力或速度的变化)的进入位置和种类不同而有所不同，以及由于参数种类及其计算或测量的截面不同而有所不同。

对任一指定为入口的截面，可确定系统入口阻力，它表征此系统(系统的一部分)作为与其对接的另一系统(系统的另一部分)的负载。例如，当计算安装在某一系统入口处的流路分段的传递函数时，必须知道此分段出口处包含在式(2.3.15)和(2.3.16)中的边界阻抗$\psi_2$，这时就把流路出口处的系统入口阻力作为边界阻抗。

现利用式(2.3.15)和(2.3.16)来求液路分段的入口阻抗。设干扰仅从入口方向进入，即$\delta\bar{y}_{1j}=0$，且流路参数$\psi_2$和$\alpha$是给定的，考虑上述假定，取$\bar{x}=0$，把式(2.3.15)的第二项除以式(2.3.14)的第二项后得流路分段入口阻力

$$z_1=\frac{\delta\bar{p}(0,\varpi)}{\delta\bar{u}(0,\varpi)}$$

$$=\frac{\alpha[(\alpha+\psi_2)\exp(i\varpi)-(\alpha-\psi_2)\exp(-i\varpi)]}{(\alpha+\psi_2)\exp(i\varpi)+(\alpha-\psi_2)\exp(-i\varpi)}$$

$$=\psi_2\frac{1+i(\alpha/\psi_2)\mathrm{tg}\varpi}{1+i(\psi_2/\alpha)\mathrm{tg}\varpi} \qquad (2.6.1)$$

流路入口阻力$z_1$与流路入口处的边界阻抗$\psi_1$无关，因为它只确定点$\bar{x}=0$下游的即与$\psi_1$有关的截面之后的流动动态特性。入口阻力是与频率有关的复数，只有在$\alpha=\psi_2$的个别情况下，即出口匹配负载$z_1=\psi_2$时才是实数。

当流路出口处为声学上的开端时，也即$\psi_2=0$时，按公式



(2.6.1)入口阻力等于

$$z_1=i\alpha\mathrm{tg}\varpi \qquad (2.6.2)$$

而当闭端时，即$\psi_2=\infty$时，

$$z_1=-i\alpha\mathrm{ctg}\varpi \qquad (2.6.3)$$

这样，当出口边界阻抗为极限值时，流路分段入口阻力为虚数，即无功的阻力。因为对不考虑摩擦损失的流动模型来说，在流路出口边界阻抗为极限值的情况下变为纯驻波的振荡工况[6]，在这种情况下声学能不会随着液流经出口截面带走而损失掉。这是由于在边界阻抗为极限值的情况下，流路末端的速度或压力偏差等于零，而与这两偏差之乘积成正比的声学能流也等于零。

由公式(2.6.2)和(2.6.3)可知，在某些规定频率$\varpi$下入口阻力变为无穷大，而且这个极限值以周期$\Delta\varpi=\pi$周期性地重复出现。当谐振时转变为无穷大，这与流路内没有摩擦能量损失和出口处没有能量带走有关。当谐振时$\delta\bar{p}/\delta\bar{u}\to\infty$，即流路入口处的压力幅值为任意有限值时都不会有速度振荡。在谐振频率下流路不会传递干扰(声学能流等于零)，是一种理想的“绝缘体”，可用来阻尼振荡。对应于谐振的频率按出口边界阻抗的大小而变化。当$\psi_2=0$时，如果$\varpi_k=(2k+1)\pi/2(k=1,2,3,\cdots)$，$z_1$趋向无穷大，而当$\psi_2\to\infty$，如果$\varpi_k=k\pi$，$z_1$也趋向无穷大。当$\psi_2=\alpha$的情况下改变出口边界阻抗时谐振频率会跃变，但这时$z_1$不会趋向无穷大。

上面对入口阻力下的谐振进行了研究。对于流路的频率传递函数也会发生谐振现象，为对它进行分析还要回到公式(2.3.15)和(2.3.16)。谐振发生的条件取决于流路入口处干扰引入的方法。首先研究$\psi_2$已给定的情况，而入口处压力振荡是按下列边界条件的参数给出的：

$$\delta\bar{y}_{21}=\delta\bar{p}_1,\psi_1=0,\gamma_{11}=1,$$

$$\delta\bar{y}_{1i}=0(i\geqslant 2),\delta\bar{y}_{2j}=0(j=1,2,\cdots)。$$

在计算分析时及在等效条件下进行试验时应注意干扰作用给

定的方法。试验时某个液流参数的测量可借助于所采用的某种型式的测量仪表预先选定好入口处的干扰，例如只选压力振荡，或只选速度振荡。同时无论用什么样的方法来产生干扰，系统内都会同时发生速度振荡和压力振荡。测出入口处一个参数的振荡后，就可获得系统的响应，它表现为由于入口参数的变化可测得另一些参数的变化。这时如果产生干扰的装置只要未包含在所研究的系统之内，则干扰实际引入的位置(截面)及其产生方法就没有意义。把用来测量当作入口影响参数的流路截面认为是干扰引入的位置。

如果在试验时测量仪表发生改变，例如用测量速度的热风速表代替小惯性的压力表，那么在为了与试验数据作比较而进行的计算中，必须改变入口边界条件——考虑速度振荡是给定的。在各种测量仪表及相应的边界条件下，计算结果以及试验数据都是各不相同的。

这样，在流路始端或别的随便哪一个截面给定或测量压力振荡，因而就在初始截面建立了等效于流路声学开端条件的条件。等式$\delta\bar{p}=0$是$\bar{x}=0$时边界条件$\delta\bar{p}=\delta\bar{p}_1$的特殊情况，或$\bar{x}=1$时边界条件$\delta\bar{p}=\delta\bar{p}_2$的特殊情况。把上述条件中的第一个条件代入方程(2.3.15)得

$$\begin{aligned}&\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})\\&=\frac{(\alpha-\psi_2)\exp[-i\bar{\omega}(1-\bar{x})]-(\alpha+\psi_2)\exp[i\bar{\omega}(1-\bar{x})]}{(\alpha-\psi_2)\exp(-i\bar{\omega})-(\alpha+\psi_2)\exp(i\bar{\omega})}\delta\bar{p}_1\\&=\frac{\psi_2\cos[\bar{\omega}(1-\bar{x})]+i\alpha\sin[\bar{\omega}(1-\bar{x})]}{\psi_2\cos\bar{\omega}+i\alpha\sin\bar{\omega}}\delta\bar{p}_1\end{aligned}\qquad(2.6.4)$$

现研究边界阻抗为极限值$\psi_2=\infty$($\psi_1=0$已给定)时的最简单情况，由式(2.6.4)可得

$$\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})=\frac{i\cos[\bar{\omega}(1-\bar{x})]}{\cos\bar{\omega}}\delta\bar{p}_1\qquad(2.6.5)$$

式(2.6.5)描述了驻波状态下的强迫振荡——振幅随长度而



变，而流路各点的振荡相位则是相同的。当$\bar{\omega}$=常数时，关系式(2.6.4)和(2.6.5)描述了压力振幅沿流路轴线的分布情况，这时流路始端处($\bar{x}=0$)，$\delta\bar{p}(0,\bar{\omega})=\delta\bar{p}_1$为压力波节，而流路出口处($\bar{x}=1$)，$|\delta\bar{p}(1,\bar{\omega})|=|\delta\bar{p}_1/\cos\bar{\omega}|$为压力波腹[6,7]。

因式(2.6.5)中的分母等于$\cos\bar{\omega}$，故当$\bar{\omega}=(2k-1)\pi/2$($k=1,2,3\cdots$)时此分母变为零，而压力幅值则趋向无穷大。在流路内发生谐振，且谐振频率和流路内液柱固有振荡频率中的一个频率一致。

在表征液体火箭发动机气液系统的条件中，边界阻抗为声学开端($\psi_i=0$)或闭端($\psi_i=\infty$)的这种最简单的极限值情况是很少遇到的。在入口端存在局部阻力的情况下流路边界阻抗的实际值在$-\infty$到0的范围内变化，而在出口端则在0到2的范围内变化，因为局部阻力的边界阻抗$\psi_i=\pm 2\Delta p_i/p$在$\Delta p_i\approx p$时即达到它的极大值(对出口)。对泵、调节器来说，边界阻抗可以在比较宽的范围内变化，也可以是一个复数。

利用公式(2.6.4)，把$\bar{x}=1$代入此式，可得到作为频率$\bar{\omega}$和折算的出口边界阻抗$\bar{\psi}_2=\psi_2/\alpha$的函数的流路压力放大系数的模数：

$$\left|\frac{\delta\bar{p}(1)}{\delta\bar{p}(0)}\right|=\frac{\bar{\psi}_2}{\sqrt{(\bar{\psi}_2\cos\bar{\omega})^2+\sin^2\bar{\omega}}}\qquad(2.6.6)$$

式中　$\delta\bar{p}(1)$、$\delta\bar{p}(0)=\delta\bar{p}_1$——流路出口和入口处压力变化幅值。

按公式(2.6.6)计算的结果用传输常数的模数在各种$\bar{\psi}_2$值下的变化曲线形状列于图2.11。

比较图2.11的曲线后可知，在有功的出口边界阻抗$\bar{\psi}_2>1$的情况下流路具有谐振特性，而且传输常数的谐振值正好等于$\bar{\psi}_2$。当$\bar{\psi}_2=1$(匹配负载)时传输常数对所有$\bar{\omega}$都等于1。当$\bar{\psi}_2<1$时传输常数始终小于1，当谐振时等于1，而当模数在谷值情况下则等于$\psi_2$。$\bar{\psi}_2>1$和$\bar{\psi}_2<1$的谐振频率是不相同的，这也是根据公式(2.4.10)应得出的。

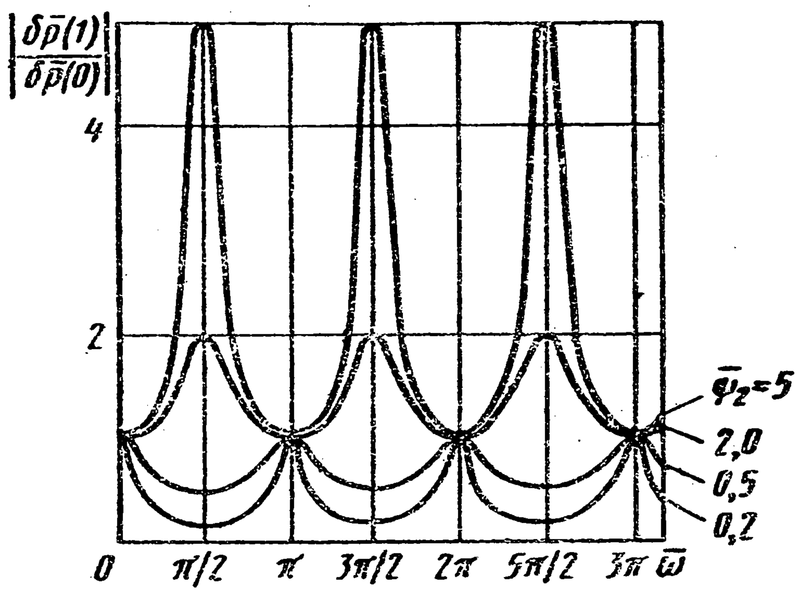



图2.11 流路压力放大系数在各种折算的出口阻抗 $\bar{\psi}_2=\psi_2/\alpha$ 值下的变化曲线

公式(2.6.6)和按此式计算的结果(见图2.11)属于干扰引入位置和流路内液体流动参数对干扰的响应的测量(计算)位置与流路分段边界 $\bar{x}=0$ 和 $\bar{x}=1$ 一致的情况。如果测量装置安装位置(或进行计算的流路截面)变了，则所得结果也会随之改变。利用上面所作的假设，借助于方程(2.3.15)在出口边界阻抗 $\psi_2$ 和频率 $\omega$ 之值给定的情况下可得压力变化幅值沿流路分布的计算公式

$$\frac{\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})}{\delta\bar{p}(0)}=-\frac{1}{D}\langle\sin[\bar{\omega}(1-\bar{x})]\sin\bar{\omega}-\bar{\psi}_2\cos[\bar{\omega}(1-\bar{x})]\cos\bar{\omega}+i\bar{\psi}_2\{\sin[\bar{\omega}(1-\bar{x})]\cos\bar{\omega}+\cos[\bar{\omega}(1-\bar{x})]\sin\bar{\omega}\}\rangle \qquad (2.6.7)$$

式中 $D=\sin^2\bar{\omega}+\bar{\psi}_2\cos^2\bar{\omega}$.

图2.12列出了按公式(2.6.7)计算的各种位置的流路分段压力放大系数与频率 $\omega$ 的关系曲线(当给定边界阻抗 $\psi_2$ 时)。随着测量(或计算)截面位置 $\bar{x}$ 的不同，在入口压力变化幅值 $\delta\bar{p}(0)$ 给定的情况下系统响应出现如下变化：谐振峰值以及谷值的高度发生变化，谐振频率稍许有了变化，某些谐振基本上消失了。

显然，如果干扰引入位置的坐标变了，则计算(试验)结果变化还要大，这时所有谐振频率也立即都发生改变。如果所研究的流路分段或液路系统是任何大液路系统的一部分，那么所研究分段或系统的谐振频率与整个系统的固有振荡频率大小一致。这时



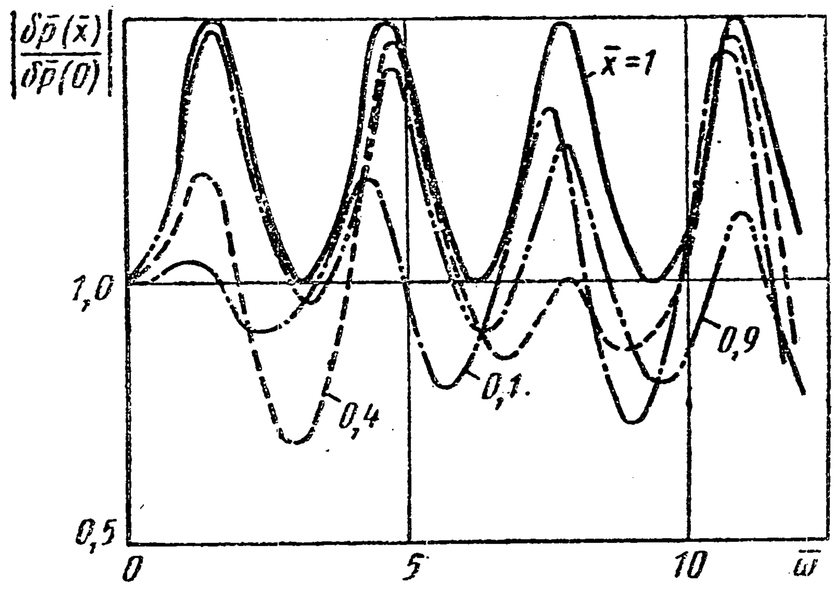



图2.12 在不同测量截面位置 $\bar{x}$ 下流路分段压力放大系数与频率 $\bar{\omega}$ 的关系曲线

固有振荡频率之值既不应取决于干扰引入的坐标，也不应取决于对干扰响应的测量位置，因为在计算固有振荡频率时研究在两端具有边界阻抗的整个封闭系统。

液路分段幅相频率特性曲线、幅频特性曲线和相频特性曲线的图形既与干扰引入位置坐标和对干扰响应测量位置坐标之比有关，也与边界阻抗和波阻之比有关。图2.13列出了流路分段在不同折算的入口边界阻抗 $\bar{\psi}_1$ 值下的 $\delta\bar{p}(0,\bar{\omega})/\delta\bar{y}_2$ 幅相频率特性曲线(频率传递函数)，该传递函数确定了流路入口压力振荡和出口干扰作用 $\delta\bar{y}_2$ 之间的关系。对流路壁面无摩擦的流动，幅相频率特性曲线是完全封闭的，即在经过频段 $\Delta\bar{\omega}=2\pi$ 后，它们又重复出现。当 $|\bar{\psi}_1|=1$ 时，即对于匹配负载，幅相频率特性曲线为圆形，当 $|\bar{\psi}_1|<1$ 时，它沿着实轴延伸，而当 $|\bar{\psi}_1|>1$ 时，则沿虚轴延伸在图2.14上，$|\bar{\psi}_1|=1$ 的幅频特性曲线是水平直线，因为在匹配负载的情况下流路内变为行波状态，其振幅与频率无关，而相位则线性增加。当 $|\bar{\psi}_1|>1$ 时在幅频特性曲线上在 $\bar{\omega}=k\pi/2$ 时有谐振峰值。当 $|\bar{\psi}_1|<1$ 时在幅频特性曲线上也有峰值。$\left|\frac{\delta\bar{p}(0)}{\delta\bar{y}_2}\right|$ 的最大值与其静态值一致，即与 $\bar{\omega}=0$ 时的值一致。幅频特性曲线达到峰值时的频率等于 $\bar{\omega}=k\pi$。相位随着频率的增大而增大(但不是均匀地)。

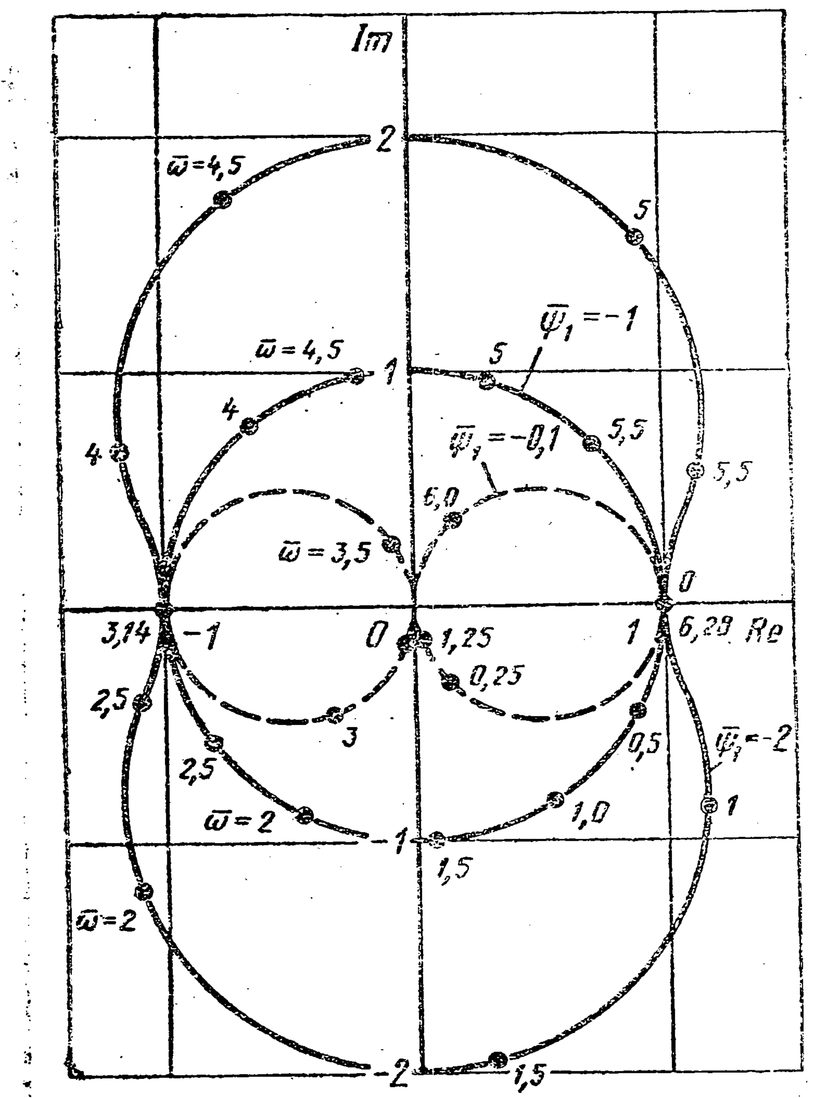



图2.13 液路分段在不同折算的入口边界阻抗$\bar{\psi}_1$下和出口边界阻抗$\psi_2=0.1$时的幅相频率特性曲线

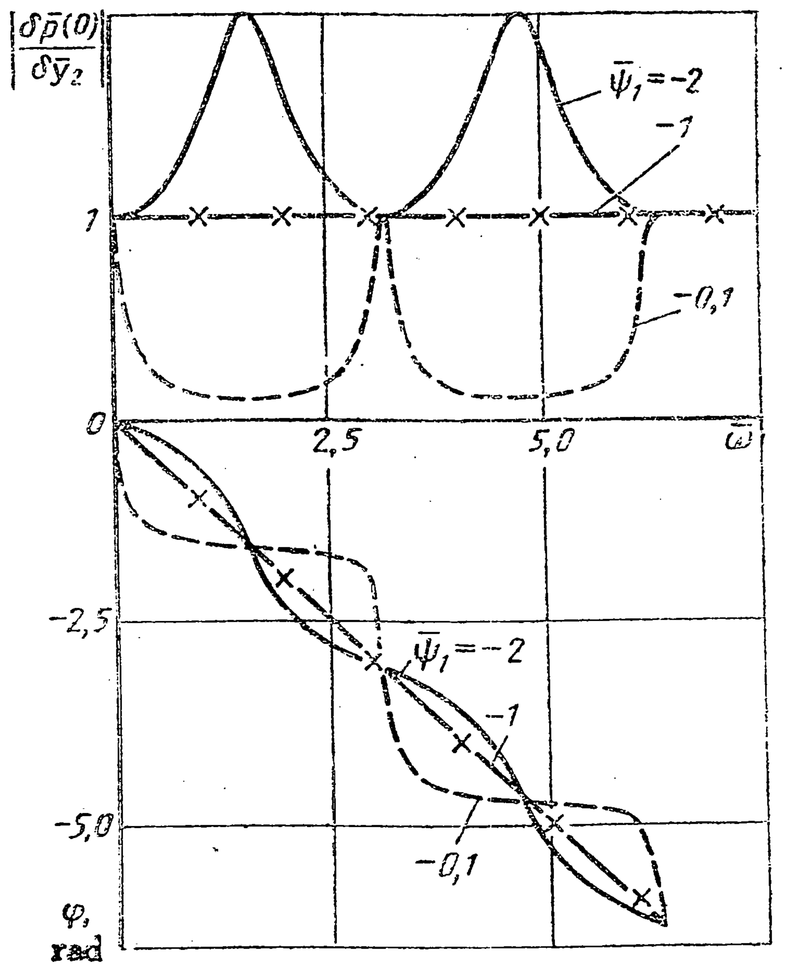



图2.14 与图2.13同一流路分段的幅频特性曲线和相频特性曲线

当干扰引入位置和对干扰响应的测量位置一致时所有幅相频率特性曲线为圆形，在入口匹配负载($\bar{\psi}_1=-1$)下圆缩小成一点(图2.15)。同样情况下的幅频特性曲线(图2.16)不同于图2.14所示的幅频特性曲线，彼此间是交叉的，谐振频率也是变化的，取决于发生怎么样的相互关系：$\bar{\psi}_1>1$还是$\bar{\psi}_1<1$。相频特性曲线具有周期特点，且不会超出$\pm\pi/2$的界限。



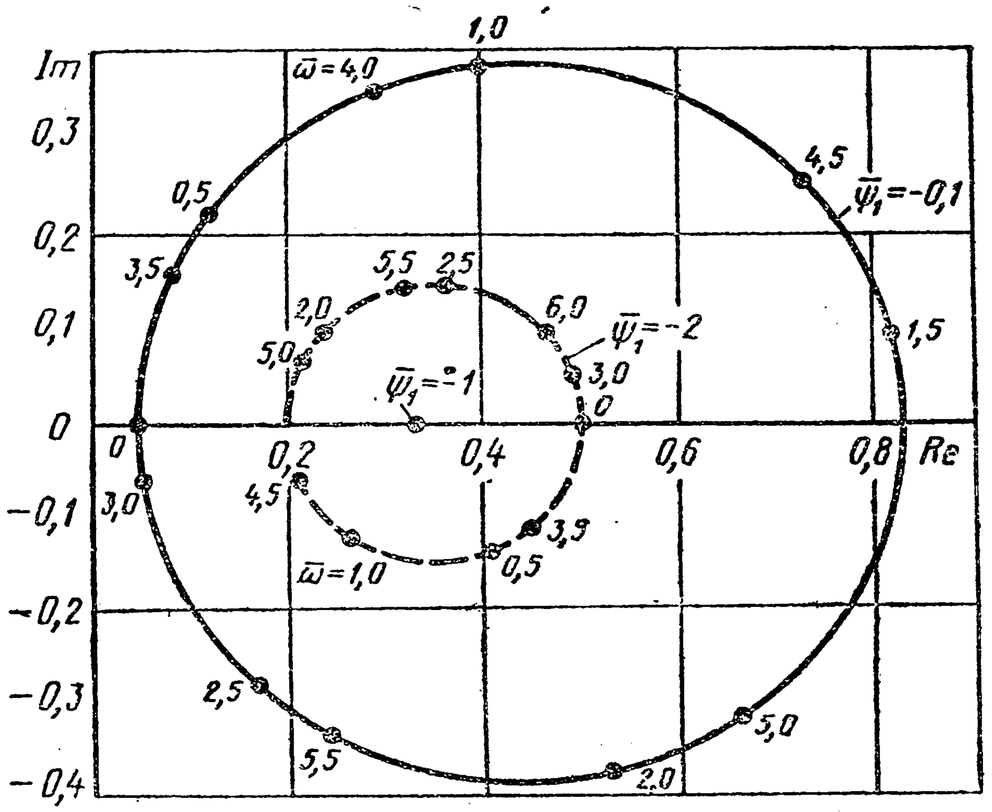



图2.15 当干扰引入位置和对干扰响应的测量位置一致时在各种$\bar{\psi}_1$及$\bar{\psi}_2=2$下流路分段的幅相频率特性曲线

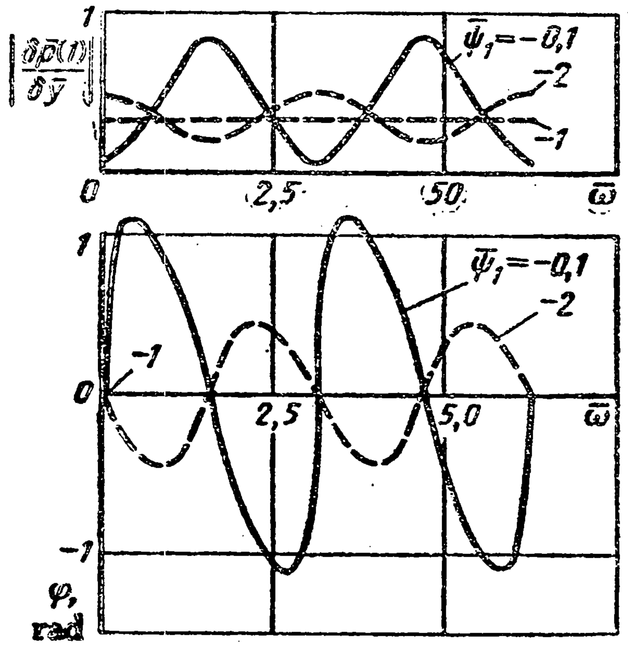



图2.16 与图2.15同样条件下的同一流路分段的幅频特性曲线及相频特性曲线

## 2.7 流路内考虑摩擦力同频率的关系的非稳态流模型

### 2.7.1 层流

前面利用简化的假定对流路内非稳态的周期运动作了研究，

从而得出了相当简单的而且直观的解。主要的简化假定为一维流动(认为参数只沿着流路轴线发生变化)和液体对壁面摩擦力的准稳态性。在转到一维准稳态流时取动量修正为 $\gamma(x,t)=\text{const}$，而摩擦阻力系数 $\lambda(x,t)$ 及对壁面的摩擦应力 $\tau_w(x,t)$ 均仅与平均速度的瞬时值有关。

但是确定液路动态特性的试验结果，研究水击时所获得的数据以及非稳态流的速度分布图[6,7,26,33]都未能证实流动准稳态性的假设。

现着重研究确定周期的非稳态层流的参数问题，因为在液体火箭发动机自动装置及测量系统的流路上可能要应用它的解。同时还因为这个问题要相当精确地求解，这样就可能以它为例子来阐明非稳态流的主要特点。下面将认为液体是成滴的、轻度可压缩性的，外界质量力忽略不计。于是对方程(2.2.11)和(2.2.12)取 $M\ll 0$ 和 $\bar{F}_x=0$ 之后，得

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}+\frac{\bar{v}}{\bar{r}}=0 \qquad (2.7.1)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}+\frac{1}{a}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}-\frac{M}{Re}\left(\frac{L}{R}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}}\right)=0 \qquad (2.7.2)$$

方程(2.7.1)和(2.7.2)是线性的，但它们的边界条件在多数情况下为非线性的，因此把它们转为小变化量就方便了。利用无量纲参数变化量，得

$$\frac{\partial\delta u}{\partial\bar{t}}+\frac{1}{a}\frac{\partial\delta p}{\partial\bar{x}}-\frac{M}{Re}\left(\frac{L}{R}\right)\left(\frac{\partial^2\delta u}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\delta u}{\partial\bar{r}}\right)=0 \qquad (2.7.3)$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\delta p}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial\delta u}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\delta v}{\partial\bar{r}}+\frac{\delta v}{\bar{r}}=0 \qquad (2.7.4)$$

当把变化量化为无量纲形式时认为变化量同变化参数的平均值有关。得出描述参数稳态振荡周期特解：



$$\delta u(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega},\bar{t})=\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})\exp i\bar{\omega}\bar{t};$$

$$\delta v(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega},\bar{t})=\delta\bar{v}(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})\exp i\bar{\omega}\bar{t};$$

$$\delta p(\bar{x},\bar{\omega},\bar{t})=\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})\exp i\bar{\omega}\bar{t},$$

式中 $\delta\bar{u}$、$\delta\bar{v}$、$\delta\bar{p}$——参数的变化幅值(复数)。

这些解描述了施加在流路中液体稳态层流上的(也施加在不运动的液体上)微小周期振荡。把解 $\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})$、$\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})$ 代入方程(2.7.3)，去掉指数因子，引入新的变量

$$\delta\bar{V}=\delta\bar{u}+\frac{1}{i\bar{\omega}a}\cdot\frac{d\delta\bar{p}}{d\bar{x}} \qquad (2.7.5)$$

考虑到 $\partial\delta\bar{p}/\partial\bar{r}=0$，并进行一些其它变换后，得

$$\frac{d^2\delta\bar{V}}{d\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{d\delta\bar{V}}{d\bar{r}}-is^2\delta\bar{V}=0 \qquad (2.7.6)$$

推导方程(2.7.6)时利用了关系式

$$i\bar{\omega}ReR/(ML)=i\omega R^2/v=is^2$$

而 $s=R\sqrt{\omega/v}$——有时叫做斯托克斯数的无量纲参数。

方程(2.7.6)具有贝塞耳方程的形状，它的解如下式：

$$\delta\bar{V}=A(\bar{x},\bar{\omega})J_0(i^{\frac{3}{2}}\bar{r}s)+B(\bar{x},\bar{\omega})Y_0(i\bar{r}s) \qquad (2.7.7)$$

式中 $J_0$、$Y_0$——贝塞耳函数；

$A(\bar{x},\bar{\omega})$，$B(\bar{x},\bar{\omega})$——未知函数。

考虑到函数 $Y_0$ 在自变量接近零时趋向无穷大，而变化量 $\delta\bar{u}$，因而还有 $\delta\bar{v}$，当 $r=0$ 时应为有限数，而且 $B(\bar{x},\bar{\omega})=0$。

在 $\bar{r}=1$ 时粘性液体附着于流道壁面的边界条件 $\delta\bar{u}=0$ 给出了确定函数 $A(\bar{x},\bar{\omega})$ 的可能性。将解式(2.7.7)代入方程(2.7.5)，考虑到边界条件，得

$$A(\bar{x},\bar{\omega})=\frac{1}{i\bar{\omega}aJ_0(i^{\frac{3}{2}}s)}\cdot\frac{d\delta\bar{p}}{d\bar{x}}$$

而由式(2.7.7)得函数 $\delta\bar{V}$ 的关系式

$$\delta\bar{V}=\frac{1}{i\bar{\omega}\alpha}\cdot\frac{J_0(i^{\frac{3}{2}}\bar{r}s)\,\mathrm{d}\delta\bar{p}}{J_0(i^{\frac{3}{2}}s)\,\mathrm{d}\bar{x}} \tag{2.7.8}$$

将式(2.7.8)代入式(2.7.5)，得流路内液流振荡时联系压力和速度变化幅值的方程式：

$$\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})=-\frac{1}{i\bar{\omega}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\bar{p}}{\mathrm{d}\bar{x}}\left[1-\frac{J_0(i^{\frac{3}{2}}s\bar{r})}{J_0(i^{\frac{3}{2}}s)}\right] \tag{2.7.9}$$

如去掉括弧，则式(2 7.9)右边部分的第一项可确定由公式(2.3.11)描述的一维声学振荡沿流路轴线速度幅值与压力变化量梯度之间的关系。第二项表征与振荡液体中摩擦力和惯性力相互作用有关的补充效应，这两种力导致速度分量变量分布图发生变化。由式(2.7.9)可知，压力梯度和速度之间的关系沿半径的不同点是不同的。应注意到，速度分布图取决于两个函数的乘积，其中一个函数仅与纵向坐标$\bar{x}$有关，而另一个函数仅与计算半径$\bar{r}$有关。为分析参数沿流路长度的偏差分布，引入截面平均速度变化幅值

$$\delta\bar{U}(\bar{x},\bar{\omega})=\frac{1}{\pi}\int_0^1 2\pi\bar{r}\,\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})\,\mathrm{d}\bar{r} \tag{2.7.10}$$

将式(2.7.9)代入算式(2.7.10)，考虑到$\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})$与$\bar{r}$无关，得平均速度变化幅值$\delta\bar{U}$与压力梯度有关的关系式

$$\delta\bar{U}(\bar{x},\bar{\omega})=-\frac{1}{i\bar{\omega}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\bar{p}}{\mathrm{d}\bar{x}}\left[1-\frac{2}{i^{\frac{3}{2}}s}\cdot\frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}s)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}s)}\right] \tag{2.7.11}$$

式中 $J_1(i^{\frac{3}{2}}s)$——第一类一阶贝塞尔函数。

对连续方程(2.7.4)各项乘以$2\pi r$，并考虑到流路壁面边界条件$\bar{r}=1$、$\delta\bar{u}=\delta\bar{v}=0$，沿半径对它进行积分。在对倒数第二项这一部分进行积分时，考虑到边界条件把该项同最后一项的积分简化掉了。将周期特解代入之，最终得到联系平均速度变化幅值和



压力变化量的方程

$$\delta\bar{p}+\frac{\alpha}{i\bar{\omega}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\bar{U}}{\mathrm{d}\bar{x}}=0 \tag{2.7.12}$$

经变换后的方程(2.7.11)与方程(2.7.12)一起适合于描述可压缩液体的脉动层流，也适用于不可压缩液体。利用关系式(2.7.9)，认为压力梯度按谐波定律变化，就可得到速度分布图和无量纲参数$s$值的关系式。当参数$s$值很小($s=3$)时，相对速度变化量分布图(图2.17(b))为抛物线形状，它表征稳态层流流动。随着参数$s$的增大，速度相对变化量减小，而峰值移近壁面。$s$值

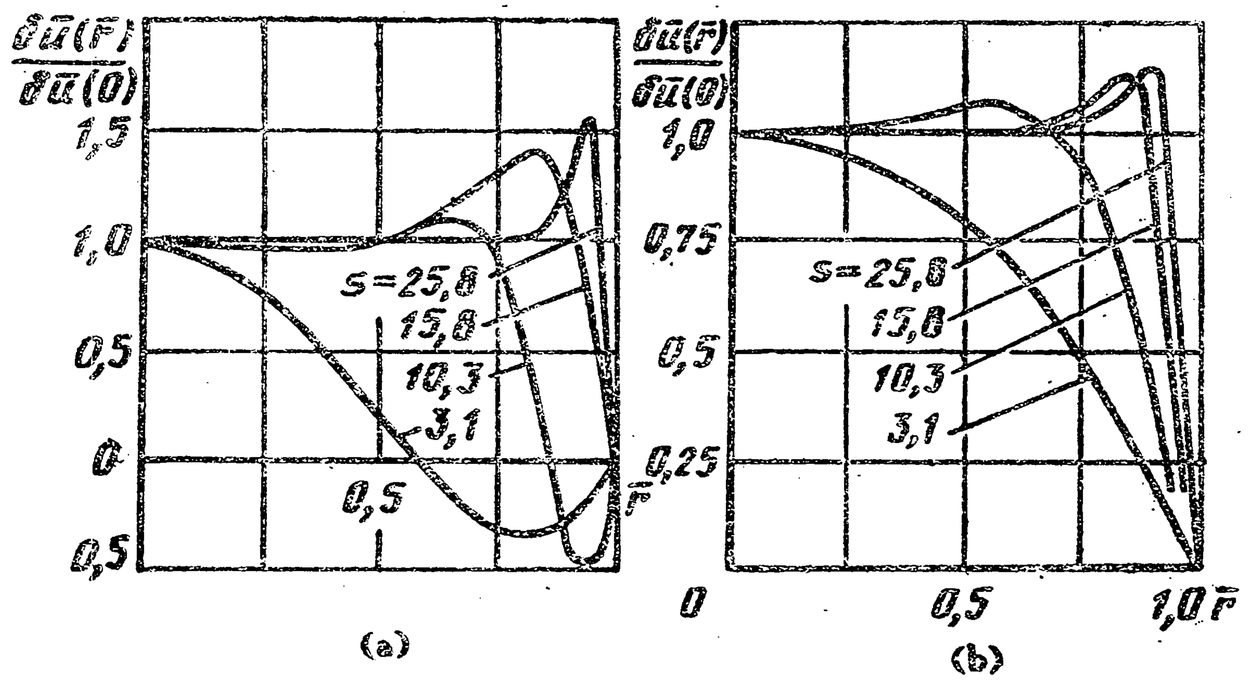



图2.17 脉动层流在不同$s$值下的相对速度分布图

(a) $\bar{\omega}\bar{t}=\pi/2$；(b) $\bar{\omega}\bar{t}=0$。

很大时相对流动速度变化量分布图基本上是平的，只是在靠近流路壁面处有不大的峰值。在规定的振荡相位下(图2.17(a))，壁面附近和液流中心的相对流动速度变化量分布图具有不同的方向。

脉动层流的相对速度变化量分布图随着参数s变化的情况已被许多相当充分的试验研究结果[6,7,26]所证实。

图2.18列出了脉动层流在4个$s$值及2个振幅下相对速度分布

图的试验结果。试验时速度的测量采用了加到液体中的粒子流

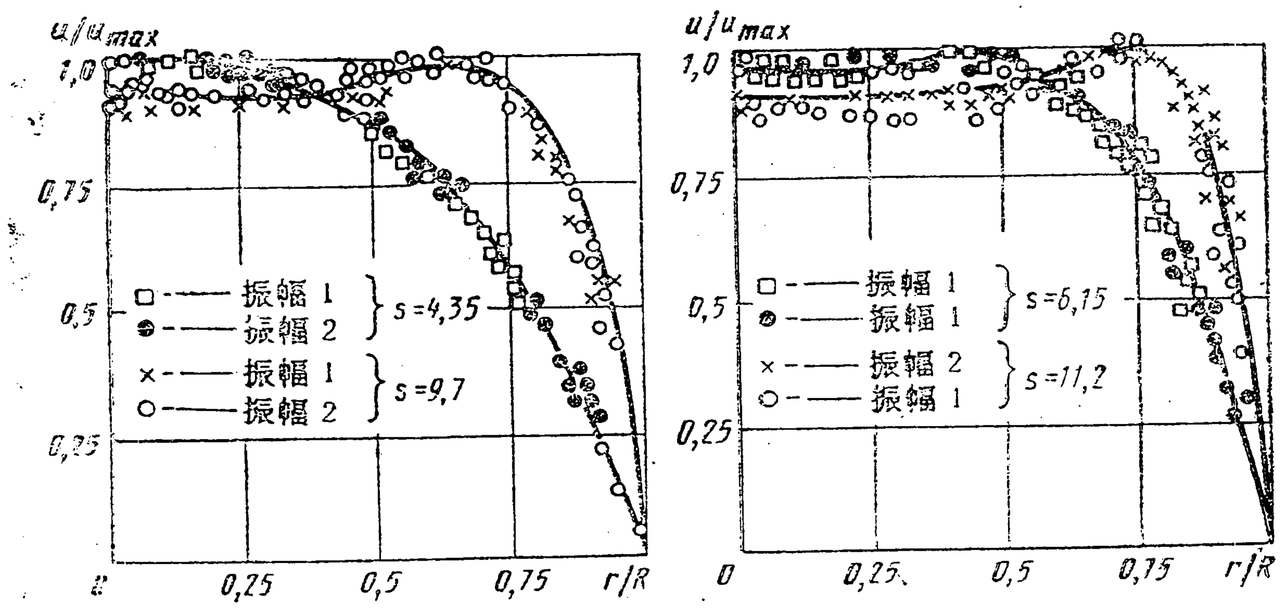



图2.18 脉动流在2个振幅及不同参数$s$值下理论的和试验的相对速度分布图

迹(径迹)摄影法。粒子的移动正比于当地的速度。试验结果用被测速度与液流速度最大值$U_{max}$之比来表示。图2.18还列出了用方程(2.7.9)算出的理论曲线。试验点和理论曲线符合较好，试验证实，振幅的变化不会影响速度分布图的形状。

利用关系式(2.7.11)，考虑到摩擦应力与频率的关系，可得充满不可压缩液体的液路分段的数学模型。对于不可压缩的液体将压力梯度前的系数中的乘积$\varpi\alpha$作变换较为合适，消去声速：

$$\varpi\alpha=\frac{\omega L}{a}\cdot\frac{\rho u a}{p}=\omega\frac{\rho u L}{p}=\omega\tau_{и}$$

式中 $\tau_{и}$——流路内液柱的惯性时间常数。

然后把方程(2.7.11)重写为具有集中参数元件的方程，以便能在给定压力梯度下计算液体平均速度的变化量，反之，也能按已知的平均速度变化量求出压力梯度。结果得到[6]

$$z_{т}\delta\bar{U}=-\frac{\mathrm{d}\delta\bar{p}}{\mathrm{d}\bar{x}}$$



式中

$$z_{т}=\left\{\frac{1}{i\omega\tau_{и}}\left[1-\frac{2J_1(i^{\frac{3}{2}}s)}{i^{\frac{3}{2}}sJ_0(i^{\frac{3}{2}}s)}\right]\right\}^{-1}=R_{т}+iJ_{т}$$

(2.7.13)

$R_{т}$、$J_{т}$——流路分段单位长度无量纲阻力$z_{т}$(阻抗)的实数分量和虚数分量。

充满不可压缩液体的流路分段的方程(2.7.13)同时考虑了两个作用——液体的惯性(阻力的虚数分量)和摩擦(阻力的实数分量)。$z_{т}$的两个分量均与频率有关。

方程(2.7.13)可描述视作具有集中参数元件的流路分段。如果必须考虑参数的分布性，即考虑流路内的声学效应，则除运动方程(2.7.11)外，还需利用连续方程(2.7.12)。把方程(2.7.12)的压力变化幅值代入式(2.7.11)，就可得到计算平均速度变化幅值沿流路分段长度分布的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\bar{U}}{\mathrm{d}\bar{x}^2}-\beta^2\varpi^2\delta\bar{U}=0 \qquad (2.7.14)$$

一般

$$\frac{1}{\beta^2}=\frac{2}{i^{\frac{3}{2}}s}\cdot\frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}s)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}s)}-1$$

式中 $\beta$——分布参数。

方程(2.7.14)的特征方程之根等于$\pm\beta\varpi$，相应地方程(2.7.14)的解如下式：

$$\delta\bar{U}(\bar{x},\varpi)=C\exp(\beta\varpi\bar{x})+D\exp(-\beta\varpi\bar{x}) \qquad (2.7.15)$$

式中 $C$和$D$——常数。

将式(2.7.15)代入方程(2.7.12)，得压力变化幅值的解

$$\delta\bar{p}(\bar{x},\varpi)=i\beta\alpha[C\exp(\beta\varpi\bar{x})-D\exp(-\beta\varpi\bar{x})] \qquad (2.7.16)$$

常数$C$和$D$决定于流路两端的边界条件，当每一端只有一个干扰量时边界条件写成如下形式(见2.3.1节)

$$\bar{x}=0,\delta\bar{p}=\psi_1\delta\bar{U}+\gamma_1\delta\bar{y}_1$$
$$\bar{x}=1,\delta\bar{p}=\psi_2\delta\bar{U}+\gamma_2\delta\bar{y}_2 \qquad (2.7.17)$$

式中 $\psi_1$、$\psi_2$——边界阻抗；

$\gamma_1$、$\gamma_2$——外界干扰$\delta\bar{y}_1$和$\delta\bar{y}_2$的放大系数。

利用边界条件(2.7.17)，借助于关系式(2.7.15)和(2.7.16)可得到确定无量纲速度变化量及压力变化量的平均幅值沿流路分布的解

$$\delta\bar{U}(\bar{x},\bar{\omega})=(\gamma_2/N)[(\alpha_\text{п}-\psi_1)\exp(\beta\bar{\omega}\bar{x})+(\alpha_\text{п}+\psi_1)\exp(-\beta\bar{\omega}\bar{x})]\delta\bar{y}_2-(\gamma_1/N)\{(\alpha_\text{п}-\psi_2)\times\exp[-\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})]+(\alpha_\text{п}+\psi_2)\exp[\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})]\}\delta\bar{y}_1 \qquad (2.7.18)$$

$$\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})=(\alpha_\text{п}\gamma_2/N)[(\alpha_\text{п}+\psi_1)\exp(-\beta\bar{\omega}\bar{x})-(\alpha_\text{п}-\psi_1)\exp(\beta\bar{\omega}\bar{x})]\delta\bar{y}_2-(\alpha_\text{п}\gamma_1/N)\{(\alpha_\text{п}+\psi_2)\times\exp[\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})]-(\alpha_\text{п}-\psi_2)\exp[-\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})]\}\delta\bar{y}_1 \qquad (2.7.19)$$

式中 $N=(\alpha_\text{п}+\psi_1)(\alpha_\text{п}-\psi_2)\exp(-\beta\bar{\omega})-(\alpha_\text{п}-\psi_1)(\alpha_\text{п}+\psi_2)\exp(\beta\bar{\omega})$

$\alpha_\text{п}=-i\beta\alpha$——折算波阻。

包含在解式(2.7.18)、(2.7.19)中的分布参数$\beta$(与从关系式(2.7.14)得出的一样)是一个复数，也即$\beta=\xi+i\chi$。图2.19列列出了参数$\beta$的实数分量$\xi$和虚数分量$\chi$与参数$s$的关系曲线。如液体的粘度很小，即$\nu\to0$，或频率$\omega\to\infty$，则相应地$\xi\to0$，$\chi\to1$。在这种情况下$\beta\to i$，$\alpha_\text{п}\to\alpha$。但是这样取极限只是在$\nu\to0$，即液体具有很小的粘度时才是合理的。当$\bar{\omega}\to\infty$时取极限则不合理，因为在将$\beta$代入解式(2.7.18)和(2.7.19)之后式中就含有确定振荡衰减的乘积$\xi\bar{\omega}$，而此乘积当$\bar{\omega}\to\infty$时也趋向$\infty$，而不是像$\xi$那



样趋向零。

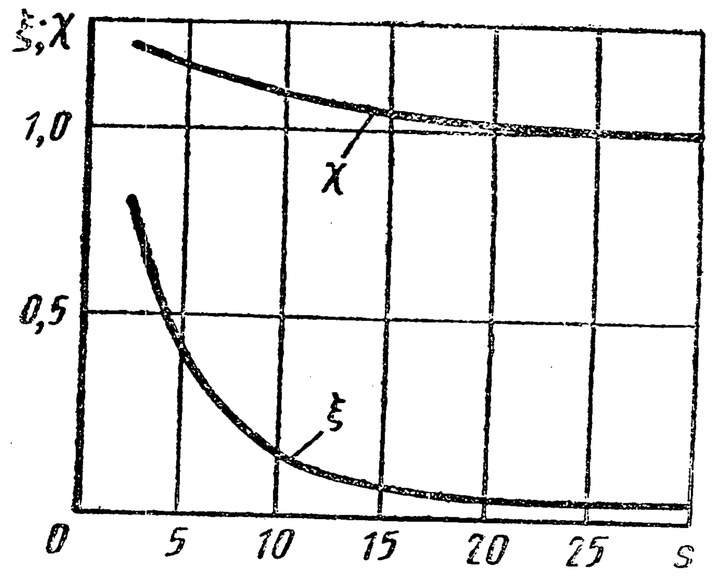



图2.19 分布参数$\beta$的实数分量和虚数分量与无量纲参数$s$的关系曲线

由$Re$数表征的并与频率有关的摩擦力对液路动态特性的影响可用层流状态下液路的频率传递函数和输入传导的曲线图(图2.20)来说明。按公式(2.7.19)进行了计算。对某流路计算了频率传递函数$\delta\bar{p}(1,\bar{\omega})/\delta\bar{p}(0,\bar{\omega})$和输入传导$\delta\bar{U}(0,\bar{\omega})/\delta\bar{p}(0,\bar{\omega})$，该流路具有如下参数：$R/L=0.00043$；$\alpha=0.64$；$\psi_2=2$；$\delta\bar{y}_1=\delta\bar{p}(0)$，即$\psi=0$；$\delta\bar{y}_2=0$。比值$Re/Ma$在宽的范围内变化。当$Re/Ma\approx10^6\sim10^8$，即当粘度比较小或流路半径比较大时，此比值在这两个量级内的变化对流路的频率传递函数和输入传导没有大的影响。$Re/Ma$减小到$3.76\times10^5$这个量级时导致频率传递函数和输入传导显著的变化。$Re/Ma$继续再下降一个量级(到$3.76\times10^4$)使频率传递函数和输入传导发生急剧的变化——第二个谐振基本上已退化变形，其频率明显地降低。

具有层流液路的频率试验结果证实了所研究的考虑了可压缩性及摩擦应力与频率关系的流动的数学模型的精确性。图2.21(a)列出了确定作为频率$f$的函数的无量纲输入传导的试验数据

$$A(f)=\frac{\delta u'(0,f)/\delta p'(0,f)}{\delta u'(0,1)/\delta p'(0,1)}$$

式中 $\delta u'(0,f)$、$\delta p'(0,f)$——流路入口处($\bar{x}=0$)速度和压力变化量；

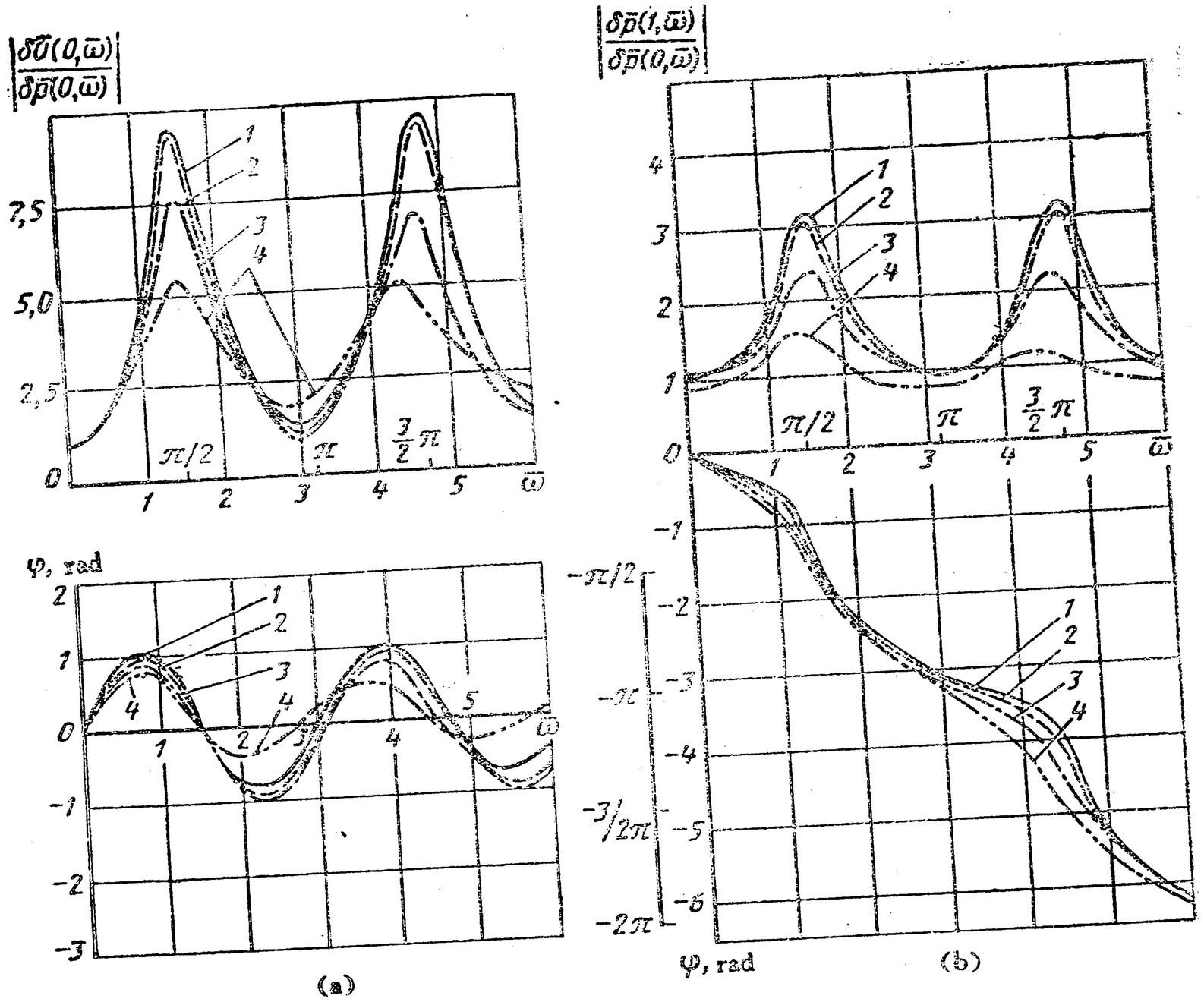



图2.20 液路的输入传导(a)和频率传递函数(b)

1—$Re/M=3.76\times10^3$； 2—$Re/M=3.76\times10^4$；

3—$Re/M=3.76\times10^5$； 4—$Re/M=3.76\times10^6$

$\delta u'(0,1)$、$\delta p'(0,1)$——频率$f=1$Hz时与上述相同的变化量。

图上(图2.21(b))还列出了流路的频率传递函数$\delta p'(1,f)/\delta p'(0,f)$，其中$\delta p'(1,f)$——流路末端($\bar{x}=1$)的压力变化[6]。图2.2.1上除试验点外还列出了按公式(2.7.18)和(2.7.19)计算的传递函数曲线图(实线)。计算曲线与试验数据完全一致。为了进行比较，图2.21(b)上还列出了用公式(2.3.15)和(2.3.16)计算的虚线曲线，推导该公式时作了对壁面的摩擦力为准稳态性的假



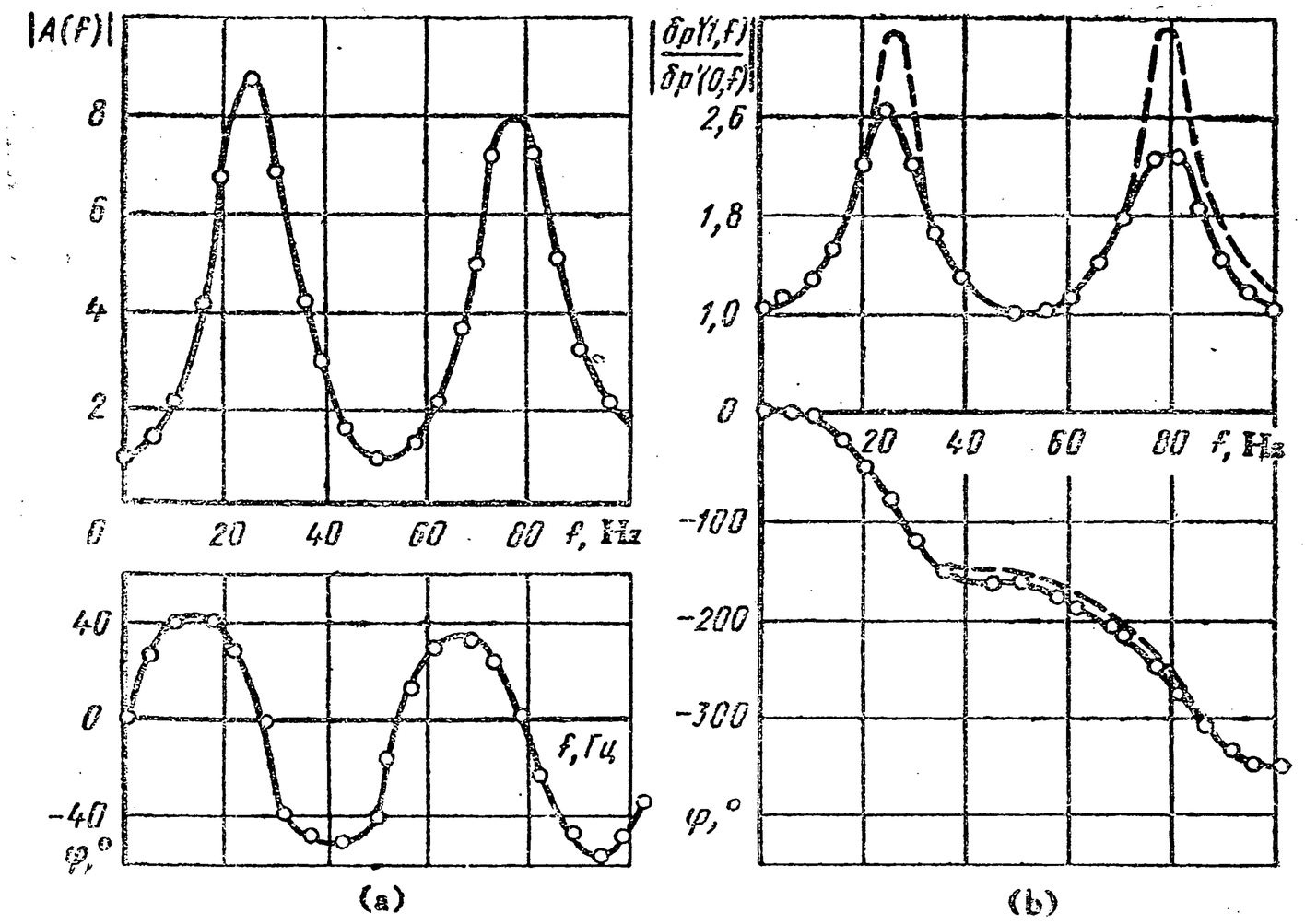



图2.21 液路的试验和理论数据

(a)输入传导的数据； (b)传递函数的数据。

○——试验数据；——，————理论数据。

设。按这两个公式计算的结果与试验结果有较大的差别，也与按公式(2.7.18)和(2.7.19)计算所得的数据有较大的差别，公式(2.7.18)和(2.7.19)考虑了摩擦力与频率的关系。

### 2.7.2 紊流

流路内的稳态流存在着雷诺数的极限临界值$Re_{кр}$，在$Re_{кр}$时层流失去稳定性并转变为紊流。从层流转为紊流时摩擦应力与流速有关的规律性发生急剧的变化。试验结果表明[6,26]，流动的不稳定性对$Re_{кр}$的影响不是单值的——当液流加速时$Re_{кр}$增大，减速时则减小。对稳态液流施加谐波脉动时$Re_{кр}$增大。对于具有

$Re$值相对较低的特征的流路，在计算这种流路内的流动参数时必须考虑上述这些因素。然而还没有把$Re_{кр}$与其它流动参数（速度振幅、参数$s$等）联系起来的可靠的定量关系式。

像对层流施加振荡一样，对发展的紊流也施加振荡，试验表明，会使速度分布图发生变化——壁面附近的速度梯度增大，从而使对壁面的摩擦力加大。

要相当精确地建立非稳态紊流的数学模型目前是不可能的，因为在各种紊流模型中包含着一系列需要由试验方法获得的关系式。而这些非稳态流的关系式暂时还没有。所以在建立非稳态紊流的模型时不得不利用关于紊流某些特性的准稳态性的假设。本书从许多可能采用的模型中已经采用了其中一个模型，在建立该模型时假设摩擦应力是准稳态的。曾指出过，这种假设是过于粗略的，会使计算数据与试验结果产生很大的差别。这种假设之所以粗略，是在于它没有考虑液流局部动力特性——速度分布图变化的可能性。

提出了许多能够利用从试验得到的紊流粘度沿半径准稳态分布的假设来求出速度分布图的流路内非稳态流的数学模型。现研究其中一个模型[7]。设：圆柱形流路的壁是刚性的，$L\gg R$，$Ma\ll 1$，质量力忽略不计，将变量以参数的平均值及其紊流脉动值之和的形式代入流体力学方程(2.2.11)和(2.2.12)，把所得方程中所有各项求平均值，转化为被平均参数的变化量后，再以周期特解

$$\delta u(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})=\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})\exp i\bar{\omega}\bar{t}$$

$$\delta p(\bar{x},\bar{\omega})=\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega})\exp i\bar{\omega}\bar{t}$$

进行置换后得类似于方程(2.7.3)和(2.7.4)的非稳态紊流的方程[7]：

$$i\bar{\omega}\delta\bar{u}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial\delta\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\frac{L}{aR^2\bar{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left[\bar{r}(\nu+\nu_T)\frac{\partial\delta\bar{u}}{\partial\bar{r}}\right] \tag{2.7.20}$$



$$\frac{i\bar{\omega}}{\alpha}\delta\bar{p}+\frac{\partial\delta\bar{v}}{\partial\bar{r}}+\frac{\delta\bar{v}}{\bar{r}}+\frac{\partial\delta\bar{u}}{\partial\bar{x}}=0 \tag{2.7.21}$$

式中 $\nu_T$——紊流粘度。

常用的$\nu_T$沿半径的分布规律示于图2.22。

图中 $\xi=R-r$——到流路壁的距离；

$u^*=\sqrt{\tau_w/\rho}$——动力速度；

$\tau_w$——对流路壁面的切向摩擦应力。

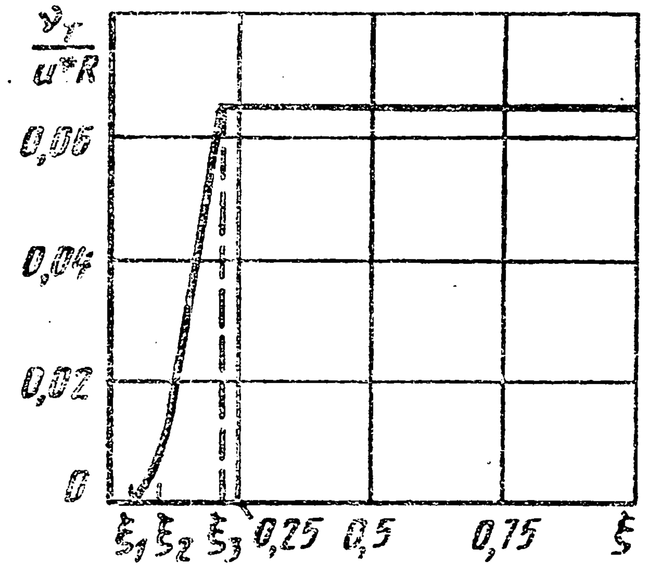



图2.22 紊流粘度沿流路半径的分布规律

粘性层流层位于壁面与坐标$\xi_1=5\nu/u^*$之间的第一层，该层内紊流粘度$\nu_T=0$，第二层即过渡层内紊流粘度由下式确定

$$\nu_T=Ar^2 \tag{2.7.22}$$

式中 $A=0.01c_fU_0^2/(8\nu^2)$；

$c_f=8\tau_w/(\rho U_0^2)$——无量纲摩擦系数；

$U_0$——液体平均速度。

过渡层在坐标$\xi_1=5\nu/u^*$和$\xi_2=40\nu/u^*$所限制的区域内。

在坐标$\xi_2=40\nu/u^*$和$\xi_3=0.2R$所限制的第三层内，紊流粘度按线性规律随着距壁面的间距增加而增大

$$\nu_T=B\xi \tag{2.7.23}$$

式中 $B=0.32\sqrt{c_f/8}U_0R$。

第4层为最后的一层，也就是紊流中心，其范围从坐标$\xi_3$到

流路中心($\xi=1$)，其中的紊流粘度为常量：

$$\nu_T = 0.64\sqrt{c_f/8}U_0R \qquad (2.7.24)$$

对劳费尔著作中的试验数据进行处理后[6]可得到关系式(2.7.22)和(2.7.23)中系数$A$和$B$之值。这时采取了如下假设：紊流粘度分布图与流动的非稳态度无关，即采用了紊流粘度分布图准稳态性的假设。正像第2.7.1节中所做的那样，对运动方程(2.7.20)进行变换，引入新的变量

$$\delta\bar{z} = \delta\bar{u} + \frac{1}{i\bar{\omega}\alpha}\cdot\frac{\partial\delta\bar{p}}{\partial\bar{x}} \qquad (2.7.25)$$

式中压力变化量与半径无关，并暂时把它作为某一个未知函数

$$F(\bar{x},\bar{\omega}) = \frac{1}{i\bar{\omega}\alpha}\cdot\frac{\partial\delta\bar{p}}{\partial\bar{x}} \qquad (2.7.26)$$

为了方便起见，一开始不必确定函数$F(\bar{x},\bar{\omega})$，而是用参数$\delta\bar{z}$与$F(\bar{x},\bar{\omega})$之比来对运动方程求解：

$$\frac{\delta\bar{z}(\bar{x},\bar{\omega},\bar{r})}{F(\bar{x},\bar{\omega})} = \delta\bar{u}^0 + 1 = \delta\bar{z}^0$$

式中 $\delta\bar{u}^0 = \delta\bar{u}/F(\bar{x},\bar{\omega})$。

利用式(2.7.25)和(2.7.26)将新的变量$\delta\bar{z}^0$代入运动方程(2.7.20)，得

$$\delta\bar{z}^0 = \frac{L}{i\bar{\omega}R^2\bar{r}a}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left[\bar{r}(\nu+\nu_T)\frac{\partial\delta\bar{z}^0}{\partial\bar{r}}\right] \qquad (2.7.27)$$

对于所采用的紊流粘度分布规律(见图2.22)，方程(2.7.27)没有简单的解析解，而需应用数值法来对其求解。用数值法求解时，利用速度间和切向应力间的平衡关系对四个区域中每一个区域进行调整修合使这些解衔接起来。

对连续方程(2.7.21)沿$\bar{r}$进行积分，预先对各项乘以$2\pi\bar{r}$，得

$$\frac{i\bar{\omega}}{\alpha}\delta\bar{p} + \frac{\partial\delta\bar{U}}{\partial\bar{x}} = 0 \qquad (2.7.28)$$



方程(2.7.21)左边第二和第三项在积分后就简略了。对流路截面上平均的速度变化幅值可利用下式：

$$\delta\bar{U}(\bar{x},\bar{\omega}) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 2\pi\bar{r}\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{r},\bar{\omega})\,d\bar{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 2\pi\bar{r}\delta\bar{u}^0\times r(\bar{\omega},\bar{r})F(\bar{x},\bar{\omega})\,d\bar{r}$$

$$= 2F(\bar{x},\bar{\omega})\int_0^1 \bar{r}(\delta\bar{z}^0-1)\,d\bar{r} \qquad (2.7.29)$$

公式(2.7.29)中的积分可按辛普森公式进行计算，因为从方程(2.7.27)的数值解中对半径上每一点的$\delta\bar{z}^0$值是已知的。将方程(2.7.28)对$\bar{x}$进行微分：

$$\frac{i\bar{\omega}}{a}\cdot\frac{d\delta\bar{p}}{d\bar{x}} + \frac{d^2\delta\bar{U}}{d\bar{x}^2} = 0 \qquad (2.7.30)$$

从式(2.7.29)求出$\delta\bar{U}$的二阶导数：

$$\frac{d^2\delta\bar{U}}{d\bar{x}^2} = \frac{1}{\beta^2}F''(\bar{x},\bar{\omega}) \qquad (2.7.31)$$

式中 $\frac{1}{\beta^2} = 2\int_0^1 \bar{r}(\delta\bar{z}^0-1)\,d\bar{r}$

然后把求出的关系式(2.7.26)和(2.7.31)代入方程(2.7.30)，即得计算函数$F(\bar{x},\bar{\omega})$的常微分方程

$$-\bar{\omega}^2\beta^2F(\bar{x},\bar{\omega}) + F''(\bar{x},\bar{\omega}) = 0$$

此方程的解具有如下形式：

$$F(\bar{x},\bar{\omega}) = A_1(\bar{\omega})\exp(\beta\bar{\omega}\bar{x}) + B_1(\bar{\omega})\exp(-\beta\bar{\omega}\bar{x}) \qquad (2.7.32)$$

式中 $A_1(\bar{\omega})$、$\beta(\bar{\omega})$——系数。

将解式(2.7.32)代入关系式(2.7.29)，得流路截面上平均速度变化幅值的表达式

$$\delta\bar{U}(\bar{x},\bar{\omega}) = C_1(\bar{\omega})\exp(\beta\bar{\omega}\bar{x}) + C_2(\bar{\omega})\exp(-\beta\bar{\omega}\bar{x}) \qquad (2.7.33)$$

式中 $C_1(\bar{\omega})$、$C_2(\bar{\omega})$——常数。

将式(2.7.33)代入连续方程(2.7.28)之后可得计算沿流路轴线压力变化幅值的关系式：

$$\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega}) = i\alpha\beta[C_1(\bar{\omega})\exp(\beta\bar{\omega}\bar{x}) - C_2(\bar{\omega})\exp(-\beta\bar{\omega}\bar{x})] \tag{2.7.34}$$

利用边界条件(2.7.17)即可求出未知系数$C_1(\bar{\omega})$和$C_2(\bar{\omega})$。

将式(2.7.33)和(2.7.34)代入边界条件(2.7.17)之后就求出系数$C_1(\bar{\omega})$和$C_2(\bar{\omega})$，然后求出速度和压力变化幅值与坐标$\bar{x}$和频率$\bar{\omega}$的关系式

$$\delta\bar{U}(\bar{x},\bar{\omega}) = \frac{1}{D}\ \langle\gamma_2[(\alpha-\psi_1)\exp(-\beta\bar{\omega}\bar{x}) + (\alpha+\psi_1)\exp(\beta\bar{\omega}\bar{x})]\delta\bar{y}_2 - \gamma_1\{(\alpha+\psi_2)\exp[-\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})] + (\alpha-\psi_2)\exp[\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})]\}\delta\bar{y}_1\rangle \tag{2.7.35}$$

$$\delta\bar{p}(\bar{x},\bar{\omega}) = \frac{\alpha}{D}\ \langle\gamma_2[(\alpha+\psi_1)\exp(\beta\bar{\omega}\bar{x}) - (\alpha-\psi_1)\exp(-\beta\bar{\omega}\bar{x})]\delta\bar{y}_2 - \gamma_1\{(\alpha+\psi_2)\exp[-\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})] - (\alpha-\psi_2)\exp[\beta\bar{\omega}(1-\bar{x})]\}\delta\bar{y}_1\rangle \tag{2.7.36}$$

式中

$$D = (\alpha+\psi_1)(\alpha-\psi_2)\exp(\beta\bar{\omega}) - (\alpha-\psi_1)(\alpha+\psi_2)\exp(-\beta\bar{\omega})$$

利用关系式(2.7.25)、(2.7.26)和(2.7.29)即可得计算流路任一截面上的速度幅值变化量的瞬时值，

$$\delta\bar{u}(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\omega}) = \delta\bar{z} - \frac{1}{i\bar{\omega}\alpha}\cdot\frac{\partial\delta\bar{p}}{\partial\bar{x}} = \delta\bar{z}^0F(\bar{x},\bar{\omega}) - F(\bar{x},\bar{\omega}) = \beta^2\delta\bar{U}(\bar{x},\bar{\omega})(\delta\bar{z}^0-1) \tag{2.7.37}$$

由关系式$\delta u = \delta\bar{u}\exp(i\bar{\omega}\bar{t})$使无量纲速度变化量与变化量的幅值联系起来，而速度的实数分量则由下式确定

$$Re[\delta u(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\omega})] = |\delta u(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\omega})|\cos(\bar{\omega}\bar{t}+\varphi) \tag{2.7.38}$$

式中 $\varphi = \arg[\delta u(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\omega})]$

图2.23列出了在各种雷诺数$Re = U_0 2R/\nu$和各种频率下按公式(2.7.37)、(2.7.38)及$\xi = R - r$计算的流路壁面附近的速度变



化量分布图。对速度变化量分布图的比较表明，速度主要在靠近壁面很狭的一层内发生变化。

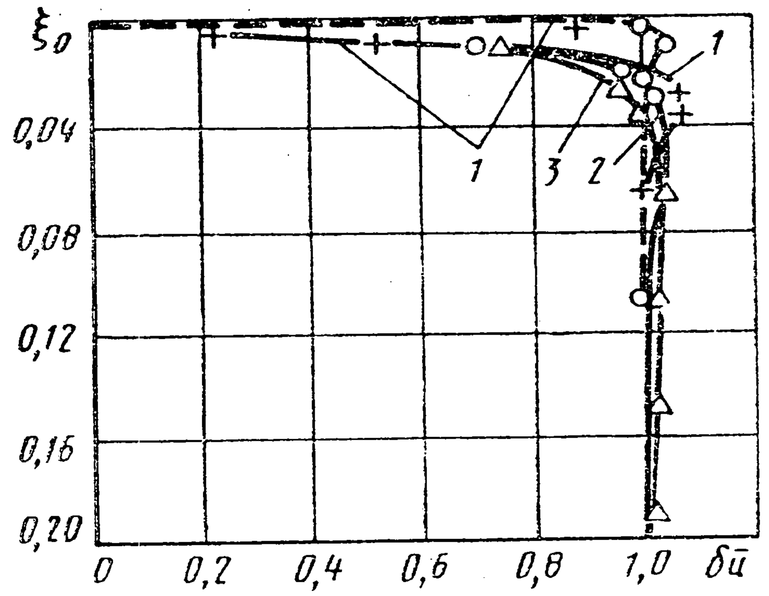



图2.23 紊流中速度变化量分布图

—— —— $\omega = 433s^{-1}$；

———— $\omega = 4767s^{-1}$；

1 —— $Re = 3.7\times10^4$；

2 —— $Re = 2.6\times10^4$；

3 —— $Re = 667$

壁面附近速度分布图的特征与对流路施加谐波振荡后紊流中平均速度瞬时值的测量结果[7]在定性上是符合的。

剩下的一直到流路轴线的区域内其分布图是平的曲线。在脉动的层流情况下具有一定厚度$\delta$的动力层，在距壁面为$\delta$的这一层深度内，与液体振荡有关的各种扰动会传播到液体中去。层厚$\delta\infty\sqrt{\nu/\omega}$随着频率的增加而减小[7]。从图2.23所列的曲线分析可知，在脉动的紊流中速度交变分量也存在着一定的干扰传播深度$\delta_T$，它与$Re = U_0 2R/\nu$有关。这是因为在紊流中粘性效应取决于紊流粘度$\nu_T$，紊流粘度不是物质的物理常数，而由流动条件来确定，并与$Re$有关。随着$Re$增大，动力层厚度$\delta_T$减小。在一定的频率下动力层厚度$\delta_T$可小于位于壁面与坐标$\xi_1$之间的粘性层厚度(见图2.22)。在这种情况下，速度交变分量的所有变化都发生在液体动力粘度$\nu$起决定性作用的流动区内。

为了对所提出的流路内非稳态紊流数学模型的效果进行检验，在专门的动态装置上进行了试验。研究了水在两条流路内的流动情况，两条流路的长度一样，都是6.3m，直径分别为10mm和4mm。水从一个集合器供给两条流路，在集合器前装有节流

式脉动发生器。水从共用的集合器供应两流路，以保证两流路内相同的入口条件和干扰的同一性。两流路的末端都装有节流孔板，其孔径是依据保证两流路内的条件为$U_0 \approx 2m/s$来选定的。压力振荡用装于流路入口以及流路出口处孔板前的小惯性电感式仪表测量。在谐波干扰试验开始前，在各种流量下进行了静态液流试验以确定流路内的摩擦损失系数和节流孔板的特性。

当用脉冲发生器在流路入口产生谐波干扰进行试验时，入口和出口处压力交变分量、水通过流路的总流量（涡轮流量计测量的）以及脉冲发生器状况的初次变换器信号的测量结果都记录在多路磁带录音机上。液路频率试验结果用传递函数分析器进行处理，并把原始信息输出到穿孔机上。在电子计算机上进行二次处理[6]。

两种直径流路的数据处理结果以幅频特性曲线及相频特性曲线图示于图2.24。图2.24上小圆点表示流路传递函数$\delta\bar{p}(1)/\delta\bar{p}(0)$的试验点，其中$\delta\bar{p}(1)$、$\delta\bar{p}(0)$——分别为流路出口（孔板前）和入口的压力振幅；实线表示用水流的四层模型公式(2.7.36)计算得出的频率特性曲线；点划线表示用考虑了摩擦与频率的关系的假设的层流公式(2.7.19)计算的频率特性曲线。在此图上还用虚线表示了用紊流准稳态模型公式(2.3.15)的计算结果。

当按假设的层流模型计算时，代入公式(2.7.19)中的$\beta$，不是取决于液体的动力粘度$\nu$，而是取决于假设的有效粘度$\nu_{э\Phi}$，它按流路内摩擦阻力系数$\lambda$求得，而$\lambda$则用稳定工况下液流试验的数据取得。这时有效粘度$\nu_{э\Phi}$按下式求出：

$$\lambda = 64/Re = 64\nu_{э\Phi}/(U_0 2R)$$

把按流路内测得的压降值求出的$\lambda$的实际值代入上式。

流路出口孔板上的压降实际上等于流路内压力，而孔板前存在着某些容积——初次压力转换器膜片附近的容腔，估算表明，必须把该容腔考虑到计算中去。相应地所述的出口边界阻抗写成



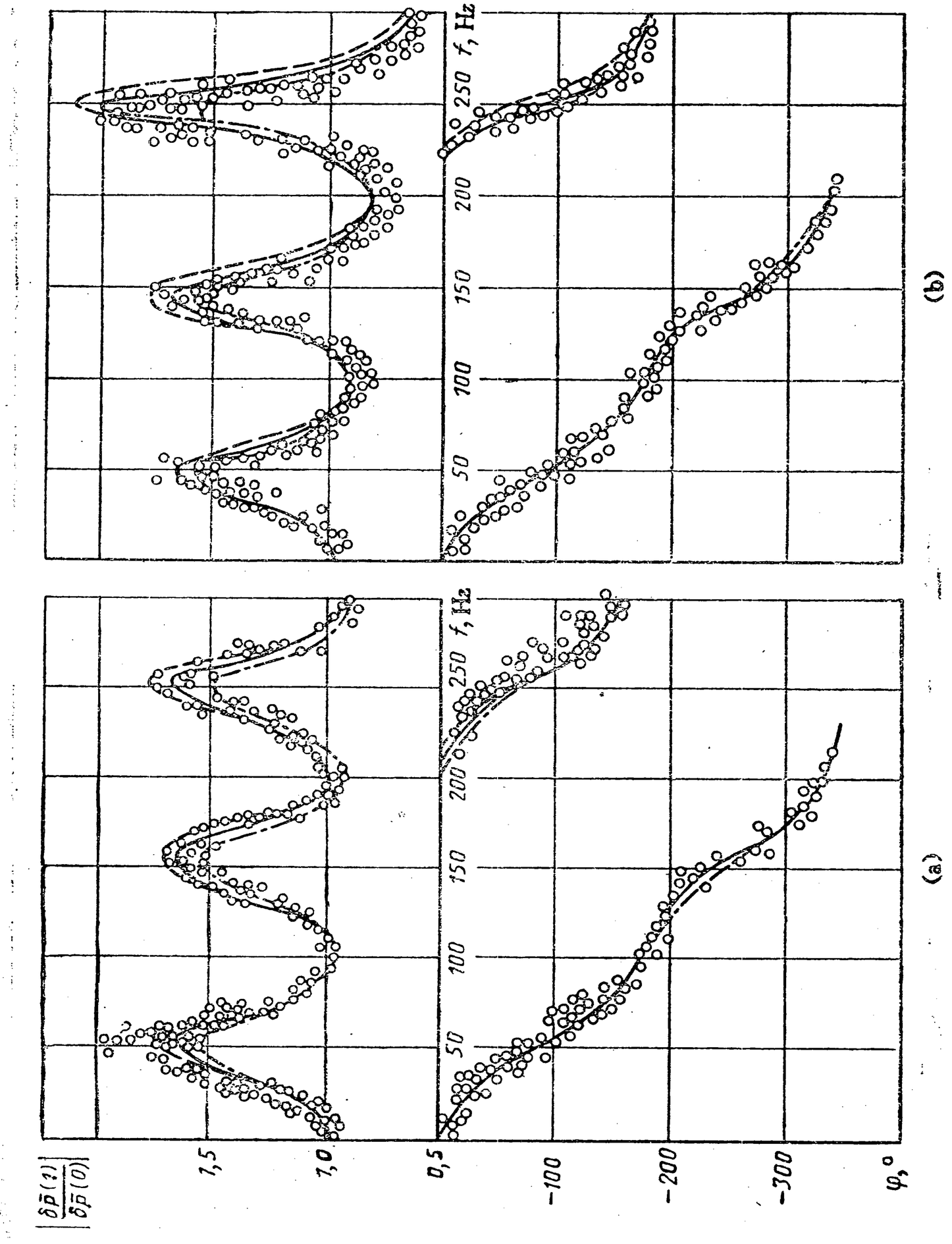



图2.24 流路频率传递函数

(а)直径为10mm的流路； (б)直径为4mm的流路。

如下表达式：

$$\psi_2 = \left(\frac{p^2}{2\Delta p_2} + \frac{i\omega V_2 p_2}{Ga^2}\right)^{-1}$$

式中 $p_2$——孔板前压力；

$\Delta p_2$——孔板的压降；

$G$——通过流路的液体流量；

$a$——流路内声速。

图2.24列出的流路幅频特性曲线具有谐振特性。由于初次变换器容腔的容积影响，小直径流路的二次谐振及三次谐振的高度均比一次谐振的高。由试验点与计算曲线的比较可以看出，按非稳态紊流四层模型的计算结果比按液流准稳态模型的计算结果更接近于试验数据。四层模型计算结果与准稳态模型计算结果的差异随着摩擦损失的增加(在本情况下为流路直径减小)和振荡频率的增加而增大。按假设的层流模型计算的幅频特性曲线稍许低于按四层模型计算的幅频特性曲线，但它们与按准稳态模型计算的幅频特性曲线相比，与试验数据差别很小。图2.24所列的按各种流动模型计算的相频特性曲线相互间没有明显的差别，在所研究的频率范围内都接近于试验数据。

试验和计算数据的比较结果表明，对于计算长流路的整体动态特性来说，流路内非稳态紊流的四层模型具有相当好的效果。Д.Н.波波夫的文章中也作出了类似的结论[26]。在所研究的参数变化范围内从计算方法的观点出发，用颇为简单的假设的非稳态紊流的层流模型来描述流路的动态特性是完全满足的。

对所述的计算和试验结果分析后表明，具有液体流动的流路，若其局部阻力的压降大于因液体与壁面摩擦而引起的压降，或其频率量级在一次谐振和二次谐振范围内，用关系式(2.3.15)和(2.3.16)来描述是相当精确的。这时因摩擦损失而引起的压降已加到局部阻力的压降上。液体火箭发动机内所有具有液体流动的流路基本上都满足上述条件。因此以下在描述相当宽的频率范



围内的发动机动态特性时将采用最简单的不考虑对壁面摩擦的流路分段模型。但是上述一切情况不属于无液体流动的流路，在液体火箭发动机内无液体流动的流路为调节和测量系统的脉冲管路或者是航天器多发动机装置中的部分供应管路，在这种发动机装置中只有部分发动机工作。

如果在无液体流动(即带有固定不动的液体)的流路中不考虑对壁面的摩擦压力损失，那么在计算频率特性时就会在谐振频率上得出无限多的幅值，而在建立过渡过程的曲线图时有可能出现非衰减振荡。考虑摩擦力与频率有关系的强迫振荡的计算方法前面已述及。

### 2.7.3. 过渡过程

首先着重研究液体在流路内层流情况下的过渡过程计算方法。在充满弱可压缩成滴液体的无流动(盲腔式)流路内，液流通常为层流。对层流来说，过渡过程的计算方法已进行了研究，并由试验所证实。

在2.7.1节分析流路内非稳态脉动流的特性时已经指出，在层流情况下摩擦应力主要与频率有关。随着频率的增加速度分布图发生变化——在低频下基本上为泊肃叶流动所特有的抛物线，在高频下在中心部分几乎呈矩形。相应地随着频率增加摩擦应力的交变分量也增加。试验结果[6,33]表明，发生在具有层流的液路内的过渡过程下的压力波会产生很大的畸变(图2.25)。在2.7.1节中曾指出，弱可压缩成滴液体的压缩性不会影响到非稳态摩擦的应力。弱可压缩液体的摩擦应力和不可压缩液体的摩擦应力相等。利用上面所提到的情况，把液体轴对称非稳态流的运动方程(2.7.2)写为有量纲变量的方程

$$\frac{\partial \delta u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \delta p'}{\partial x} = \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \delta u'}{\partial r}\right) \qquad (2.7.39)$$

给定压力梯度，即$(1/\rho)\partial\delta p/\partial x = \delta f'(t)$，利用拉普拉斯变

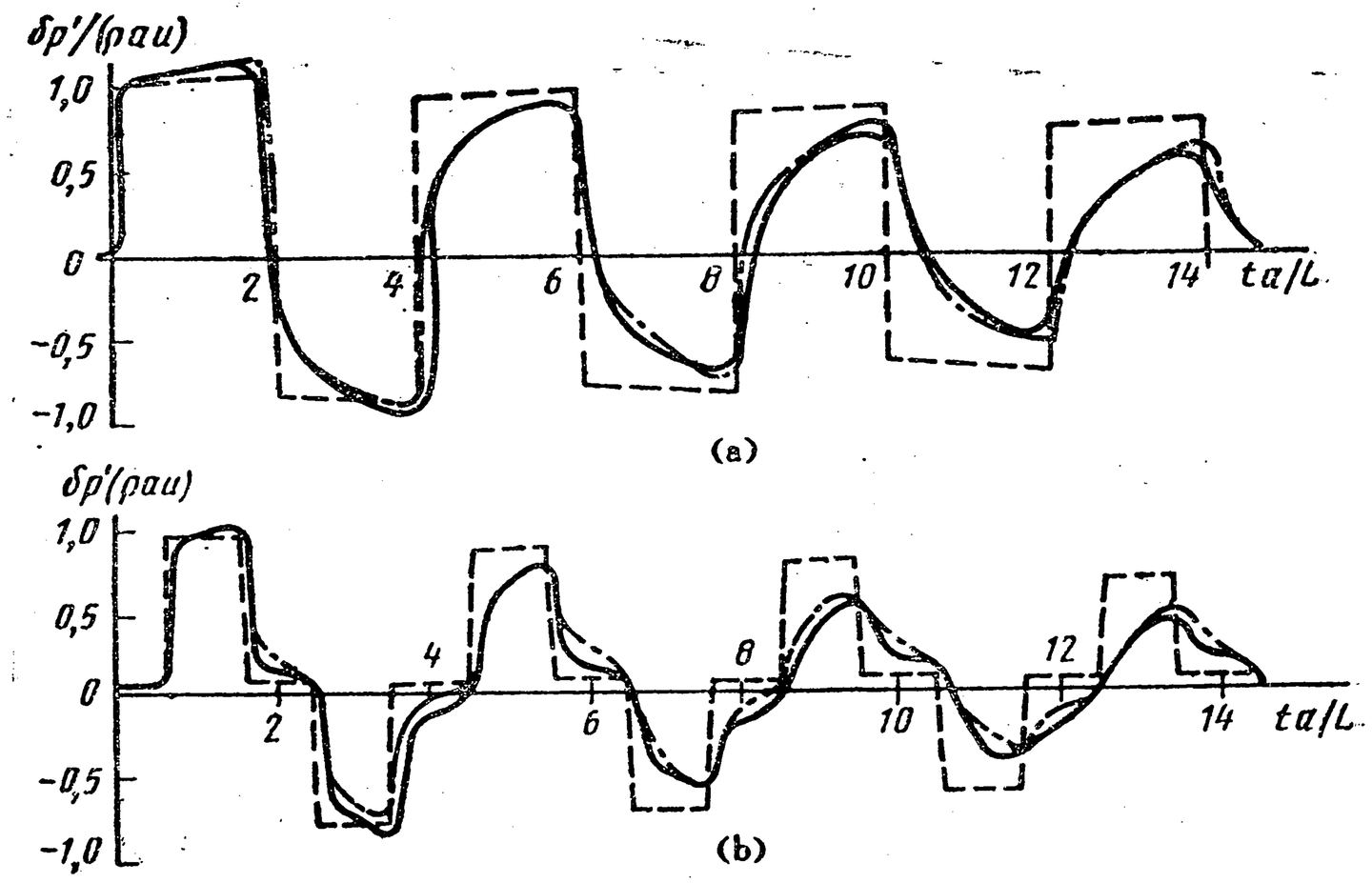



图2.25 在阀突然关闭后流路内粘性液体阻滞情况下 $\delta p'(\rho a u)$ 的变化图

(a)流路末端靠近阀处；(b)流路中间点。

———由试验方法得到；

- - - -考虑准稳态摩擦应力时计算得出；

-·-·-·—按公式(2.7.51)～(2.7.53)计算得出。

换的公式[5]，把方程(2.7.39)写为变换式

$$\frac{d^2\delta\hat{u}'}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\delta\hat{u}'}{dr}-\frac{q}{v}\delta\hat{u}'=\frac{1}{v}\delta\hat{f}' \qquad (2.7.40)$$

式中 $\delta\hat{u}'$ 和 $\delta\hat{f}'$ ——函数 $\delta u'$ 和 $\delta f'$ 的变换式；

$q$——算符。

方程(2.7.40)是零阶贝塞耳方程，它的解如下式

$$\delta\hat{u}'(r,q)=C_1(q)J_0(i\sqrt{q/v}\cdot r)+C_2(q)Y_0(i\sqrt{q/v}\cdot r)-\delta\hat{f}/q$$

式中 $J_0$、$Y_0$——第一类和第二类零阶贝塞耳函数。

任意常数 $C_1$ 和 $C_2$ 由速度的边界条件来确定：当 $r=R$ 时



$\delta u'=0$，$r=0$ 时 $\delta u'(r)$ 是有限的，因而

$$C_2=0,\quad C_1=(\delta\hat{f}'/q)/J_0(i\sqrt{q/v}\cdot R)$$

速度变换式的公式如下式

$$\delta\hat{u}'=(\delta\hat{f}'/q)[J_0(i\sqrt{q/v}\cdot r)/J_0(i\sqrt{q/v}\cdot R)-1] \qquad (2.7.41)$$

由式(2.7.41)可得出流路壁面摩擦应力的变换关系式

$$\delta\hat{\tau}'_w(q)=-\rho v\left.\frac{\partial\delta\hat{u}'}{\partial r}\right|_{r=R}$$

$$=-\frac{\rho R\delta\hat{f}'J_1(i\sqrt{q/v}\cdot R)}{i\sqrt{q/v}\cdot RJ_0(i\sqrt{q/v}\cdot R)}$$

$$=-\frac{\rho R\delta\hat{f}'}{I_1(i\sqrt{q/v}\cdot R)} \qquad (2.7.42)$$

式中 $I_1(y)=y\{J_0(y)/[J_1(y)]\}$ 为一阶贝塞耳函数；

$y$ 为复数。

如果用瞬时速度变化量的平均幅值的变换式代入它的关系式(2.7.41)后，式(2.7.42)可转换成下式：

$$\delta\hat{U}'(q)=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r\delta\hat{u}'\,dr$$

$$=\frac{\delta\hat{f}'}{q}\left[\frac{2J_1(i\sqrt{q/v}\cdot R)}{i\sqrt{q/v}\cdot RJ_0(i\sqrt{q/v}\cdot R)}-1\right]$$

$$=\frac{\delta\hat{f}'}{q}\left[\frac{2}{I_1(i\sqrt{q/v}\cdot R)}-1\right] \qquad (2.7.43)$$

引用变换式的微分定律 $L(\partial\delta U/\partial t)=q\delta\hat{U}'(q)$，借助式(2.7.43)从方程(2.7.42)中消去 $\delta f'$，得

$$\delta\hat{\tau}'_w(q)=\frac{\rho Rq\delta\hat{U}'(q)}{[I_1(i\sqrt{q/v}\cdot R)-2]}=\frac{\rho R(\partial\delta\hat{U}'/\partial t)}{[I_1(i\sqrt{q/v}\cdot R)-2]} \qquad (2.7.44)$$

方程(2.7.44)把壁面摩擦应力的变换式和流路中液流加速度

的变换式联系在一起。为了转变到原函数必须利用卷积定则[5]：

$$\delta\tau'_w(t)=\int_0^t \Phi(\theta)\frac{\partial\delta U'(t-\theta)}{\partial t}\mathrm{d}\theta \qquad (2.7.45)$$

式中 $$\Phi(\theta)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega}\hat{\Phi}(q)\exp(qt)\mathrm{d}q \qquad (2.7.46)$$

$$\hat{\Phi}(q)=\frac{\rho R}{[I_1(i\sqrt{q/\nu}\cdot R)-2]} \qquad (2.7.47)$$

加权函数$\Phi(t)$可用残数定理求出，为此必须求出被积函数$\hat{\Phi}(q)$的极点$q_K$，它与方程$I_1(i\sqrt{q/\nu}\cdot R)=2$之根相符。极点$q_K$的残数按下式求出

$$Res[\hat{\Phi}(q)\exp(qt)]_{q=q_k}=\rho R\exp(q_k t)[\partial I_1(q_k)/\partial q]^{-1}$$
$$=(2\rho\nu/R)\exp(q_k t)$$

因为

$$\partial I_1(q_k)/\partial q=R^2/(2\nu)$$

式中 $k=1,2,3,\cdots$。

此式除坐标原点的残数外，对所有残数都是正确的，坐标原点的残数为

$$Res[\hat{\Phi}(q)\exp(qt)]_{q=0}=4\rho\nu/R$$

引入无量纲时间$\bar{t}=(\nu/R^2)t$和$\eta_k^2=-q_kR^2/\nu$，考虑到所列残数关系式，可求出

$$\Phi(\bar{t})=\frac{4\nu\rho}{R}+\frac{2\nu\rho}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\eta_k^2\bar{t}) \qquad (2.7.48)$$

式(2.7.48)中的级数在$\bar{t}>0$时是收敛的，但当$\bar{t}<0.02$时它收敛得很慢。在著作[6]中列出了所求得的前20个$\eta_k$值(5.13562；8.41724；11.61984；14.79595；17.95982等)和在$\bar{t}<0.02$时确定函数$\Phi(\bar{t})$的专用公式

$$\Phi(\bar{t})=\frac{4\nu\rho}{R}+\frac{2\rho\nu}{R}(0.282095\bar{t}^{-0.5}-0.250000$$



$$+1.057855\bar{t}^{0.5}+0.937500\bar{t}+0.396696\bar{t}^{1.5}$$
$$-0.351563\bar{t}^2) \qquad (2.7.49)$$

将由公式(2.7.48)或(2.7.49)所确定的加权函数代入式(2.7.45)后就可算出壁面上摩擦应力的瞬时值。分离出表征稳态摩擦的应力项后，就可把式(2.7.45)方便地转换为：

$$\delta\tau'_w(t)=\frac{4\rho\nu\delta U'(t)}{R}+\frac{2\rho\nu}{R}\int_0^{\bar{t}}\frac{\partial\delta U'(\bar{\theta})}{\partial t}W(\bar{t}-\bar{\theta})\mathrm{d}\bar{\theta} \qquad (2.7.50)$$

式中 加权函数

$$W(\bar{t})=\frac{\Phi(\bar{t})-4\rho\nu/R}{2\nu\rho/R}$$

式(2.7.50)右边第二部分考虑了具有一定权值的速度随时间变化的影响，而为计算加权函数可利用式(2.7.48)或(2.7.49)。对稳态层流来说摩擦应力和水力阻力与速度成线性关系，而解式(2.7.50)用于获得作为无量纲时间$\bar{t}$的函数的摩擦应力。所以特性曲线(2.5.9)和(2.5.10)的方程可适当地写成下列形式：

$$\delta p'_B-\delta p'_A+\rho a(\delta u'_B-\delta u'_A)+(2\delta\tau'_w a/R)(t_B-t_A)=0 \qquad (2.7.51)$$

$$-(\delta p'_B-\delta p'_D)+\rho a(\delta u'_B-\delta u'_D)+(2\delta\tau'_w a/R)(t_B-t_D)=0 \qquad (2.7.52)$$

由式(2.7.50)确定的带$\delta\tau'_w$的各项考虑了速度随时间变化的影响。因为随时间的变化是已知的，所以对于下标为$i$、$k$点的摩擦应力，推荐用下面的等差式来代替积分式(2.7.50)(见图2.9(b)[6]：

$$\tau_{wik}=\frac{4\rho\nu\delta U'_{ik}}{R}+\frac{2\rho\nu}{R}\{(\delta U'_{ik}-\delta U'_{i(k-2)})W(\Delta t)$$
$$+(\delta U'_{i(k-2)}-\delta U'_{i(k-4)})W(3\Delta t)+\cdots+(\delta U'_{i2}$$
$$-\delta U'_{i0})W[(k-1)\Delta t]\} \qquad (2.7.53)$$

利用无量纲时间$\bar{t}$的函数形式的关系式(2.7.48)、(2.7.49)

就可算出加权函数$W(\bar{t})$之值。函数$W(t)$在$\bar{t}\to\infty$时趋于零。所以可选出某一$\bar{t}_{max}$，以便使$W(\bar{t})$之值在$\bar{t}>\bar{t}_{max}$下小到可以忽略不计。在这种情况下式(2.7.53)的项数不会超过$\bar{t}_{max}R^2/(2v\Delta t)$。

用考虑摩擦应力与频率有关的特性曲线法的计算结果与试验结果[7]相符。在长度为36m直径为25.4mm的流路内油在层流情况下阀门突然关闭后会发生压力振荡（见图2.25）。按公式(2.7.51)、(2.7.52)和(2.7.53)以及按考虑准稳态摩擦的特性曲线方法进行了计算。准稳态摩擦的计算结果是很粗略的，基本上只有振荡频率才和试验相一致。正是考虑了摩擦应力和频率的关系才能大致精确地弄清楚压力振荡振幅衰减和形状畸变的特点。

利用公式(2.7.53)时要求存贮前面各瞬间的大量速度数据。为了缩短计算时间，特里克哈[6]提出了如下近似函数，它相当精确地逼近确定加权函数的关系式

$$W(\bar{t})=\sum_{j=1}^{3}W_j(\bar{t})=\sum_{j=1}^{3}\exp(-n_j\bar{t}) \qquad (2.7.54)$$

式中 $j=1,2,3,\cdots$；

$n$——系数。

将式(2.7.54)代入到方程(2.7.50)中，并取$\bar{t}=tv/R^2$，即得

$$\delta\tau'_w(t)=\frac{4\rho v\delta U'(t)}{R}+\frac{2\rho v}{R}(y_1+y_2+y_3) \qquad (2.7.55)$$

式中 $y_j=\int_0^t W_j(t-\theta)(\partial\delta U'(\theta)/\partial t)\mathrm{d}\theta$

利用求$y_j$的公式及式(2.7.54)后，就可求出流路$i$截面上两时间层$k$和$(k-1)$的$y_j$值之间的联系：

$$y_{ji\,k}=y_{ji(k-1)}\exp[-n_j(v/R^2)\Delta t]+m_j(\delta U'_{i\,k}-\delta U'_{i(k-1)}) \qquad (2.7.56)$$

式中 $m$——系数。

当利用式(2.7.53)来求解时，分析表明[6]，必须在流路的每一截面上存贮500个以上的时间间隔的速度值。而当利用公式(2.7.54)～(2.7.56)时，对每一个$i$截面一共只要存贮4个前面时间间隔的数值$y_{1i(k-1)}$，$y_{2i(k-1)}$，$y_{3i(k-1)}$和$\delta U'_{k-1}$。当利用方程(2.7.55)和(2.7.56)时，可以算出与频率有关的摩擦应力的现时值。对近似式(2.7.56)建议取下列一些系数[6]：$m_1=40.0$；$m_2=8.2$；$m_3=1$；$n_1=8000$；$n_2=200$；$n_3=26.4$。

在这些系数值下，除$\bar{t}<0.00005$外函数$W(\bar{t})$在所有$\bar{t}$的变化范围内均能相当好地近似表示。用特性曲线法按公式(2.7.51)～(2.7.53)和(2.7.55)～(2.7.56)计算的结果同试验结果进行比较表明，两种结果是完全符合一致的。此外，在利用式(2.7.55)时得出了确定脉动流中摩擦应力的公式，该式中的平均速度按如下规律变化

$$\delta U'=\delta U'_0\exp(i\omega t)$$

$$\delta\tau'_w(\omega)=\frac{\rho v}{R}\left[4+2i\omega\sum_{j=1}^{3}\frac{m_j}{(i\omega+n_j)}\right]\delta U'_0\exp(i\omega t) \qquad (2.7.57)$$

式(2.7.57)在不计入乘数$\delta U'_0\exp(i\omega t)$的情况下实数分量和虚数分量的计算结果同按脉动层流精确公式(见2.7.1节)计算结果进行比较表明，在无量纲参数值$s=R(\omega/v)^{1/2}=150$以下两者之间吻合很好。对于大的$s$值来说，式(2.7.54)必须进行修正，即增加指数项的数目。此外，为了计算非稳态紊流的参数，建议将关系式(2.7.55)作如下修正：

$$\tau_w(t)=\frac{0.316\rho U^2}{8Re^{0.25}}+\frac{2\rho v}{R}(y_1+y_2+y_3) \qquad (2.7.58)$$

上式建立在如下假定的基础上：摩擦应力的分量与频率有关；紊流的摩擦应力分量同层流的相同。另一种办法，即用有效粘度$\nu_{эф}$代替式(2.7.58)中的液体动力粘度$v$也是可以的，该办法

已由对流路内的紊流进行强迫振荡试验所验证[6]。$\nu_{э\phi}$之值则用求层流摩擦阻力系数的公式$\lambda = 64/Re = 64\nu_{э\phi}/(UD)$确定，$\lambda$之值则用流路在稳态工况下的液流试验数据代入。

## 2.8 建立动力装置分支管路系统数学模型的矩阵法

### 2.8.1 概述

不同功用的多分支的气液系统的静特性和动态特性的计算和分析有许多方法，对使用电子计算机来说，其中最普遍和最适用的方法是以气液流路原理为基础的矩阵-拓朴法[4,6,7]。气液流路的理论基础是在流路节点和回路处服从质量和动量守恒定律——类似于电路中的基尔霍夫定律，用此理论可以模拟复杂气液系统各种物理性质的过程。气液流路质量和动量守恒定律把流路节点上的流量和其分支的压降建立成矩阵关系式。写成矩阵形式可保证被分析系统的结构和组成部分的描述既紧凑而且又直观。

但是，由于液体火箭发动机中包含着液路、非等温燃气流流道和机械装置(调节器、涡轮泵等)，使用矩阵法时要用到高阶矩阵，从而增加电子计算机上的计算时间。而同时气液系统的构成多多少少是单值的，所以把它们写成联结矩阵(关联矩阵)没有意义。另一方面，利用矩阵-拓朴法的原理，即把液路各单个部分的方程写成四端网络方程式或信号流图的形式是卓有成效的，因为这样，可建立起分支系统的数学模型，并简化了它们的动态特性在电子计算机上的计算。

### 2.8.2 液路分段作为四端网络

描述圆柱形流路分段内成滴无粘液体的稳态谐振方程(2.3.15)和(2.3.16)，把沿流路长度各不同截面上的速度和压



力变化幅值$\delta\bar{u}(\bar{x},\ \bar{\omega})$和$\delta\bar{p}(\bar{x},\ \bar{\omega})$同流路边界上的干扰作用幅值$\delta\bar{y}_{1i}$和$\delta\bar{y}_{2j}$彼此间联系在一起。当建立由许多管道和其它水力组件(泵、调节器、局部阻力等)组成的液路的数学模型时，最方便的是把液路分段内的液柱各自分开。

为了获得流路输入端液体参数变化幅值$\delta\bar{u}(0)$和$\delta\bar{p}(0)$同流路输出端类似参数变化幅值$\delta\bar{u}(1)$和$\delta\bar{p}(1)$的相关方程，使用通解(2.3.15)和(2.3.16)，其中给定$\psi_1=\psi_2=0$，$\delta\bar{y}_{11}=\delta\bar{p}(0)$，$\delta\bar{y}_{21}=\delta\bar{p}(1)$，$\gamma_{11}=\gamma_{21}=1$，当$i,j=2,3,\cdots$时$\delta\bar{y}_{1i}=\delta\bar{y}_{2j}=0$。

在这样的边界条件下流路两端的压力偏差为给定的，而速度偏差则为未知的。将上列边界条件代入解式(2.3.16)后，先取$\bar{x}=0$，然后取$\bar{x}=1$，可得

$$\delta\bar{u}(0) = -\frac{i}{\alpha}\mathrm{ctg}\bar{\omega}\delta\bar{p}(0) + \frac{i}{\alpha\sin\bar{\omega}}\delta\bar{p}(1) \tag{2.8.1}$$

$$\delta\bar{u}(1) = -\frac{i}{\alpha\sin\bar{\omega}}\delta\bar{p}(0) + \frac{i}{\alpha}\mathrm{ctg}\bar{\omega}\delta\bar{p}(1)$$

将流路分段输入端的速度和压力偏差与输出端的同样参数的偏差联系起来的方程(2.8.1)即为四端网络方程(按包含在方程组内的变量数目)。方程组(2.8.1)是不闭合的，因为两个方程联系了4个参数。这些方程描述了在不考虑两端任意边界条件下作为分布参数系统的液柱的振荡(边界条件$\psi_1=\psi_2=0$在由通解获得流路的四端网络方程时已给定。这种方法的目的在于消除了边界条件对流体力学方程求解的影响)。为了使方程组闭合，必须对方程(2.8.1)补充边界条件。这种情况下还要回到原始的解式(2.3.16)。

为了建立描述液体在系统中强迫振荡的模型，最方便的是把液路系统元件的线性化动态方程写成四端网络方程的形式表示速度(流量)变化幅值与入口和出口压力变化幅值间函数关系的四端网络方程称为$y$-参数方程[4,6,7]。作为四端网络的流路分段方程

可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}(0)\\ \delta\bar{u}(1)\end{bmatrix}=\frac{i}{\alpha}\begin{bmatrix}-\mathrm{ctg}\varpi & \dfrac{1}{\sin\varpi}\\ -\dfrac{1}{\sin\varpi} & \mathrm{ctg}\varpi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{p}(1)\end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{y}[\delta\bar{p}(0)\ \ \delta\bar{p}(1)]^{\mathrm{T}} \qquad (2.8.2)$$

式中 **y**——四端网络的导纳矩阵；

**T**——矩阵(矢量)的转置标记。

对流路分段内的非粘性液体，导纳(速度或流量变化幅值对压力变化幅值之比)是阻力(阻抗)的倒数。导纳是虚数。

对于由两个方程联系的四个参数，可能有6种把它们分为两对参数偶的方案，相应地有6个四端网络方程的表示式。从一种表示式转换到另一种表示式的运算并不复杂。它可按已知公式[7]导出。除**y**-参数表示式外，有时采用将分段输出端液流参数变化幅值与输入端的变化幅值联系在一起的**B**-参数表示式较为方便。变换方程(2.8.1)后，得

$$\delta\bar{p}(1)=\cos\varpi\delta\bar{p}(0)-i\alpha\sin\varpi\delta\bar{u}(0)$$

$$\delta\bar{u}(1)=-(i/\alpha)\sin\varpi\delta\bar{p}(0)+\cos\varpi\delta\bar{u}(0) \qquad (2.8.3)$$

或变成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{u}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varpi & -i\alpha\sin\varpi\\ -(i/\alpha)\sin\varpi & \cos\varpi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{u}(0)\end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{B}[\delta\bar{p}(0)\ \ \delta\bar{u}(0)]^{\mathrm{T}} \qquad (2.8.4)$$

式中 **B**——四端网络转移(从输入端转移到输出端)矩阵。

用这种方法也可得出把参数变化幅值以逆序(从输出端到输入端)联系的关系式，即**A**-参数表示式，

$$\delta\bar{p}(0)=\cos\varpi\delta\bar{p}(1)+i\alpha\sin\varpi\delta\bar{u}(1) \qquad (2.8.5)$$

$$\delta\bar{u}(0)=(i/\alpha)\sin\varpi\delta\bar{p}(1)+\cos\varpi\delta\bar{u}(1)$$

或变成矩阵形式



$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{u}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varpi & i\alpha\sin\varpi\\ (i/\alpha)\sin\varpi & \cos\varpi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{u}(1)\end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{A}[\delta\bar{p}(1)\ \ \delta\bar{u}(1)]^{\mathrm{T}} \qquad (2.8.6)$$

式中 **A**——四端网络转移(从输出端转移到输入端)矩阵。

### 2.8.3 具有集中参数的元件作为四端网络

液路使发动机许多组件、元件彼此间联系在一起，它们在前面已经当作具有集中参数的元件描述过。为了建立把液路分段看作具有集中参数元件的发动机液路的数学模型，最方便的也是把列入液路集中参数元件的方程表示为四端网络方程形式。例如，当$\delta(\overline{\mu F})=0$时(其中$\mu$——流量系数)，局部水力阻力方程(2.1.16)用前面所采取的四端网络表示法可写为下式(对变化幅值)：

$$\delta\bar{p}(0)=(p_2/p_1)\delta\bar{p}(1)+(2\Delta p/p_1)\delta\bar{u}(1)$$

$$\delta\bar{u}(0)=\delta\bar{u}(1) \qquad (2.8.7)$$

或变成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{u}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_2/p_1 & 2\Delta p/p_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{u}(1)\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{u}(1)\end{bmatrix} \qquad (2.8.8)$$

当写出方程(2.8.7)和(2.8.8)时，以及写出描述成滴液体流动的其它方程时，认为无量纲变化幅值始终遵守$\delta\bar{u}=\delta\bar{G}$的条件。考虑到$\delta u=\delta G$，惯性方程(2.1.12)在代入周期特解$\delta p=\delta\bar{p}\exp\cdot(i\omega t)$，$\delta u=\delta\bar{u}\exp(i\omega t)$后，可推导成下式

$$\delta\bar{p}(0)=\delta\bar{p}(1)+i\omega\tau_{\text{и}}\delta\bar{u}(1)$$

$$\delta\bar{u}(0)=\delta\bar{u}(1) \qquad (2.8.9)$$

或

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{u}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & i\omega\tau_{\text{и}}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{u}(1)\end{bmatrix} \qquad (2.8.10)$$

对流容也一样，利用方程(2.1.7)，可得

$$\delta\bar{p}(0)=\delta\bar{p}(1)$$
$$\delta\bar{u}(0)=i\omega\tau_{\text{。}}\delta\bar{p}(1)+\delta\bar{u}(1) \qquad (2.8.11)$$

或变成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{u}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ i\omega\tau_{\text{。}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{u}(1)\end{bmatrix} \qquad (2.8.12)$$

以上所列方程都是描述无源元件中的低强迫振荡，在无源元件中液流的能量或者耗散掉，或者从一种形式转到另一种形式。对于保证把能量供给液流或控制液体运动的有源元件(泵、调节器、可控节流装置等)也可使用四端网络方程，但它们是有源的[7]。这时整个系统的元件方程式要复杂得多。

### 2.8.4 具有串联和并联元件的流路的矩阵模型

设液路由许多串联无源元件(组件、局部阻力、管段等)组成，其中每一个元件都可用四端网络方程来描述。在这些元件中某个元件可看作为具有分布参数的元件，其余各元件可看作为具有集中参数的元件。对流路上 $n$ 个元件中的每一个元件可把方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(0)\\ \delta\bar{u}_i(0)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(1)\\ \delta\bar{u}_i(1)\end{bmatrix}\quad(i=1,2,\cdots n) \qquad (2.8.13)$$

式中 $\delta\bar{p}_i(0),\delta\bar{u}_i(0)$——流路上第$i$个元件输入端压力和速度变化幅值；

$\delta\bar{p}_i(1),\delta\bar{u}_i(1)$——元件输出端的类似值。

在两元件的接合处按前面所采用的方法把流路分为两个单个分段时必须遵守很明显的压力相等和速度相等的条件，它们在转换为无量纲变化量时为如下形式



$$\delta\bar{p}_i(1)=\delta\bar{p}_{i+1}(0)$$
$$\delta\bar{u}_i(1)=\delta\bar{u}_{i+1}(0) \qquad (2.8.14)$$

这些条件允许依次地置换矩阵——元件输出端流动参数的列代替下一个元件输入端参数的类似矩阵。例如，对第$i$个和$(i+1)$个元件，利用式(2.8.13)和(2.8.14)，可得

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(0)\\ \delta\bar{u}_i(0)\end{bmatrix}=A_iA_{i+1}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_{i+1}(1)\\ \delta\bar{u}_{i+1}(1)\end{bmatrix}$$

对流路上 $n$ 个元件的全部方程依次地重复进行类似的运算，最后可得

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_1(0)\\ \delta\bar{u}_1(0)\end{bmatrix}=\prod_{i=1}^{n}A_i\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_n(1)\\ \delta\bar{u}_n(1)\end{bmatrix}=A_{TP}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_n(1)\\ \delta\bar{u}_n(1)\end{bmatrix} \qquad (2.8.15)$$

式中 $A_{TP}=\prod_{i=1}^{n}A_i$——整个流路作为四端网络时由矩阵连乘法得出的矩阵。

对无分支的所有液体火箭发动机流路或分支前后的流路分段可得到式(2.8.15)类型的方程。

现在研究两个节点间有若干个液路系统支路并联连接的问题。在这种情况下每一个支路可以包含许多元件。借助于式(2.8.15)每一个支路的方程可简化成A-参数四端网络方程。利用A-参数和Y-参数四端网络矩阵元素之间的关系式[7]

$$\begin{bmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{a_{12}}\begin{bmatrix}a_{22} & -\Delta_a\\ 1 & -a_{11}\end{bmatrix}$$

式中 $\Delta_a=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}$

作为四端网络的每一个支路的矩阵可转换为Y-参数的矩阵

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_i(0)\\ \delta\bar{u}_i(1)\end{bmatrix}=\mathbf{Y}_i\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(0)\\ \delta\bar{p}_i(1)\end{bmatrix} \qquad (2.8.16)$$

因为所有局部阻力和其它引起压力损失的元件都是包括在系统支路之内的四端网络的组成部分，故出入同一个节点的所有各支路的入口压力变化量和出口压力变化量都是相等的。假定所有$n$个支路沿轴线的坐标读数在方向上都是一致的，可写出

$$\delta\bar{p}_1(0)=\delta\bar{p}_2(0)=\cdots=\delta\bar{p}_n(0)=\delta\bar{p}_{y1}$$
$$\delta\bar{p}_1(1)=\delta\bar{p}_2(1)=\cdots=\delta\bar{p}_n(1)=\delta\bar{p}_{y2} \qquad (2.8.17)$$

式中 $\delta\bar{p}_i(0),\delta\bar{p}_i(1)$——支路入口和出口处压力变化幅值；

$\delta\bar{p}_{y1},\delta\bar{p}_{y2}$——支路入口($\bar{x}=0$)处和出口($\bar{x}=1$)处节点处的压力变化幅值。

对入口和出口处的节点也要遵守流量平衡方程(连续方程)

$$\delta\bar{u}_{y1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{G}\delta\bar{u}_i(0)$$
$$\delta\bar{u}_{y2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{G}\delta\bar{u}_i(1) \qquad (2.8.18)$$

式中 $\delta\bar{u}_{y1},\delta\bar{u}_{y2}$——支路入口和出口处总速度(流量)无量纲变化幅值；

$\delta\bar{u}_i(0),\delta\bar{u}_i(1)$——第$i$支路入口和出口处速度无量纲变化幅值；

$G_i$——经过第$i$支路液体的平均流量；

$G$——经过整个系统液体的平均流量。

将流量平衡方程(2.8.18)代入方程(2.8.16)，考虑到条件(2.8.17)得出由$n$个并联支路组成的液路系统的线性化方程



$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_{y1}\\ \delta\bar{u}_{y2}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)\mathbf{Y}_i\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_{y1}\\ \delta\bar{p}_{y2}\end{bmatrix}=\mathbf{Y}_\Sigma\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_{y1}\\ \delta\bar{p}_{y2}\end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{Y}_\Sigma$——作为四端网络的有许多分支的液路系统的矩阵。

下一个联结液路系统支路的典型方案为由一个节点分出$n$个支路的分支结构。每一个支路可包含许多元件，它们归结于一个由方程(2.8.16)描述的四端网络。为了简单起见，认为所有支路都从一个节点分出，对此可把流量平衡条件用速度变化幅值来表示

$$\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)\delta\bar{u}_i(0)=0 \qquad (2.8.19)$$

对每一个支路可把四端网路方程(2.8.16)写成如下形式：

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_i(0)\\ \delta\bar{u}_i(1)\end{bmatrix}=\mathbf{Y}_i\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_{y1}\\ \delta\bar{p}_{yi}\end{bmatrix} \qquad (2.8.20)$$

式中 $\delta\bar{p}_{y1}$——节点处压力变化幅值，对其列出了平衡条件(2.8.19)；

$\delta\bar{p}_{yi}$——第$i$节点处压力变化幅值，第$i$支路的终端与其相联。

首先将方程(2.8.20)

$$\delta\bar{u}_i(0)=y_{i-11}\delta\bar{p}_{y1}+y_{i-12}\delta\bar{p}_{yi}$$

代入式(2.8.19)并经转换后得节点处压力变化幅值的关系式

$$\delta\bar{p}_{y1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)y_{i-12}\delta\bar{p}y_i}{\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)y_{i-11}}$$

这里矩阵元素$y_i$的下标包括：$i$(支路号码)和隔一短横的2个数字(矩阵的行和列的序列号)。

将所得的$\delta\bar{p}_{y1}$之值代入方程(2.8.20)后，即可求得任意$k$支路入口和其出口处速度变化量

$$\delta\bar{u}_k(0)=\delta\bar{G}_k(0)=-\frac{y_{k-11}\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)y_{i-12}\delta\bar{p}_{yi}}{\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)y_{i-11}}+y_{k-12}\delta\bar{p}_{yk}$$

$$\delta\bar{u}_k(1)=\delta\bar{G}_k(1)=-\frac{y_{k-21}\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)y_{i-12}\delta\bar{p}_{yi}}{\sum_{i=1}^{n}(G_i/G)y_{i-11}}+y_{k-22}\delta\bar{p}_{yk}$$

上面所得的方程可以用来求出作为具有分布参数系统的气液系统元件的带有强迫振荡的流动参数。

## 2.9 利用信号流图分析液路系统的动力学

### 2.9.1 基本定义

信号流图在线性电路理论中已得到应用，它能直观地反映系统线性数学模型中变量之间的关系，并能方便地确定系统的动态特性。任何一个系统的线性数学模型都可用信号流图的方式来表示，这时流图完全等效于方程组[4,6]。

信号流图（有向图、信号线性图）乃是节点和联结节点的线——支路之总和，线上的箭头表示信号传送的方向。每一个$i$节点都具有一个与之有关的称做节点信号的约束量$\delta x_i$，而每一个支路都由$i$节点和$j$节点之间的传输常数$a_{ij}$来表征。信号从干扰源进入系统入口。信号就是压力、流量、温度、工作介质成分的变化。对源来说节点信号乃是系统入口处给定的自变量。系统出



口处的流路截面可用出口节点来模拟，且此节点上的参数为未知数。

支路的传输常数可以是无量纲的，（当使用有量纲变量时）也可具有阻力或导纳的量纲。如果第一个节点的节点信号用$\delta x_1$表示，第二个节点用$\delta x_2$表示，且这二个节点由支路相连，其方向从第一个节点朝向第二个节点，那么支路的传输常数等于$a=\delta x_2/\delta x_1$。任一节点的节点信号等于进入该节点的信号之总和。由节点输出的节点信号在编制节点方程时不予考虑，只有当这些信号进入某一节点，在编制该节点方程时才予以考虑。

现研究四端网络方程作为编制信号流图规则的实例。这些方程为Z-参数方程时（图2.26(a)）可写成下式：

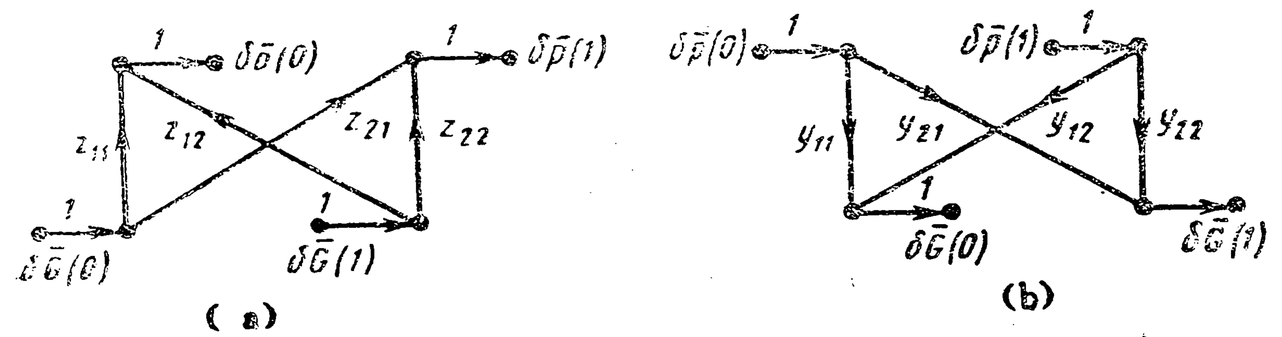



图2.26 四端网络的信号流图

（a）z-参数方程信号流图；（b）y-参数方程信号流图。

$$\delta\bar{p}(0)=z_{11}\delta\bar{G}(0)+z_{12}\delta\bar{G}(1)$$

$$\delta\bar{p}(1)=z_{21}\delta\bar{G}(0)+z_{22}\delta\bar{G}(1)$$

取四端网络输入端和输出端的流量变化幅值为输入自变参数。为更具有直观性，把输入端和输出端的节点单独分出来，它们用具有传输系数等于1的支路与主网络联系起来。另一种表示四端网络方程的类型为Y-参数方程（图2.26(b)）

$$\delta\bar{G}(0)=y_{11}\delta\bar{p}(0)+y_{12}\delta\bar{p}(1)$$

$$\delta\bar{G}(1)=y_{21}\delta\bar{p}(0)+y_{22}\delta\bar{p}(1)$$

在该情况下，四端网路输入端和输出端的压力变化幅值为输入自变量，流量变化幅值为输出量。上述两个例子建立了同一个四端网络的，但相对于不同变量求解的信号流图，这表明当变换

系统方程时，与之相应的信号流图也要改变。

下面编制示于图2.27(a)上的气液系统的信号流图。该气液系统中包含有贮箱1，贮箱中的压力变化幅值$\delta\bar{p}_6$是已知(给定)的。液体从贮箱沿着有旁通流路3的流路供应到泵2，旁通流路有局部阻力7，然后经流路4到用户5。流路4上装有流容6以阻尼振荡。

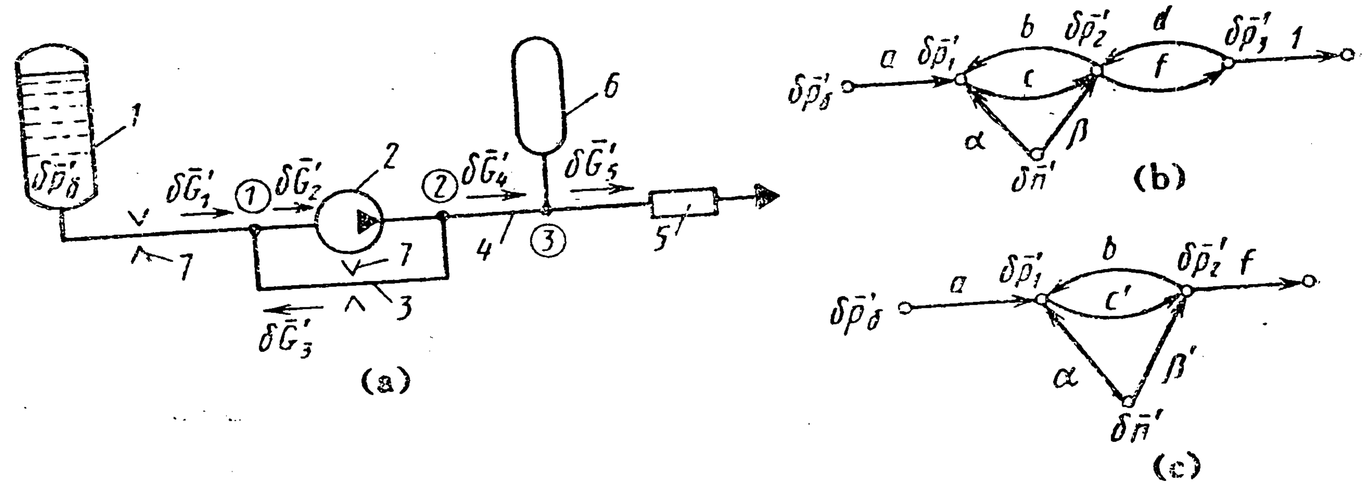



图2.27 气液系统

(a) 气液系统简图；(b) 它的信号流图；

(c) 简化了的信号流图。

考虑到液体是不可压缩的，下面编制描述系统线性近似的动态特性方程。认为外部干扰不仅可以在贮箱内压力变化$\delta\bar{p}_6'$的情况下产生，也可以在泵2的转速由于驱动它的工作条件改变而有变化$\delta n'$的情况下产生。对每一段流路用有量纲变化幅值写出动力学方程，使流量变化幅值与该段末端的压降变化幅值联系起来。通过对每一段引入导纳$y_i'$的方法来考虑液柱动态特性的特点，确定导纳的关系式可以按列于2.1节的公式进行计算。写出气液系统三个节点(见图2.27(a))的流量平衡方程

$$\begin{aligned}\delta\bar{G}_1'-\delta\bar{G}_2'+\delta\bar{G}_3'&=0\\ \delta\bar{G}_2'-\delta\bar{G}_3'-\delta\bar{G}_4'&=0\\ \delta\bar{G}_4'-\delta\bar{G}_6'-\delta\bar{G}_5'&=0\end{aligned}\qquad(2.9.1)$$

式中 $\delta\bar{G}_i'$——经过系统第$i$个元件的有量纲流量变化幅值。

流路分段由线性化方程来描述，在这些方程中认为外界压力



变化量$\delta\bar{p}_0'=0$：

$$\begin{aligned}\delta\bar{G}_1'&=y_1'(\delta\bar{p}_6'-\delta\bar{p}_1')\\ \delta\bar{G}_2'&=y_2'(\delta\bar{p}_1'-\delta\bar{p}_2')+r_2'\delta\bar{n}'\\ \delta\bar{G}_3'&=y_3'(\delta\bar{p}_2'-\delta\bar{p}_1')\\ \delta\bar{G}_4'&=y_4'(\delta\bar{p}_2'-\delta\bar{p}_3')\\ \delta\bar{G}_5'&=y_5'(\delta\bar{p}_3'-\delta\bar{p}_0')\\ \delta\bar{G}_6'&=y_6'\delta\bar{p}_3'\end{aligned}\qquad(2.9.2)$$

式中 $\delta\bar{p}_i'$——系统第$i$节点中有量纲压力变化幅值($i$为图2.27(a)上小圆圈内的号码)；

$r_2'$——考虑泵转速变化的干扰放大系数。

将来自式(2.9.2)的流量变化幅值代入平衡方程(2.9.1)，得

$$y_1'\delta\bar{p}_6'-(y_1'+y_2'+y_3')\delta\bar{p}_1'+(y_2'+y_3')\delta\bar{p}_2'-r_2'\delta\bar{n}'=0$$

$$(y_2'+y_3')\delta\bar{p}_1'-(y_2'+y_3'+y_4')\delta\bar{p}_2'+y_4'\delta\bar{p}_3'+r_2'\delta\bar{n}'=0$$

$$y_4'\delta\bar{p}_2'-(y_4'+y_5'+y_6')\delta\bar{p}_3'=0$$

对上列所得的关系式求解各节点上的相对压力变化幅值，最后得

$$\begin{aligned}\delta\bar{p}_1'&=a\delta\bar{p}_6'+b\delta\bar{p}_2'+\alpha\delta\bar{n}'\\ \delta\bar{p}_2'&=c\delta\bar{p}_1'+d\delta\bar{p}_3'+\beta\delta\bar{n}'\\ \delta\bar{p}_3'&=f\delta\bar{p}_2'\end{aligned}\qquad(2.9.3)$$

式中 $a$、$b$、$\alpha$、$c$、$d$、$\beta$、$f$——各支路的传输常数；

$$a=y_1'/(y_1'+y_2'+y_3')$$

$$b=(y_2'+y_3')/(y_1'+y_2'+y_3')$$

$$\alpha=-r_2'/(y_1'+y_2'+y_3')$$

$$c=(y_2'+y_3')/(y_2'+y_3'+y_4')$$

$$d=y_4'/(y_2'+y_3'+y_4')$$

$$\beta=r'/(y_2'+y_3'+y_4')$$

$$f=y_4'/(y_4'+y_5'+y_6')$$

图2.27(b)列出了等效于方程组(2.9.3)的信号流图，该方程组用线性近似描述了图2.27(a)所示的气液系统的动态特性。节点

上的压力变化幅值用作流图的变量。如果改变气液系统数学模型方程中所求解的变量，那么流图的结构也要改变。在所研究的气液系统中有两个为信号源的有源元件。考虑到所描述的气液系统的方程组是线性的，应用叠加原理，对每一个干扰量可以求出输出参数之值，而且在必要时可以把不同的干扰量相加。

### 2.9.2 流图转换规则

上面所得流图可用来确定被模拟系统的传输常数(即传递函数)，可以用两种方法来进行，一种是按规定的规则对流图进行逐次简化(转换)，一种是按麦森公式(见2.9.3节)来确定流图的传输常数。最有效的办法是同时使用这两种方法：首先简化流图，然后应用麦森公式。现依次对上述两种方法进行讨论。

信号流图的转换相当于信号流图所对应的线性方程组的转换，在转换过程中消去中间变量。下面列出信号流图简化的规则(图2.28)：

(1) 从支路方程$\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1$；$\delta\bar{x}_3 = b\delta\bar{x}_2$中消去变量$\delta\bar{x}_2$，就可得到串联支路(图2.28(a))的传输常数：$\delta\bar{x}_3 = ab\delta\bar{x}_1$。在这种情况下传输常数等于各支路传输常数之乘积(此处以及以下的图上节点都用数字1，2，…表示，而为了简化起见支路的传输常数都用无下标的不同字母表示)。

(2) 同方向并联支路(图2.28(b))的传输常数由支路方程$\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_1 = (a+b)\delta\bar{x}_1$来求得。它等于每一个支路传输常数之和。

(3)内部节点可以在两种情况下(汇合的支路和分散的支路)消去(图2.28(c)和2.28(d))。对汇合的支路写出$\delta\bar{x}_3 = a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_2$；$\delta\bar{x}_4 = c\delta\bar{x}_3$，由此$\delta\bar{x}_4 = c(a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_2) = ac\delta\bar{x}_1 + bc\delta\bar{x}_2$。类似地对分散的支路可写出$\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1$；$\delta\bar{x}_3 = b\delta\bar{x}_2$；$\delta\bar{x}_4 = c\delta\bar{x}_2$，或$\delta\bar{x}_3 = ab\delta\bar{x}_1$；$\delta\bar{x}_4 = ac\delta x_1$。流图简化的结果消除了一个节点和一条支路。剩下两条支路的传输常数变为等于被消除支路的传



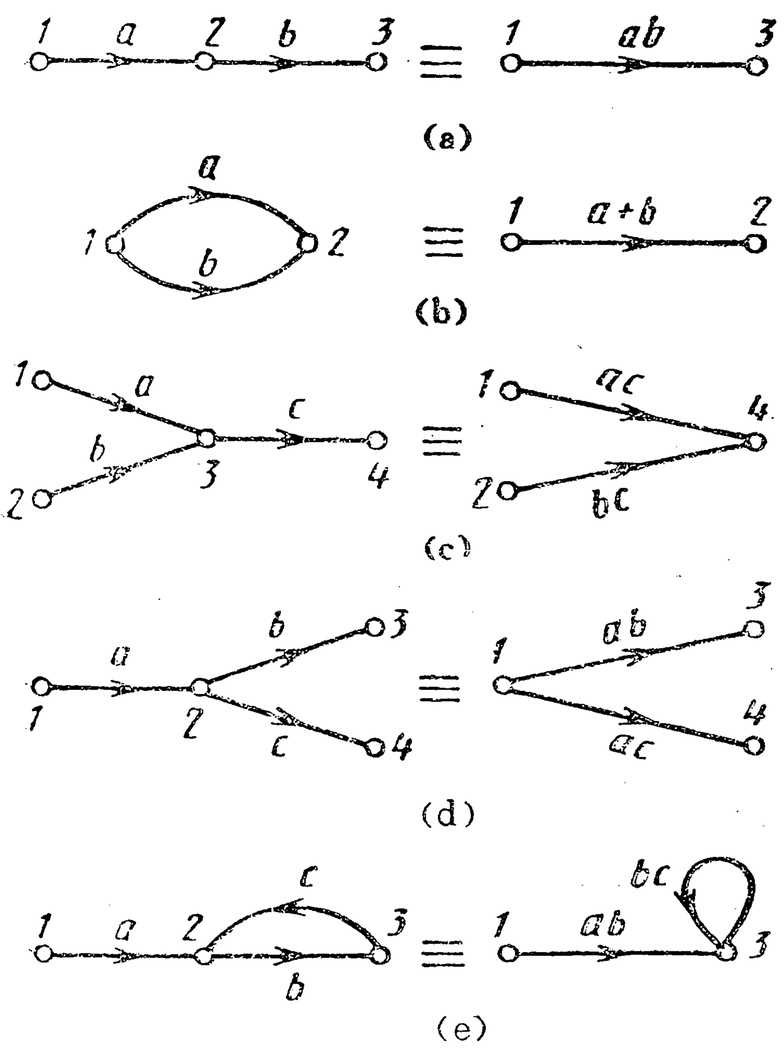



图2.28 最简单的信号流图的简化规则

输常数和剩下支路原先的传输常数之乘积。

(4) 由相反方向的两条支路形成的简单回路(图2.28(e))消除法。流图的支路方程为$\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1 + c\delta\bar{x}_3$；$\delta\bar{x}_3 = b\delta\bar{x}_2$。从这个两方程中消去$\delta\bar{x}_2$，得$\delta\bar{x}_3 = ab\delta\bar{x}_1 + bc\delta\bar{x}_3$。方程的右边含有输出参数项。这种方程可用输出节点处的环图来近似，此环的传输常数等于被消去回路上两支路的传输常数之乘积。

(5) 如果一条支路引入带环的节点并从此节点引出一条支路(图2.29(a))，则对此流图可写出方程$\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1 + c\delta\bar{x}_2$；$\delta\bar{x}_3 = b\delta\bar{x}_2$。

消去$\delta\bar{x}_2$后，得$\delta\bar{x}_3 = [ab/(1-c)]\delta\bar{x}_1$。此关系式适用于$|c| < 1$。

如果有好几条支路引入带环的节点并从此节点引出好几条支路(图2.29(b))，对这种流图可写出方程$\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_4 + c\delta\bar{x}_2$或$\delta\bar{x}_2 = [1/(1-c)](a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_4)$。这时

$$\delta\bar{x}_3 = d\delta\bar{x}_2 = [d/(1-c)](a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_4)$$
$$\delta\bar{x}_6 = f\delta\bar{x}_2 = [f/(1-c)](a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_4)$$
$$\delta\bar{x}_5 = e\delta\bar{x}_2 = [e/(1-c)](a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_4)$$

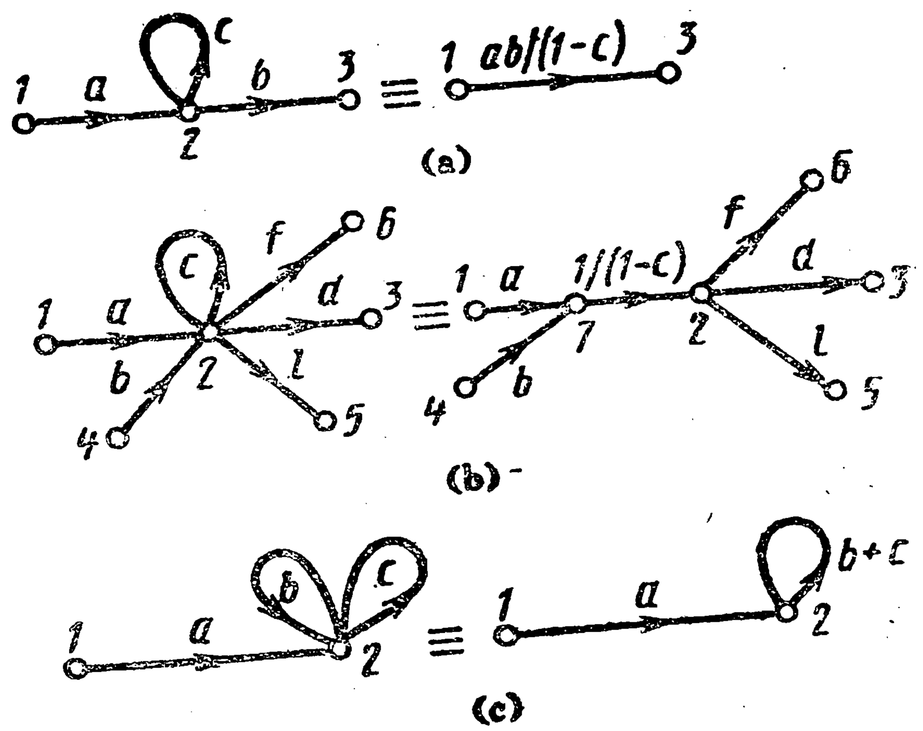



图2.29　带环流图的简化规则

为了不改变进入节点2的支路的传输常数，比较适当的办法是引入辅助节点7和具有传输常数$1/(1-c)$的支路。

(6) 用一个环替换二个环(图2.29(c))。如果节点2有二个传输常数分别为$b$和$c$的环，则可把它们置换为一个具有传输常数$b+c$的环，因为在这种情况下

$$\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1 + b\delta\bar{x}_2 + c\delta\bar{x}_2 = a\delta\bar{x}_1 + (b+c)\delta\bar{x}_2$$

(7) 如果信号流图含有若干个回路(图2.30)，那么首先把一个回路转换为环，然后消去这个环。利用规则5，可以在与各回路连接的节点处消去环(图2.30(a))。同时改变进入节点的各支路的传输常数：$b' = b/(1-e)$；$d' = d/(1-e)$，修正流图转换的规则4，并分割节点，在消去流图中一个回路后可得到流图支路传输常数的公式(图2.30(b))

$$c' = cd;\quad b' = b/(1-cd)$$

对三个串联回路的环节(图2.30(c))通过方程转换可得

$$c' = cd;\ d' = ef;\ e' = ce;\ f' = df;$$

$$b' = b/(1-c') = b/(1-cd);\ e'' = e'/(1-c')$$

$$= ce/(1-cd);\quad a' = ae'' = ace/(1-cd);\ b'' = b'f'$$



$$= bdf/(1-cd);\quad c'' = ab' = ab/(1-cd);$$

$$d''d' + e''f' = ef + cdef/(1-cd)$$

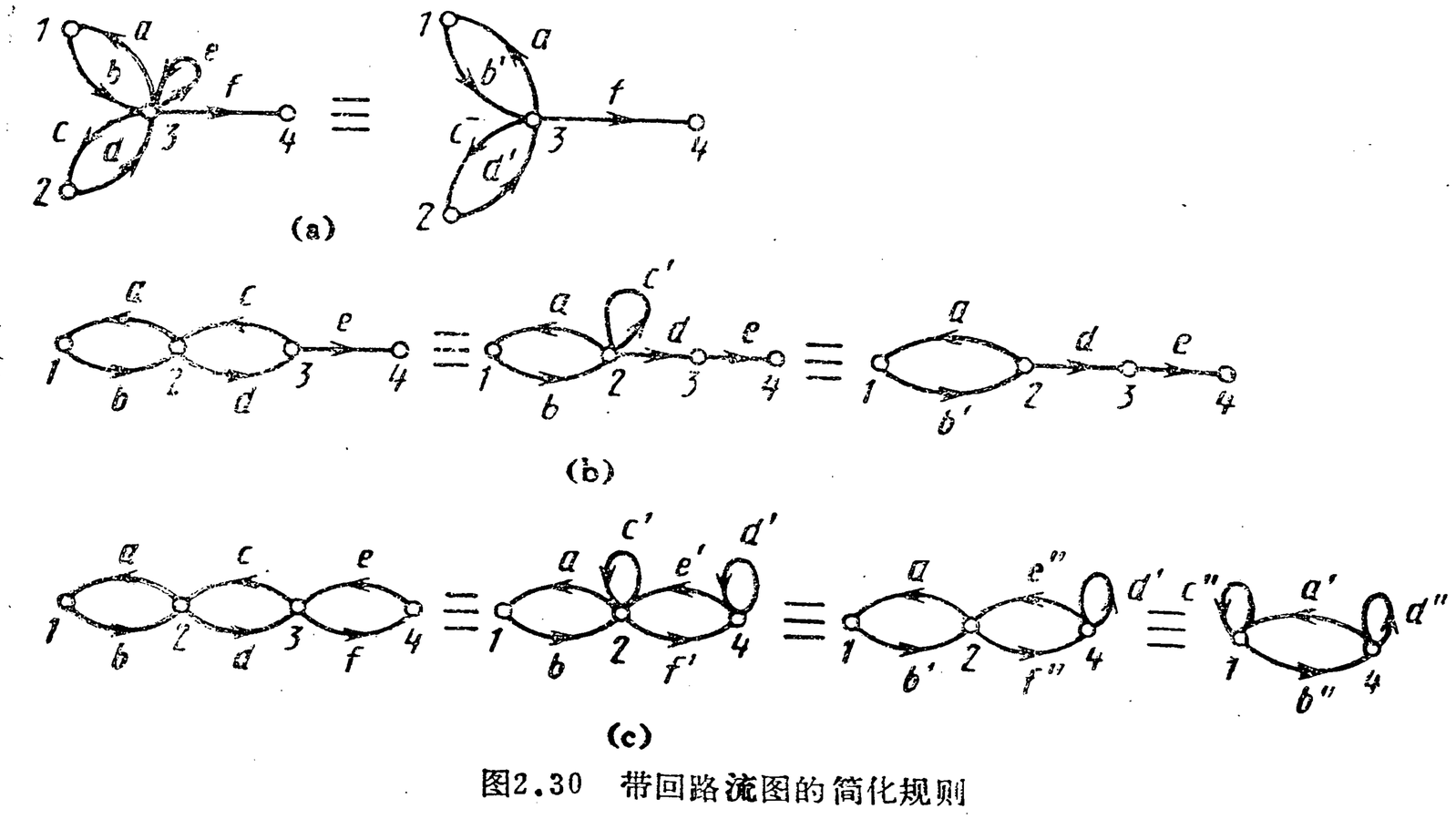



图2.30　带回路流图的简化规则

利用上述所列规则，可以把前面所编制的并示于图2.27(b)的气液系统的信号流图进行简化。通过简化可消除一个回路(规则7)，转换后的信号流图示于图2.27(c)，对此流图来说$c' = c/(1-df)$和$\beta' = \beta/(1-df)$。

### 2.9.3　麦森公式

对于简化了的流图或原始的流图，流图的传输常数即输出信号与输入信号的关系可按麦森公式[6]确定。借助于麦森公式既能求出线性系统的频率传递函数，也能求出(如果方程组写成算子形式)系统的微分方程。下面首先引入按麦森公式计算时所要用到的一些概念。直(穿通的)路——这是方向相同的、将输入(源)和输出(汇)相联接起来的各支路的连续序列。通过直路时与流图的每一个节点相遇不会大于一次。第$i$条直路传输常数$P_i$等于其所有支路的传输常数之乘积。在给定的输入端和输出端之间可以

有若干条直路。如图2.31(a)所示的流图，输入端(节点0)和输出端(节点5)之间有两条直路(图2.31(c)实线)。第一条直路的传输常数$P_1=abcde$，第二条为$P_2=afe$。

流图回路是一条闭合的路，沿此回路只能和每一个节点相遇一次。环则是回路的一种特殊情况，因为它只包括一个节点。如

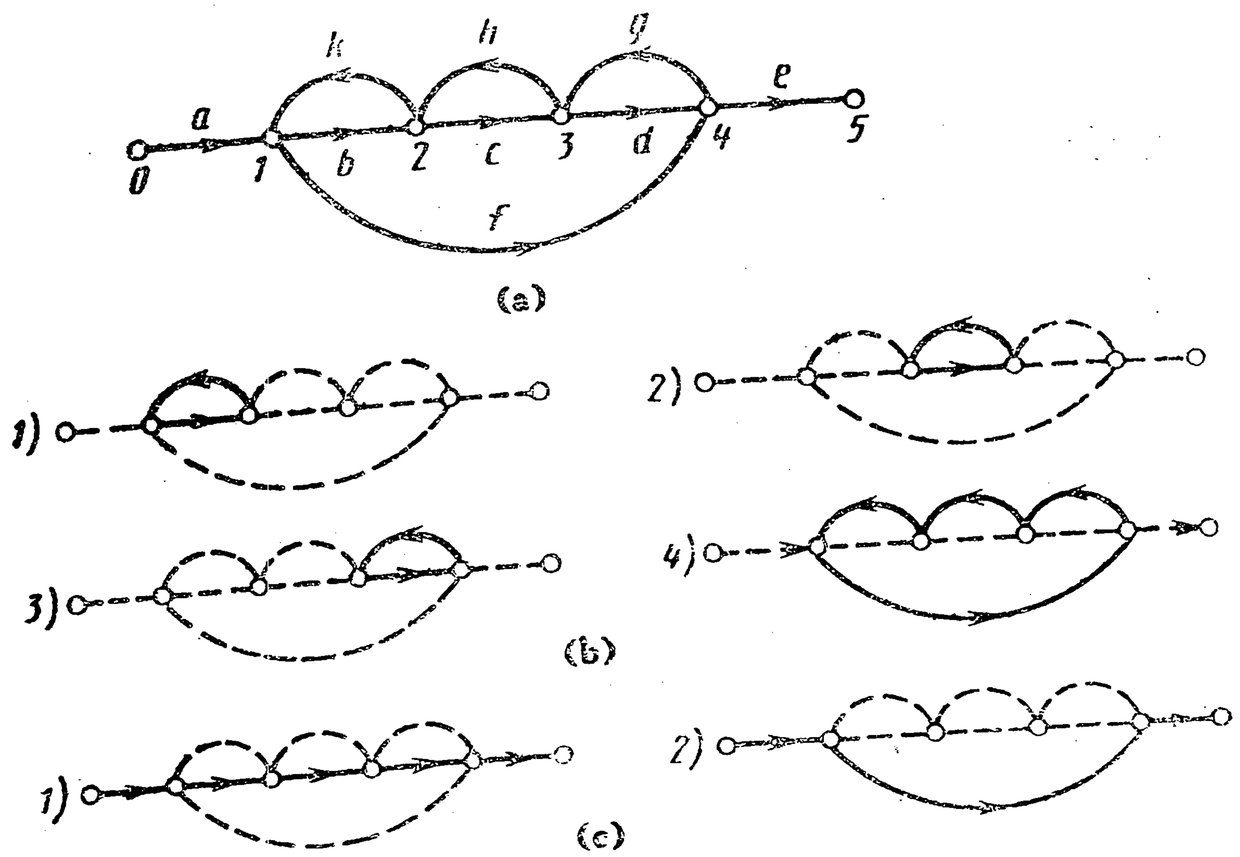



图2.31 寻找流图回路和直路的例子
(a)流图；(b)回路；(c)直路。

果两条不同的直路或回路有一个公用节点，则它们称做相干的直路或回路，如果没有公用节点，则称做不相干的，列于图2.31(a)上的流图有4个回路，这4条回路示于图2.31(b)。第$i$条回路的传输常数$L_i$等于回路所含支路的传输常数之乘积。图2.31(b)所示回路的传输常数等于：

$$L_1=bk;\quad L_2=ch;\quad L_3=dg;\quad L_4=fghk$$

节点$i$和$j$之间信号流图的传输常数$T_{ij}$的麦森公式用下式[7]表示：

$$T_{ij}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k \qquad (2.9.4)$$



式中 $P_k$——第$k$条直路从输入端到输出端的传输常数；

$n$——流图输入端和输出端之间的直路数；

$$\Delta=1+\sum_{r=1}^{m}\left[(-1)^r\sum_{j=1}^{p}L_j^{(r)}\right]$$——流图的行列式；

$L_j^{(r)}$——$r$阶$j$回路的传输常数；

$p$——$r$阶回路的数目；

$m$——流图中回路的最高阶。

$r$阶回路——没有公用节点的一阶不相干回路的总和$r$。一阶回路为一种常见回路，其定义已于本节内给定。$\Delta_k$称为流图第$k$条直路的代数余子式。$\Delta_k$之值等于与第$k$条直路不相干（没有公用节点）的子图的行列式。

例如，在图2.31(a)所示的流图中含有(见图2.31(b))4条一阶回路(实线)和一条由两条传输常数分别为$bk$和$dg$的不相干的一阶回路1和3组成的二阶回路。二阶回路的传输常数$L_1^{(2)}=bkdg$。由此，图2.31(a)所示的流图的行列式$\Delta=1+(-1)^1(L_1^{(1)}+L_2^{(1)}+L_3^{(1)}+L_4^{(1)})+(-1)^2L_1^{(2)}=1-(bk+ch+dg+fghk)+bkdg$。对没有一条回路的流图，其行列式等于1。

如果把与第$k$条直路不相干的流图的回路区分出来，就能求出代数余子式$\Delta_k$的表达式。图2.31(c)所示流图的直路1没有一条不相干的回路，因而$\Delta_1=1$。直路2有一条不相干的回路2(见图2.31(b))，因而相应地$\Delta_2=1-ch$。利用所有得到的行列式和直路的传输常数，借助于公式(2.9.4)就可得到图2.31(a)所示流图的传输常数：

$$T_{50}=\frac{abcde+afe(1-ch)}{1-bk-ch-dg-fghk+bkdg}$$

将流图支路传输常数的表达式代入此公式可得流图的传递函数。图2.27(c)所示的流图有两个输入和一个输出。每一个输入都有自己的直路。在$\delta p_6'$的作用下流图中有一条传输常数为$P_1=$

$ac'f$的直路和一条传输常数为$L_1^{(1)}=bc'$的一阶回路。此回路与直路相干因而$\Delta_1=1$，相应地$\Delta=1-bc'$，而流图的传输常数(从贮箱方向)

$$T_{\text{рб}}=ac'f/(1-bc')=acf/(1-bc-df)$$

当用改变转速$\delta\bar{n}'$的方法进行干扰时有两条传输常数分别为$P_1=\alpha c'f$和$P_2=\beta' f$的直路以及具有传输常数为$L_1^{(1)}=bc'$的同一条回路。流图的传输常数(从泵方向)

$$T_{\text{n}}=(\alpha c'f+\beta' f)/(1-bc')=(\alpha cf+\beta f)/(1-bc-df)$$

上列例子表明，利用信号流图使得寻找系统的传递函数变得简单了。

### 2.9.4 具有集中参数系统的动力学分析

上面所列的一切都是利用信号流图来建立气液系统的数学模型，这种气液系统都是由当作具有集中参数元件来描述的组件所组成。在许多情况下由于流路很长或所研究的频率范围扩展，所以这种近似方法实际上论据是不够充分的。本节着重研究这样一种发动机气液系统，它的流路分段是当作具有分布参数的线性元件来描述的。对其它气液系统有关这个问题的研究在以后进行。

当采用流体力学线性化方程组时液体在流路分段上的强迫振荡可用四端网络方程来描述。二个四端网络方程联系了四个变量——输入端液体压力和速度(流量)的变化幅值以及输出端类似的参数。把无量纲速度和压力变化幅值的方程(2.8.1)化成有量纲变化量。这时必须考虑到速度和流量的有量纲变化幅值是不相等的。因为在描述管路系统内的流动时用流量变化量是比较方便的，所以把方程(2.8.1)化成下式：

$$\delta\bar{G}'(0)=-\frac{iF}{a}\operatorname{ctg}(\omega L/a)\delta\bar{p}'(0)+\frac{iF}{a\sin(\omega L/a)}\delta p'(1)$$

$$\delta\bar{G}'(1)=-\frac{iF}{a\sin(\omega L/a)}\delta\bar{p}'(0)+\frac{iF}{a}\operatorname{ctg}(\omega L/a)\delta\bar{p}'(1)$$



(2.9.5)

式中 $\delta\bar{G}'(0)$、$\delta\bar{G}'(1)$——流路分段输入端($\bar{x}=0$)和输出端($\bar{x}=1$)处流量有量纲变化幅值；

$a$——考虑管壁柔度的液体中的声速；

$F$——流路流通截面积；

$L$——流路长度。

采用信号流图法时，最方便的是像矩阵法那样(见第2.8节)，把集中参数元件的方程化成四端网路方程的形式。例如将局部水力阻力方程(2.8.7)转化为Y-参数和有量纲变化幅值时可以写成如下形式：

$$\delta\bar{G}'(0)=\frac{G}{2\Delta p}\delta\bar{p}'(0)-\frac{G}{2\Delta p}\delta\bar{p}'(1)$$

$$\delta\bar{G}'(1)=\frac{G}{2\Delta p}\delta\bar{p}'(0)-\frac{G}{2\Delta p}\delta\bar{p}'(1) \tag{2.9.6}$$

式中 $G$——通过阻力的平均流量。

惯性方程(2.8.9)也可用相似的方式进行转换：

$$\delta\bar{G}'(0)=\frac{F}{i\omega L}\delta\bar{p}'(0)-\frac{F}{i\omega L}\delta\bar{p}'(1)$$

$$\delta\bar{G}'(1)=\frac{F}{i\omega L}\delta\bar{p}'(0)-\frac{F}{i\omega L}\delta\bar{p}'(1) \tag{2.9.7}$$

式中 $F$、$L$——液柱横截面积和长度。

最好把位于气液系统中的流容作为分支支路，它包括把流容与主流路相连接的管路。为考虑流容内的液柱惯性必须把流路分段列入此管路的组成部分，它的长度等于流容内的液柱高度，而流通截面积等于它的横截面平均面积。在这种情况下流容方程为分支管路末端的边界条件。如果没有连接管路，则只剩下等效于流容内液柱的分段。

对于当作具有集中参数元件的并位于气液系统支路末端的装置，最好不要把它们划为单独元件——四端网络，而把它们的方程用作为流路边缘分段的边界条件。气液系统始端或终端的这些边界条件可以以负载阻抗的形式给出(一般情况下，它们是频率的函数)，此阻抗使边界截面上的压力和流量的变化幅值联系在一起。

比方说，有一个集中参数的元件位于气液系统支路的始端，在第$i$流路分段的输入端，那么边界条件可记为$z'_{1i}(\omega)=\delta\bar{p}'_i(0)/\delta\bar{G}'_i(0)$，如位于支路的末端，在第$j$流路分段的输出端，则有$z'_{2j}=\delta\bar{p}'_j(1)/\delta G'_j(1)$，式中，$z'_{1i}$、$z'_{2j}$——第$i$流路分段输入端和第$j$分段输出端的阻抗。对于在有量纲变化幅值下的局部水力阻力，从公式(2.9.6)可求出$z'_{1i}=-2\Delta p_i/G_i$；$z'_{2j}=2\Delta p_j/G_j$，式中，$\Delta p_i$、$\Delta p_j$、$G_i$、$G_j$——分别为第$i$和第$j$个局部阻力的压降和流量。类似地从关系式(2.9.7)可得惯性阻抗$z'_{1i}=-i\omega L_i/F_i$；$z'_{2j}=i\omega L_j/F_j$，式中，$L_i$、$L_j$、$F_i$、$F_j$——分别为第$i$和第$j$个惯性元件中液柱的长度和截面积。

对于完全充满液体的流容，先把式(2.8.11)转换为有量纲变化幅值，就可从此式得到$z'_{1i}=-a^2/(i\omega V_i)$；$z'_{2j}=a^2/(i\omega V_j)$。式中，$a$——考虑容器壁柔性的液体中的声速；$v_i$、$v_j$——第$i$和第$j$流容的容积。

如果气液系统支路末端没有一个具有集中参数的元件，那么为了便于采用上面所推荐的方法，从另一个具有集中参数的元件分出一小段很短的不影响整个系统动力学的流路分段作为边界元件(用边界阻抗描述的)。边界阻抗被用于上面提到的分段。

当具有集中参数的元件(除流容外)位于气液系统中间时就不再作出元件和流路分段之间的区别，把它们简单地称作系统元件并对每一个系统元件用四端网络方程来描述

$$\delta\bar{G}'_i(0)=y'_{i-11}\delta\bar{p}'(0)+y'_{i-12}\delta\bar{p}'(1)$$

$$\delta\bar{G}'_i(1)=y'_{i-21}\delta\bar{p}'(0)+y'_{i-22}\delta\bar{p}'(1) \qquad (2.9.8)$$





四端网络系数$y_{i-kj}$其右下角第一个下标($i=1,2,\cdots,n$)表示系统元件号，后二个下标($k,j=1,2$)表示四端网络矩阵系数的下标。

这两个方程把位于气液系统中间的第$i$元件的参数变化幅值写成有量纲的，在四端网络方程系数的变量右下角用下标$i$来指明。下面研究由$n$个串联的无源水力元件(多个四端网络串联在一起)组成的气液系统。对这些元件写出四端网络方程：

$$\begin{aligned}
\delta\bar{G}'_1(0)&=y'_{1-11}\delta\bar{p}'_1(0)+y'_{1-12}\delta\bar{p}'_1(1)\\
\delta\bar{G}'_1(1)&=y'_{1-21}\delta\bar{p}'_1(0)+y'_{1-22}\delta\bar{p}'_1(1)\\
\delta\bar{G}'_2(0)&=y'_{2-11}\delta\bar{p}'_2(0)+y'_{2-12}\delta\bar{p}'_2(1)\\
\delta\bar{G}'_2(1)&=y'_{2-21}\delta\bar{p}'_2(0)+y'_{2-22}\delta\bar{p}'_2(1) \qquad (2.9.9)\\
&\cdots\cdots\\
\delta\bar{G}'_n(0)&=y'_{n-11}\delta\bar{p}'_n(0)+y'_{n-12}\delta\bar{p}'_n(1)\\
\delta\bar{G}'_n(1)&=y'_{n-21}\gamma\bar{p}'_n(0)+y'_{n-22}\delta\bar{p}'_n(1)
\end{aligned}$$

并写出第1元件输入端和第$n$元件输出端的边界条件

$$\begin{aligned}
\delta\bar{G}'_1(0)&=(1/z'_{11})\delta\bar{p}'_1(0)\\
\delta\bar{G}'_n(1)&=(1/z'_{2n})\delta\bar{p}'_n(1) \qquad (2.9.10)
\end{aligned}$$

式中 $\delta\bar{p}'_i(0)$、$\delta\bar{G}'_i(0)$、$\delta\bar{p}'_i(1)$、$\delta\bar{G}'_i(1)$ ($i=1,2,\cdots,n$)——第$i$元件输入端和输出端压力和流量的有量纲变化幅值；

$z'_{11}$、$z'_{2n}$——第1元件输入端和第$n$元件输出端的阻抗。

当系统的一部分和另一部分对接的这种比较复杂的情况下，用相邻系统的入口和出口阻力代替边界条件方程(2.9.10)中的阻抗$z'_{11}$和$z'_{2n}$。

由于所有的局部阻力和惯性都已分列为系统的单独元件，所以在系统各元件之间的接头处要遵守连续方程$\delta\bar{G}'_i(1)=\delta\bar{G}'_{i+1}(0)$和压力相等条件$\delta\bar{p}'_i(1)=\delta\bar{p}'_{i+1}(0)$。利用这两个等式，从系统的方程(2.9.9)和(2.9.10)中消去流量变化幅值后，得

$$\delta\bar{p}'_1(0)=\frac{y'_{1-12}}{-y'_{1-11}+1/z'_{11}}\delta\bar{p}'_1(1)$$

$$\delta\bar{p}'_1(1)=-\frac{y'_{1-21}}{y'_{1-22}-y'_{2-11}}\delta\bar{p}'_1(0)+\frac{y'_{2-12}}{y'_{1-22}-y'_{2-11}}\delta\bar{p}'_2(1)$$

$$\delta\bar{p}'_2(1)=-\frac{y'_{2-21}}{y'_{2-22}-y'_{3-11}}\delta\bar{p}'_2(0)+\frac{y'_{3-12}}{y'_{2-22}-y'_{3-11}}\delta\bar{p}'_3(1)$$

……

$$\delta\bar{p}'_{n-1}(1)=-\frac{y'_{(n-1)-21}}{y'_{(n-1)-22}-y'_{n-11}}\delta\bar{p}'_{n-1}(0)+\frac{y'_{n-12}}{y'_{(n-1)-22}-y'_{n-11}}\delta\bar{p}'_n(1)$$

$$\delta\bar{p}'_n(1)=-\frac{y'_{n-21}}{y'_{n-22}-1/z'_{2n}}\delta\bar{p}'_n(0)\qquad(2.9.11)$$

与原始方程组相比，上列方程组中已把方程数和变量数减少到原来的二分之一，这是因为这个方程组只是把元件接头处的压力变化幅值彼此之间联系在一起。线性方程组(2.9.11)等效于图2.32(a)所示的信号流图。

信号流图反映了被模拟气液系统的结构。这种情况下一阶回路与每一个第$i$元件相对应，根据式(2.9.11)此回路支路的传输常数$H(2i-1)$和$H(2i)$由下式确定

$$H(2i-1)=\frac{y'_{i-12}}{y'_{(i-1)-22}-y'_{i-11}},\quad i=2,3,\cdots,n\qquad(2.9.12)$$

$$H(2i)=-\frac{y'_{i-21}}{y'_{i-22}-y'_{(i+1)-11}},\quad i=1,2,3,\cdots,(n-1)$$

建立流图时采取了如下假定：偶数编号的支路定为顺液流的



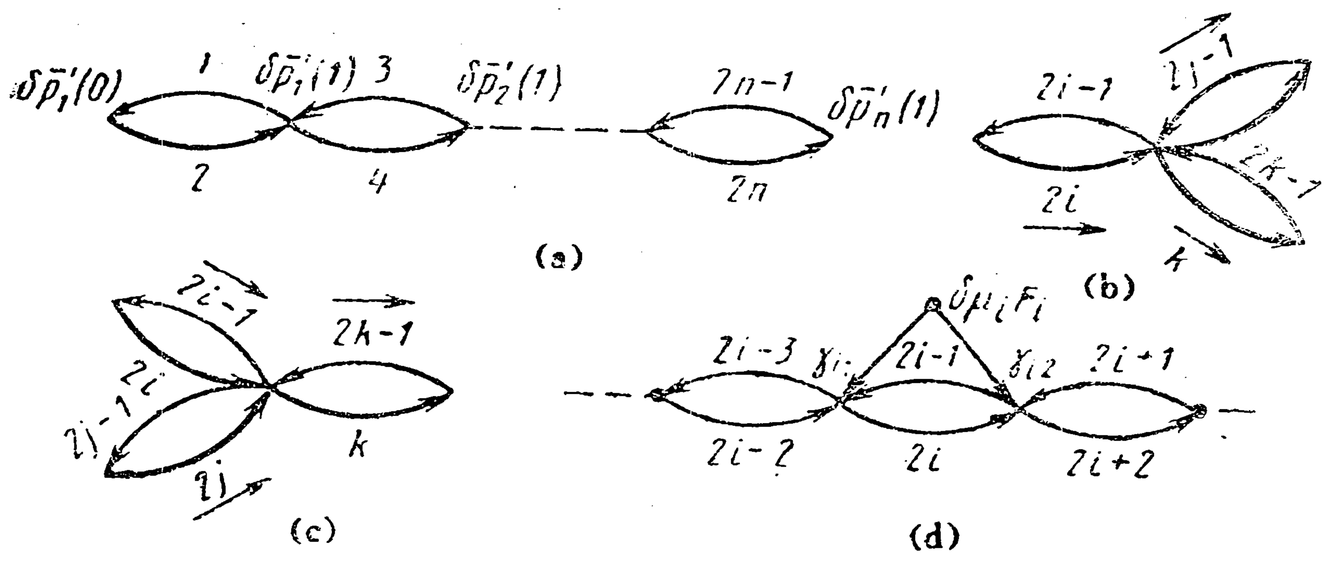



图2.32　气液系统的信号流图

(a) 由$n$个串联元件组成的气液系统；(b) 含有Ⅰ类分支的气液系统；(c) 含有Ⅱ类分支的气液系统；(d) 带有有源元件的气液系统。

方向，而对奇数编号的支路则定为与液流方向相反。

对应于气液系统两端编号为1和$n$(图2.32(a))而且指向描述干扰参数$\delta\bar{p}'_1(0)$和$\delta\bar{p}'_n(1)$的节点的流图支路的传输常数按下式求出

$$H(1)=\frac{y'_{1-12}}{-y'_{1-11}+1/z'_{11}}$$

$$H(2n)=-\frac{y'_{n-21}}{y'_{n-22}-1/z'_{2n}}$$

显然，如第$i$元件位于气液系统支路的输入端或输出端，可以推导出指向流图两端节点的支路的递归关系式

$$H(2i-1)=\frac{y'_{i-12}}{-y'_{i-11}+1/z'_{11}}$$

$$H(2i)=-\frac{y'_{i-21}}{y'_{i-22}-1/z'_{2i}}\qquad(2.9.13)$$

除串联元件外，液体火箭发动机气液系统还包括各种各样的分支。可以把分支分为两类：Ⅰ类为节点后分散的分支(沿流向)；Ⅱ类为汇合的分支。这两种分支的流图示于图2.23(b)和(c)。在

这些图上还用箭头表示液体运动方向。引入长度接近于零的一段流路，就可以把其它任何分支用I类和II类分支的组合来表示。下面研究I类分支。考虑到相交于一个节点的各支路末端的压力相等条件$\delta\bar{p}'_i(1)=\delta\bar{p}'_j(0)=\delta\bar{p}'_k(0)$，以及流量平衡方程$\delta\bar{G}'_i(1)=\delta\bar{G}'_j(0)+\delta\bar{G}'_k(0)$并从3个与该节点有关的四端网络方程中消去流量变化幅值，就可对I类任何分支求出指向该分支节点（见图2.32(b)）的流图支路的传输常数，并可按下式确定

$$H(2i)=-\frac{y'_{i-21}}{y'_{i-22}-y'_{j-11}-y'_{k-11}}$$

$$H(2j-1)=\frac{y'_{j-12}}{y'_{i-22}-y'_{j-11}-y'_{k-11}}$$

$$H(2k-1)=\frac{y'_{k-12}}{y'_{i-22}-y'_{j-11}-y'_{k-11}} \qquad (2.9.14)$$

式中 $i$——元件编号，液体沿该元件流入节点；

$j$、$k$——两元件的编号，液体沿该两元件从节点流出。

图2.32(b)上所示的流图结构是与气液系统I类分支结构恒等的。

用类似的方法可以求出对应于II类分支的信号流图（图2.32(c)）支路的传输常数关系式

$$H(2i)=-\frac{y'_{i-21}}{y'_{i-22}+y'_{j-22}-y'_{k-11}}$$

$$H(2j)=-\frac{y'_{j-21}}{y'_{i-22}+y'_{j-22}-y'_{k-11}}$$

$$H(2k-1)=\frac{y'_{k-12}}{y'_{i-22}+y'_{j-22}-y'_{k-11}} \qquad (2.9.15)$$

到目前为止只研究了没有会产生干扰的有源元件的无源气液系统。建立系统的流图要看作用在气液系统上的干扰的种类和作用位置而定。设在气液系统内在位于$(i-1)$和$(i+1)$元件之间的



第$i$元件上有一个干扰源。例如用节流装置按谐波定律改变流通截面积（用脉动器）的办法来产生扰动。对不可压缩的液体当它的惯性忽略不计时，把被调局部阻力的线性化关系式(2.1.15)写成有源四端网络方程形式[7]，有如下式：

$$\delta\bar{G}'_i(0)=\frac{G_i}{2\Delta p_i}\delta\bar{p}'_i(0)-\frac{G_i}{2\Delta p_i}\delta\bar{p}'_i(1)+\frac{G_i}{\mu_i F_i}\delta(\overline{\mu F})'_i$$

$$\delta\bar{G}'_i(1)=\frac{G_i}{2\Delta p_i}\delta\bar{p}'_i(0)-\frac{G_i}{2\Delta p_i}\delta\bar{p}'_i(1)+\frac{G_i}{\mu_i F_i}\delta(\overline{\mu F})'_i \qquad (2.9.16)$$

式中 $\mu_i$、$F_i$——节流装置的流量系数和流通截面积；

$\delta(\overline{\mu F})'_i$——节流装置有效流通截面积的有量纲变化幅值

从方程（2.9.16）中并从第$(i-1)$元件（节流装置前）和第$(i+1)$元件（节流装置后）的方程(2.9.9)中消去流量变化幅值之后，就可得到同具有可变流通截面积的节流装置这一类型的有源元件相对应的流图（图2.32(d)）。从描述干扰参数$\delta(\overline{\mu F})'_i$的节点出发的流图支路的传输常数由下式确定

$$y_{i1}=\frac{G_i/(\mu_i F_i)}{y'_{(i-1)-22}-G_i/(2\Delta p_i)}$$

$$y_{i2}=\frac{G_i/(\mu_i F_i)}{y'_{(i+1)-11}+G_i/(2\Delta p_i)} \qquad (2.9.17)$$

而传输常数$H(2i-1)$和$H(2i)$按公式(2.9.12)求出，其中$y'_{(i-1)-22}$、$y'_{(i+1)-11}$——相当于第$(i-1)$和第$(i+1)$元件作为四端网络方程(2.9.8)的系数；$y'_{i-11}$和$y'_{i-22}$——节流装置作为四端网络的方程(2.9.16)当$\delta(\overline{\mu F})'_i=0$时的系数，即

$$y'_{i-11}=G_i/(2\Delta p_i);\ y'_{i-22}=-G_i/(2\Delta p_i)$$

现研究作为另一种可能为干扰源的泵，它是安置在第$(i-1)$和第$(i+1)$元件之间的第$i$元件。忽略液体在流道部分内的惯性及

可压缩性以及气蚀现象，可以把泵的线性化方程(2.1.31)以有量纲参数变化幅值表示写成四端网络关系式

$$\delta\bar{G}'_i(0) = -\frac{1}{\psi'_{Gi}}\delta\bar{p}'_i(0) + \frac{1}{\psi'_{Gi}}\delta\bar{p}'_i(1) - \frac{\psi'_{ni}}{\psi'_{Gi}}\delta\bar{n}'_i$$

$$\delta\bar{G}'_i(1) = -\frac{1}{\psi'_{Gi}}\delta\bar{p}'_i(0) + \frac{1}{\psi'_{Gi}}\delta p'_i(1) - \frac{\psi'_{ni}}{\psi'_{Gi}}\delta\bar{n}'_i \qquad (2.9.18)$$

式中 $\delta\bar{p}'_i(0)$、$\delta\bar{G}'_i(0)$、$\delta\bar{p}'_i(1)$、$\delta\bar{G}'_i(1)$——泵入口和出口处压力和流量的有量纲变化幅值；

$\delta\bar{n}'_i$——泵转速变化幅值；

$\psi'_{Gi}=\partial\Delta p_{Hi}/\partial_{Gi}$——泵压头对流量特性曲线的斜率；

$\psi'_{ni}=\partial\Delta p_{Hi}/\partial n_i$——泵压头对转速特性曲线的斜率；

$\Delta P_{Hi}$——泵产生的压头；

$G_i$——液体的平均流量；

$n_i$——泵的转速。

由方程(2.9.18)和(2.9.16)比较可以发现，它们在形式上是相同的，因而描述它们的流图在结构上也是一样的。相应地传输常数$\gamma_{i1}$和$\gamma_{i2}$由下面的公式确定

$$\gamma_{i1} = -\frac{\psi'_{ni}/\psi'_{Gi}}{y'_{(i-1)-22} + 1/\psi'_{Gi}}$$

$$\gamma_{i2} = -\frac{\psi'_{ni}/\psi'_{Gi}}{y'_{(i+1)-11} - 1/\psi'_{Gi}} \qquad (2.9.19)$$

而传输常数$H(2i-1)$、$H(2i)$像节流装置的一样按公式(2.9.12)确定，这时$y'_{i-11}=-1/\psi'_{Gi}$；$y'_{i-22}=1/\psi_{Gi}$。

如果干扰源(节流装置、泵等)位于气液系统支路的初端，那么在描述干扰源的流图部分就没有常数为$\gamma_{1i}$的支路，也没有常数为$H(2i-1)$和$H(2i)$的支路，这是因为位于支路两端的具有集中参数的元件作为边界阻抗都已列入边缘元件之中，而没有包括在



系统其它元件之中。如果干扰源位于气液系统支路的输出端，那么相应地在流图上就没有常数为$\gamma_{i2}$、$H(2i-1)$、$H(2i)$的支路。

对于其它类型的干扰源——位于$j$流路初端的移动活塞，它按规律$\delta\bar{y}'_i\exp(i\omega t)$进行谐波振荡，其中$\delta\bar{y}'_i$——活塞位移的幅值，描述它的工作状况的方程可用下列连续方程来求得

$$\delta\bar{G}'_j = i\omega\rho F\delta\bar{y}'_i$$

式中 $\delta\bar{G}'_j$——流量变化幅值；

$\rho$——液体密度；

$F$——活塞截面积。

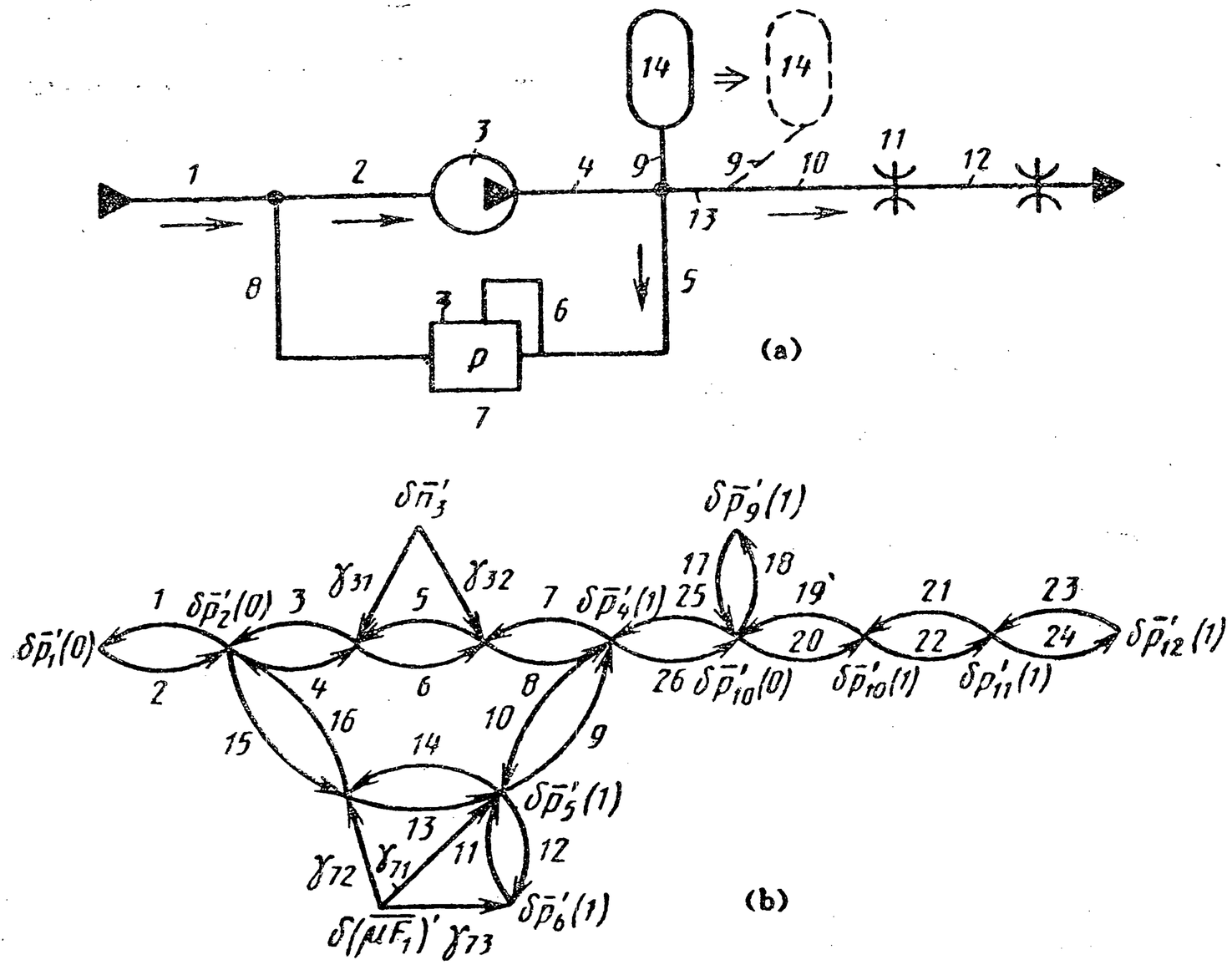
由于通常假设活塞位于$j$流路的初端，因而在确定其流图支路传输常数的公式中取$z'_j=\infty$，因为当活塞不动时$\delta\bar{G}'_j=0$。这时指向描述$\delta\bar{p}'_j(0)$节点的支路的传输常数$H(2j-1)$由式(2.9.12)求出，在考虑条件$z'_j=\infty$时，它等于$-y'_{j-12}/y'_{j-11}$。另一方面，活塞相当于离开描述$\delta\bar{y}'_i$节点的支路时，它的传输常数由式$\gamma_j=i\omega\rho F/y'_{j-11}$确定。

### 2.9.5 对具有分布参数的气液系统建立信号流图的例子

现研究某一气液系统作为例子，该气液系统(图2.33(a))由以下元件组成：视为具有分布参数元件的流路分段1、2、4、5、6、9、10和12，泵3，局部水力阻力11，位于流路分段9末端的流容(减振器)14。前面已经预先说明，位于气液系统流路分段终端的具有集中参数的元件在建立信号流图时不作为单独元件。在气液系统简图上包括一条旁通线路，在其始端装有压力调节器7。调节器包含有前面已提到过的具有可变流通截面积$\delta(\overline{\mu F})'_7$的节流装置，这时，通过传递函数$W_{\bar{p}}(\omega)$使$\delta(\overline{\mu F})'_7$与调节器前的压力变化量$\delta\bar{p}'_6(1)$联系在一起：

$$\delta(\overline{\mu F})'_7 = W_{\bar{p}}(\omega)\delta\bar{p}'_6(1)$$

式中 $\delta\bar{p}'_6(1)$——分段6末端的压力变化幅值，用它来进行反







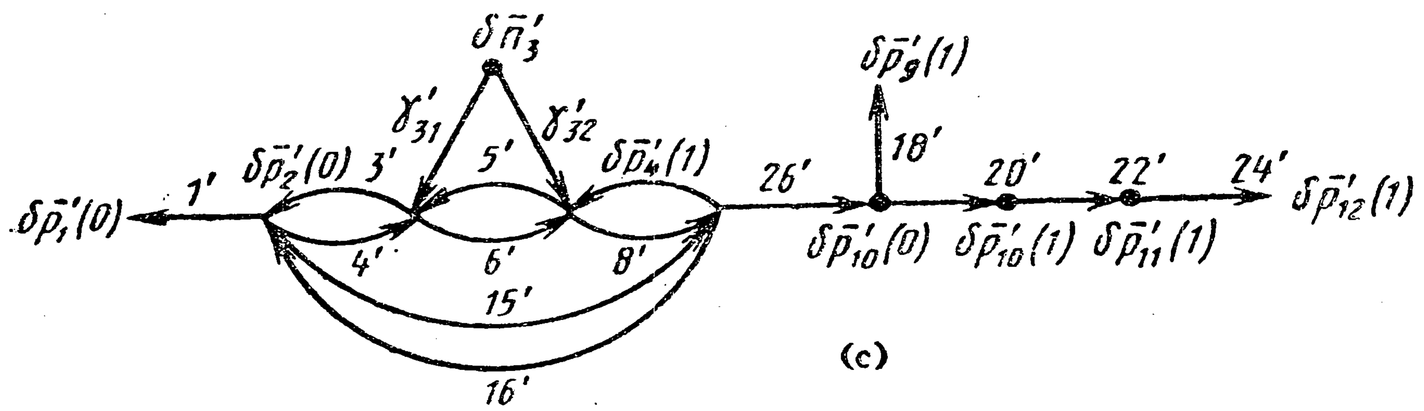



图2.33 气液系统

（a）气液系统简图；（b）信号流图；（c）简化的流图

馈。

由于在气液系统中存在着分支，该分支中接有三条以上的分段（分段4、5、9和10），按照规定的条件必须引入长度接近于零的



虚构分段13。在建立包括虚构分段13在内的上述气液系统的信号流图（图2.33(b)）时，取泵3的转速$\delta\bar{n}_3'$作为外部（输入）干扰量，而取泵作为有源元件。

用以下的方法建立流图：对每个无源的$i$元件（流路的分段、局部阻力等）求出与此元件相对应的一阶回路，按公式(2.9.12)～(2.9.15)算出这些回路支路的传输常数$H(2i-1)$和$H(2i)$。对有源的$j$元件除求出传输常数为$H(2i-1)$和$H(2i)$的支路外，还要求出从描述干扰参数的节点离开的传输常数为$\gamma_{i1}$和$\gamma_{i2}$的支路。为了简化，在图2.33(b)和(c)上没有列出大多数支路的传输常数$H(i)$而只列出了支路号。在所研究的流图中泵3相当于当$i=3$时按公式(2.9.12)计算的传输常数为$H(5)$和$H(6)$的支路，以及两条按公式(2.9.19)确定的($i=3$)传输常数为$\gamma_{31}$和$\gamma_{32}$的支路。

压力调节器7认为是具有反馈的可控的有源元件，也即不产生外部干扰的内部元件。因此在图2.33(b)所示的流图上，与之相应的是描述调节器节流装置的传输常数为$H(13)$、$H(14)$、$\gamma_{71}$、$\gamma_{72}(i=7)$的支路，以及表征调节器动态特性的和从调节器入口方向反馈的传输常数为$\gamma_{73}=W_p(\omega)$的支路。

信号流图（图2.33(b)）具有被研究对象的结构，尤其是它的各个支路的连接相当于系统管路的连接。流图出现辅助支路与描述有源元件——输入端干扰（控制）信号源有关，也与具有反馈的调节装置有关。

本节所描述的把气液系统作为具有分布参数的系统来建立线性数学模型的方法，以及在此基础上利用信号流图得出气液系统的传递函数，与2.8节所述的矩阵法相比，具有某些优点。由于消去了流量变化量使方程数和变量数减少到原来的二分之一。相应地气液系统的每一个元件不是用四端网络矩阵方程来描述，而是用一个线性方程来描述。信号流图描述气液系统无源部分的结构完全重现气液系统被描述部分的结构，因而一方面使易于建立流图，另一方面可比较直观地绘制流图。

利用简单的简化(转换)规则，由流图可获得气液系统数学模型紧凑的式子。这些规则对于在电子计算机上编制流图变换的算法是很方便的。因此可以制订出计算航天器反作用控制系统气液系统的复杂分支管路系统动态特性的通用算法。计算时作为原始数据应向电子计算机输入有关气液系统的结构，它的各个元件的类型和参数的数据，并由电子计算机建立气液系统的数学模型。

依次应用转换规则(见图2.28～2.30)，图2.33(b)所示的流图就可以简化为比较简单的流图(图2.33(c))。用下面的方法进行这种变换。按照2.9.2节所列的规则4和7对与分段1、13、9、10、12和阻力11相对应的支路进行变换。这时就可得出下列传输常数：

$$H'(22)=H(22)/[1-H(23)H(24)]$$
$$H'(20)=H(20)/[1-H(21)H'(22)]$$
$$H_1(26)=H(26)/[1-H(19)H'(20)]$$
$$H'(17)=H(17)/[1-H(19)H'(20)]$$
$$H'(26)=H_1(26)/[1-H'(17)H(18)]$$

这里以及以后凡带有撇号的流图支路传输常数，都属于那些传输常数在其后的变换中不会发生变化的支路；而凡是具有数字下标的传输常数，则属于在一些步的变换中其传输常数会发生变化的支路。

经变换后得到$\delta\bar{p}'_1$节点处、常数为$H(25)$和$(H26)$的两支路所组成的回路，按规则4消去此回路，这样处理后支路8和9(见图2.33(b))的传输常数就变为：

$$H_1(8)=H(8)/[1-H(25)H(26)]$$
$$H_1(9)=H(9)/[1-H(25)H'(26)]$$

应用规则4消去支路1和2的回路使支路3和16的传输常数变为：

$$H_1(3)=H(3)/[1-H(1)H(2)]$$
$$H_1(16)=H(16)/[1-H(1)H'(2)]$$



按照规则3消去描述$\delta\overline{(\mu F)}'_7$的节点。结果得出常数为$\gamma_{73}\gamma_{72}$和$\gamma_{73}\gamma_{71}$的支路。传输常数为$\gamma_{73}\gamma_{71}$的支路与常数为$H(11)$的支路平行。利用规则2，把这些支路简化成一条支路，其传输常数为$H_1(11)=\gamma_{73}\gamma_{71}+H(11)$。

由于上述变换的结果传输常数为$\gamma_{71}$、$\gamma_{72}$、$\gamma_{73}$、$H(11)$和$H(12)$的支路组合就简化成一条从$\delta\bar{p}'_6(1)$的节点输出的常数为$\gamma_{73}\gamma_{72}$的支路和一条由常数为$H(11)$和$H(12)$的两支路组成的回路。按照规则7把$\delta\bar{p}'_6(1)$的节点分割后，按照规则4消去属于节点$\delta p'_6(1)$的由于分割而得到的传输常数为$H_1(11)H(12)$的回路。这时支路10和13的传输常数变为：

$$H_1(10)=H(10)/[1-H_1(11)H(12)]$$
$$H_1(13)=H(13)/[1-H_1(11)H(12)]$$

分割$\delta\bar{p}'_6(1)$节点后所得的常数为$H(12)\gamma_{73}\gamma_{72}$的支路实际上是与支路14平行的。按照规则2把它们变换为1条支路，其传输常数为

$$H_1(14)=H(14)+H(12)\gamma_{73}\gamma_{72}$$

由于这些变换的结果，相当于调节器7和分段6的信号流图就简化成由常数为$H_1(13)$和$H_1(14)$的支路组成的回路。按照规则7常数为$H(15)H_1(16)$、$H_1(13)H_1(14)$、$H_1(9)H_1(10)$的回路组合可以简化成以下几条回路，其中一条回路的支路的传输常数按下列公式确定

$$H_2(15)=H_1(9)H_1(13)H(15)/[1-H_1(13)H_1(14)]$$
$$H_2(16)=H_1(10)H_1(14)H_1(16)/[1-H_1(13)H_1(14)]$$

另两条回路为$\delta\bar{p}'_2(0)$节点和$\delta\bar{p}'_4(1)$节点的原来的回路，它们的传输常数由下列公式确定

$$H_3(15)=H_1(16)H(15)/[1-H_1(13)H_1(14)]$$
$$H_3(16)=H_1(9)H_1(10)+H_1(13)H_1(9)H_1(14)H_1(10)$$
$$/[1-H_1(13)H_1(14)]$$

按照规则4在消去常数为$H_3(15)$和$H_3(16)$的回路后，就转为图2.33(c)所示的流图，图中支路的传输常数由以下公式表示：

$$H'(3)=H_1(3)/[1-H_3(15)]$$

$$H'(16)=H_2(16)/[1-H_3(15)]$$

$$H'(8)=H_1(8)/[1-H_8(16)];$$

$$H'(15)=H_2(15)/[1-H_3(16)]$$

$$H'(4)=H(4);\quad H'(5)=H(5);\quad H'(6)=H(6)$$

$$H'(7)=H(7);\quad \gamma'_{31}=\gamma_{31};\quad \gamma'_{32}=\gamma_{32}$$

$$H'(1)=H(1);\quad H'(24)=H(24);\quad H'(18)=H(18)$$

上面所研究的信号流图可以求出气液系统的传递函数

$$\delta\bar{p}'_4(1)/\delta\bar{n}'_3;\qquad \delta\bar{p}'_6(1)/\delta\bar{n}'_3;$$

$$\delta\bar{p}'_{10}(1)/\delta\bar{n}'_3;$$

$$\delta\bar{p}'_{12}(1)/\delta\bar{n}'_3$$

对此要利用麦森公式(2.9.4)。

首先求传递函数$\delta\bar{p}'_4/\delta\bar{n}'_3$，为此必须找出从$\delta\bar{n}'_3$节点到$\delta\bar{p}'_4(1)$节点的所有各直路以及与之有关的回路(见2.9.3节)。各直路的传输常数为

$$P_1=\gamma'_{31}H'(3)H'(15);\quad P_2=\gamma'_{31}H'(6)H'(8)$$

$$P_3=\gamma'_{32}H'(5)H'(3)H'(15);\quad P_4=\gamma'_{32}H'(8)$$

传输常数为$P_1$、$P_2$和$P_3$的直路上没有回路，它们与回路不相干。传输常数为$P_4$的后一条直路则具有传输常数为$L_{41}^{(1)}=H'(3)\cdot H'(4)$的这样一条回路。

现在求各阶回路的传输常数

$$L_1^{(1)}=H'(3)H'(4);\quad L_2^{(1)}=H'(15)H'(6)$$

$$L_3^{(1)}=H'(7)H'(8);\quad L_4^{(1)}=H'(15)H'(16)$$

$$L_5^{(1)}=H'(15)H'(7)H'(5)H'(3)$$

$$L_6^{(1)}=H'(16)H'(4)H'(6)H'(8)$$

$$L_1^{(2)}=H'(3)H'(4)H'(7)H'(8)$$

$$L_2^{(2)}=H'(5)H'(6)H'(15)H'(16)$$



利用所得的关系式和公式(2.9.4)就可得出气液系统的传递函数

$$\frac{\delta\bar{p}'_4(1)}{\delta\bar{n}'_3}=\frac{P_1+P_2+P_3+P_4(1-L_{41}^{(1)})}{1-L_1^{(1)}-L_2^{(1)}-L_3^{(1)}-L_4^{(1)}-L_5^{(1)}-L_6^{(1)}+L_1^{(2)}+L_2^{(2)}}$$

$$\frac{\delta\bar{p}'_{10}(0)}{\delta\bar{n}'_3}=\frac{\delta\bar{p}'_4(1)}{\delta\bar{n}'_3}H'(26)$$

$$\frac{\delta\bar{p}'_{10}(1)}{\delta\bar{n}'_3}=\frac{\delta\bar{p}'_{10}(0)}{\delta\bar{n}'_3}H'(20)$$

$$\frac{\delta\bar{p}'_{11}(1)}{\delta\bar{n}'_3}=\frac{\delta\bar{p}'_{10}(1)}{\delta\bar{n}'_3}H'(22)$$

$$\frac{\delta\bar{p}'_{12}(1)}{\delta\bar{n}'_3}=\frac{\delta\bar{p}'_{11}(1)}{\delta\bar{n}'_3}H'(24)$$

$$\frac{\delta\bar{p}'_9(1)}{\delta\bar{n}'_3}=\frac{\delta\bar{p}'_{10}(0)}{\delta\bar{n}'_3}H'(18)$$

为了确定传递函数$\delta\bar{G}'_i(0)/\delta\bar{n}'_3$，其中$\delta\bar{G}'_i(0)$——$i$元件输入端的流量变化幅值，可以利用四端网络方程中的一个方程

$$\delta\bar{G}'_i(0)=y'_{i-11}\delta\bar{p}'_i(0)+y'_{i-12}\delta\bar{p}'_i(1)$$

对此方程的两边除以$\delta\bar{n}'_3$，并考虑到确定$\delta\bar{p}'_i(0)/\delta\bar{n}'_3$和$\delta\bar{p}'_i(1)/\delta\bar{n}'_3$的关系式可以按前面已叙述的方法求得，就可得出流量变化幅值的传递函数

$$\frac{\delta\bar{G}'_i(0)}{\delta\bar{n}'_3}=y'_{i-11}\frac{\delta\bar{p}'_i(0)}{\delta\bar{n}'_3}+y'_{i-12}\frac{\delta\bar{p}'_i(1)}{\delta\bar{n}'_3}$$

当需要时，传递函数$\delta\bar{G}'_i(1)/\delta\bar{n}'_3$也可用类似的方法求出。

# 第三章　气路动态特性

## 3.1　低频区气路中的非稳态过程

### 3.1.1　无过流的流容

方程（2.1.6）以及（2.1.7）描述了过流流容的低频动态特性，该流容中的非稳态过程参数只取决于液体的一个特性——它的压缩性。如果过流流容（流路）内充满了气体，那么一般的质量平衡方程（2.1.1）保持不变，而把气体质量与其它参数联系起来的关系式（2.1.3）可能改变。因为它的形式与流容中的过程特性有关，也与流容的入口条件有关。当流容（流路）的长度大大小于所研究的频率范围内的声波波长时，则可以认为，每一瞬间容积内所有各点的压力是相同的。这就意味着，既不考虑参数的分布性（即声学效应，见3.3节），也不考虑气体的惯性及对壁面的摩擦。现首先研究最简单的一种流容——无过流的流容。

对无过流的（盲腔式）流容，除所作的关于流容内每一点的瞬时压力值相同的简化假设外，对气体的温度也可出作类似的假设。在无过流的流容内，压力与气体温度$T$的关系也就取决于气体与流容壁面之间的热交换条件。考虑到所作的关于流容内每一点上的气体温度瞬时值为常量的假设，气体与壁面的热交换就很容易算出，其方法是引入气体多变过程指数$n$的有效值：

$$pv^n = 常数 \tag{3.1.1}$$

式中　$v$——气体的比容。



如果流容中的气体参数的变化进行得相当慢，而气体的容积又相对不大，于是在参数变化期间由于热交换，气体和壁的温度就来得及平衡。因为壁材料的总热容通常大大地大于气体的热容，因而可以认为，流容内的过程可用等温方程来描述，$T$=常数，即$n=1$。这时，利用理想气体状态方程，就可求出流容内气体的质量

$$m = \rho V = \frac{p}{RT} V \tag{3.1.2}$$

式中　$R$——气体常数；

$V$——流容的容积。

把式（3.1.2）代入质量平衡方程（2.1.1），并考虑条件$T=\text{const}$，就可求得盲腔式流容的方程

$$\frac{V}{RT} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = G \tag{3.1.3}$$

对方程（3.1.3）进行线性化处理，采用有量纲或无量纲变化量，可得

$$\frac{V}{RT} \frac{\mathrm{d}\delta p'}{\mathrm{d}t} = \delta G' \tag{3.1.4}$$

$$\tau_c \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t} = \delta G \tag{3.1.5}$$

式中　$\tau_c = pV/(RTG)$——盲腔式流容的流容时间常数；

$\delta G'$、$\delta G$——进入流容的有量纲和无量纲气体流量变化量。

当气体参数变化很快时，流容内就可能发生另一种过程极端情况，这时气体与壁之间的热交换实际上来不及进行。在这种情况下气体中的过程是绝热过程，即$n=\kappa$，这里$\kappa$为绝热指数，因而由绝热方程把各参数彼此间联系起来

$$p^{(1-\kappa)/\kappa} T = 常数 \tag{3.1.6}$$

把式（3.1.6）代入式（3.1.2）和（2.1.1），经线性化后得出用有量纲和无量纲变化量书写的气体绝热过程的流容方程，

$$\frac{V}{\kappa RT}\frac{\mathrm{d}\delta p'}{\mathrm{d}t}=\delta G' \tag{3.1.7}$$

$$\frac{\tau_{\circ}}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}=\delta G \tag{3.1.8}$$

盲腔式流容中绝热过程下的方程（3.1.7）和（3.1.8）与等温过程方程（3.1.4）和（3.1.5）的差别只是在流容时间常数之前有一个乘数$1/\kappa$。对于中间情况，当气体各参数由多变方程（3.1.1）联系在一起时，方程（3.1.7）和（3.1.8）的表示形式保持不变，但应将多变指数$n$代替绝热指数$\kappa$代入这两个方程。

如果无过流的流容一部分充有成滴液体，另一部分充有气体，那么，可利用方程（2.1.1）、（2.1.3）和（3.1.2），并认为气体在流容中处于液体之上，而气体中的过程是等温过程，即可得有量纲和无量纲变化量的线性化关系式

$$\left(\frac{\rho_{\text{ж}}V_{\text{г}}}{p}+\frac{V_{\text{ж}}}{a_{\text{ж}}^2}\right)\frac{\mathrm{d}\delta p'}{\mathrm{d}t}=\delta G'_{\text{ж}} \tag{3.1.9}$$

$$\tau_{\circ\Sigma}\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}=\delta G_{\text{ж}} \tag{3.1.10}$$

式中 $\delta G'_{\text{ж}}$、$\delta G_{\text{ж}}$——通过流容的有量纲和无量纲液体流量变化量；

$V_{\text{г}}$、$V_{\text{ж}}$——流容中气体和液体的容积；

$\rho_{\text{ж}}$、$a_{\text{ж}}$——液体密度和液体中的声速；

$\tau_{\text{e}\Sigma}=\dfrac{p}{G_{\text{ж}}}(\rho_{\text{ж}}V_{\text{г}}/p+V_{\text{ж}}/a_{\text{ж}}^2)$——流容时间常数；

$G_{\text{ж}}$——液体的标定流量。

方程（3.1.9）和（3.1 10）也可用来描述为了抑制振荡[21]或



为了保证模拟壁的工程条件[18]而安装在液体火箭发动机、火箭和试验台系统流路上的阻尼装置中过程的动态特性。此外，这两个方程有时也可用来描述某些液路诸分段的动态特性，在这些液路分段中存在着第二相，气（蒸汽）相，例如存在着气蚀区。

### 3.1.2 具有可变温度的流路中非稳态过程的某些特点

液体火箭发动中包含有一系列有组织的不等温气体运动的流路：燃烧室、燃气发生器、燃气导管等。在这些组体中燃气可以是通过喷嘴喷入的液体（气态）组元经燃烧而形成的，也可以是从另一个组件（涡轮、燃气导管）进入这些组件的。当推进剂燃烧时放出热量，导致燃烧产物的温度升高。前面在研究液路内液体的流动动态特性时，把压力和流量（速度）的变化量作为变量。在分析燃烧产物的运动时，除这两个变量外，还必须考虑燃气的温度变化。燃气温度可以在燃烧区内因氧化剂和燃料流量之间的混合比变化而发生变化，也可以在整个流路中（如果过程是绝热的）压力变化时因燃气的压缩（膨胀）而发生变化。

燃烧过程本身就具有某些动态特性，但对它的研究还不够，而且现在还没有可靠而简单的非稳态燃烧的模型[20]。从另一方面来说，燃烧过程对这里所讨论的发动机的低频过程影响不大，因此只能局限于燃烧过程最简单的数学模型，即仅限于纯时滞。液体组元在燃烧室和燃气发生器内转化为燃烧产物的特征时间估计在$10^{-3}\sim10^{-2}$s的范围内[18,20]。

如果仅限于低频区，那么在发动机气路的数学模型中就可以忽略声学效应，因为在这些频率下声波的波长$\lambda=a/f$（其中$a$为声速；$f$为振荡频率）大大地大于流路（燃烧室）的特征长度$L_{\text{к}}$。这时（图3.1）流路长度上每一瞬间的压力偏差实际上是相同的，因而可以把流路视作具有集中参数的元件，也即视作一个其特征时间常数等于流路内燃气停留时间的流容。

液体推进剂（或燃气中的液体）燃烧时形成的燃气温度随着

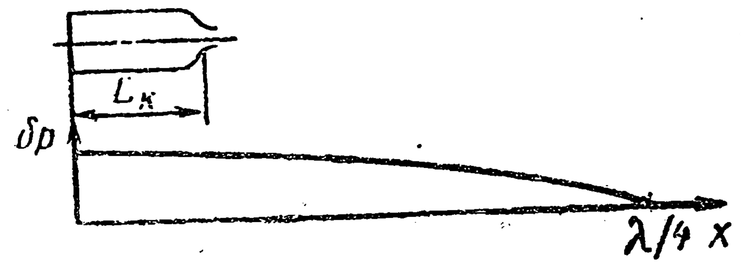



图3.1 说明声波波长 λ和气路（燃烧室）长度$L_K$之间相互关系的图例

153

进入燃烧室或燃气发生器的氧化剂和燃料的质量流量之间的混合比——组元质量混合比的变化而变化。在动力学上，当燃烧室（燃气发生器）前的液路和气路的流动参数偏离稳态值时，由于这些流路的水力阻力和动态特性不一样，它们的流量变化是不一样的，这会导致组元混合比的变化。组元混合比变化的后果是燃烧时形成的气态燃烧产物的物理参数—温度、组分、气体常数等发生变化。所以当进入组元的参数随着时间不断地变化（振荡、过渡过程）时，在燃气发生器（燃烧室）头部附近重新形成的每股燃烧产物可以具有自己的温度、自己的组分等，也即流动是不等温的。

为了描述燃烧产物在不考虑声学效应的气路内不等温流动，可以从以下两个最简单的极端的过程数学模型之中采用一个[15]：绝热流动模型或流路中燃气瞬时充分混合模型。绝热流动模型建立在如下的假设上：当沿着流路流动时，头部附近形成的每股（层）燃气处于绝热条件下，即既没有与相邻的各股燃气，也没有与流路的壁面发生热量（或质量）交换。这个条件与关于气柱中忽略热传导和扩散过程的假设，即燃气中的导热系数和扩散系数等于零的假设是等效的。

瞬时混合模型相当于在重新形成的这股燃气与气路中其余的所有燃气之间非常迅速地（实际上是瞬时地）进行热量交换和质量交换（因为不仅要温度平衡，而且还要燃烧产物的组分平衡）。结果是除在该瞬间由液体（或由气体和液体）组元形成的那股燃气外，沿燃气发生器（燃烧室）流路的长度上各部分燃气的温度



瞬时值和燃烧产物的组分都是相同的。气柱内这种过程的模型对应于导热系数和扩散系数等于无穷大的另一类极限值情况。

原则上也可以采用导热系数（或扩散系数）为中间值的模型[6,7]。但是在这种模型框架上得出的方程用来计算液体火箭发动机的动态特性过于烦琐。另一方面，计算和试验表明，在无气流分离区及逆流区的气路内相对来说在不太高的频率范围内（400Hz以下），过程是接近绝热的[6,7]。

对于复杂形状流路内的流动还没有多少经过论证的非稳态过程的数学模型，这种流路有转弯及变流通截面积，流路内会形成有逆流的分离区。当分析这些流动动态方面的试验数据时，采用经验的混合模型是比较方便的：对一部分流路内的流动采用绝热流动模型，而对另一部分内的流动则采用瞬时充分混合模型。

在建立绝热流动的模型时作如下假设：在头部附近燃烧区形成的每股燃烧产物以燃气速度沿流路运动。燃烧区的容积忽略不计。在非稳态过程的情况下，每股燃气可以有自己的温度，该温度既与形成该股燃气的液体（气态）组元的混合比有关，也与流路内形成燃气后产生的压力变化有关。在绝热流动的情况下，每股燃气可以有自己的熵，当这股燃气沿流路运动时熵是保持不变的。因此熵是表示绝热流动最有用的信息参数，而且熵守恒方程可用来代替计算不等温流动参数必需的能量方程。

具有不变熵的各股燃气当沿着流路移动时会形成熵波[28]。这些波有时叫做温度波，但这个名称不够严密，这是因为在绝热流动情况下当保持熵不变时由于压力变化（绝热压缩或膨胀）燃气温度是变化的。熵波（不同于声波）以燃气速度传播，而且熵波在流路分段内的传播特征时间就是燃气在该分段内的停留时间。这个时间同时也就是视作流容的那段气路分段的特征时间，即视作具有集中参数元件的特征时间。熵波传播的特征时间和视作流容的那段流路分段的特征时间是一致的。当建立燃气不等温运动的流路的低频数学模型时这是必须考虑的。

这样，在建立用于分析低频区过程的火箭发动机气路数学模型时必须把气路段既视作具有集中参数的元件（流容），又视作具有分布参数的元件（即考虑熵波），而在该低频区内可以忽略声学效应。下面将利用普通的物理规律性来推导燃气不等温运动的方程。

### 3.1.3 非稳态绝热过程的数学模型

燃气在流路内的非稳态不等温运动，同时也是绝热运动（就燃气各层与壁之间没有热量交换方面来说），它可用三个方程——连续方程、动量方程和能量方程来描述。

首先着重研究动量守恒方程。前面已经指出，在相对低的频率范围内由于声波波长 $\lambda$ 与流路长度 $L_K$ 相比差别很大（见图3.1），故可以忽略因声学效应而引起的流路各截面上压力瞬时值的差异。除了声学效应外在流路各截面上造成压力差异的原因可以是阻力（局部阻力或沿流路长度上的分布阻力）和气柱惯性的影响。在 3.6 节中将要证明，可用马赫数 $M$ 的二次方系数把视作集中参数系统的流路内的燃气的惯性时间常数与流容时间常数——流路内燃气的停留时间联系在一起。因为在火箭发动机的气路中 $M$ 数不大（$M\approx0.1$），故流路的动态方程中惯性项可以忽略不计。

上面所提到的流路中相对小的燃气速度以及不长的流路长度使得在大多数情况下也可以忽略对流路壁面的摩擦损失，它只占流路中燃气总压的很小部分。作为流路元件的燃气发生器燃气局部阻力（平衡装置、抑制声振的阻力等）的压力损失可能相当大，因而在这种情况下对其不能忽略不计。为了计算局部阻力的压力损失可把气路划分为由局部阻力分隔的各个分段，并对每一个分段写出各自的方程组。

从关于忽略气柱惯性时间常数的假设条件并从惯性元件方程（2.1.10）可知，气路分段长度上压力的瞬时值是相同的。于是



可以写出气路分段的动量方程如下

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}=0 \text{或} p(0,t)=p(x,t)=p(L,t)$$

式中 $p(0,t)$、$p(L,t)$、$p(x,t)$——流路分段始端（$x=0$），终端（$x=L$）和中间截面（坐标$x$）上的压力瞬时值。

先转为小变化量，并把该变化量除以变动参数的平均值，将其化成无量纲形式，就可写出动量守恒方程

$$\frac{\partial \delta p(x,t)}{\partial x}=0$$

这个方程也可写成如下形式

$$\delta p(0,t)=\delta p(L,t)=\delta p(x,t)=\delta p \qquad (3.1.11)$$

考虑到所作的过程绝热特性的假定，最方便的是将气路分段的能量方程写成每股燃气在其沿各自的流路段整个长度运动时它的熵值守恒条件的形式。这时应考虑到，所研究的这股燃气从它在头部附近形成的时刻经滞后时间 $\tau$ 才进到坐标为 $x$ 的流路截面，而此滞后时间又等于从头部到 $x$ 截面这一段长度上的燃气停留时间。对燃气平均速度不变的圆柱形流路时滞等于 $\tau=x/u$，其中 $u$——燃气在流路分段内运动的平均速度。对于流通截面形状复杂的流路时滞由下式求出

$$\tau=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{u(x)} \qquad (3.1.12)$$

式中 $u(x)$——燃气平均速度，为分段截面坐标的函数。

考虑到时滞可用燃气在所研究的流路分段上的停留时间来表示，绝热过程的流动条件可以每股燃气的熵守恒条件的形式写成下式：

$$s(x,t)=s(0,t-\tau) \qquad (3.1.13)$$

式中 $s(x,t)$——$t$ 时刻在流路 $x$ 截面上一股燃气的比熵值；

$s(0,t-\tau)$——$(t-\tau)$时刻在流路分段始端（$x=0$）处同一股燃气的比熵值；

$\tau$——从流路始端到$x$截面这一段上燃气的停留时间。

对线性化形式下的小无量纲变化量，方程（3.1.13）变为下式：

$$\delta s(x,t)=\delta s(0,t-\tau)=\delta s_1(t-\tau) \tag{3.1.14}$$

式中 $\delta s(x,t)$——在流路$x$截面上与燃气定压比热容$c_p$有关的熵的无量纲变化量；

$\delta s_1(t-\tau)$——所研究的一股燃气进入分段入口处时，即比现行时刻$t$早$\tau$时在分段入口处熵的无量纲变化量。

用热力学关系式把理想气体的熵与压力及温度联系起来

$$s=c_p\ln T-R\ln p+\text{const} \tag{3.1.15}$$

把式（3.1.15）进行线性化处理，并考虑到

$$R/c_p=(c_p-c_v)/c_p=(\kappa-1)/\kappa$$

式中 $\kappa$——燃气的绝热指数，

即可求出熵的无量纲变化量

$$\delta s=\delta T-\frac{\kappa-1}{\kappa}\delta p \tag{3.1.16}$$

式中 $\delta T$、$\delta p$——燃气的温度和压力相对于变量平均值的无量纲变化量；

$c_v$——定容比热容。

考虑到式（3.1.16）流路分段入口（$x=0$）和出口（$x=L$）处的能量守恒方程写成下式

$$\delta T_2-\frac{\kappa-1}{\kappa}\delta p=\delta T_1(t-\tau)-\frac{\kappa-1}{\kappa}\delta p(t-\tau) \tag{3.1.17}$$

式中 $\delta T_2$——流路分段出口处温度的无量纲变化量；

$\delta T_1$——流路分段入口处的同一参数。



方程（3.1.13）和（3.1.17）描述了流路中燃气绝热运动时熵波的传播。在3.3节中当忽略引起熵波耗散的扩散作用和热传导时只要解偏导数的能量方程也可精确地得到上述这些关系式。

除冲量守恒和能量守恒方程外，为描述气路中的非稳态过程尚需利用质量守恒方程，在约定的假设下质量守恒方程写成如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=G_1-G_2 \tag{3.1.18}$$

式中 $m$——流路分段中的燃气质量；

$G_1$、$G_2$——流路分段入口和出口处的燃气流量。

这里以及以下，和第二章所采取的办法一样，凡是只与时间有关的所有变量，为了简单起见省略了时间$t$的自变量。

当略去已进入流路分段但尚未进行燃烧的液体组元所占的容积时，流路分段内的燃气质量由下面的积分式求出：

$$m=\int_0^L\rho(x,t)F(x)\mathrm{d}x \tag{3.1.19}$$

式中 $\rho(x,t)$——$x$截面上燃气密度的瞬时值；

$F(x)$——流路横截面积；

$L$——流路分段长度。

将式（3.1.18）和（3.1.19）进行线性化处理，为了简单起见，认为流路分段具有圆柱形，即$F(x)=\text{const}$，化成无量纲变化量，得

$$m\frac{\mathrm{d}\delta m}{\mathrm{d}t}=G(\delta G_1-\delta G_2) \tag{3.1.20}$$

$$m\delta m=\rho F\int_0^L\delta\rho(x,t)\mathrm{d}x=\rho FL\int_0^1\delta\rho(\bar{x},t)\mathrm{d}\bar{x} \tag{3.1.21}$$

式中　　$\delta_m$——流路分段中相对于平均质量$m$的燃气质量的无量纲变化量；

$\delta G_1$、$\delta G_2$——流路分段入口处(截面$\bar{x}=0$)，和出口处($\bar{x}=1$)相对于燃气平均流量$G$的燃气流量无量纲变化量；

$\bar{x}=x/L$——沿流路轴线的无量纲坐标；

$\delta\rho(\bar{x},t)$——在$\bar{x}$截面上相对于燃气平均密度$\rho$的燃气密度瞬时值的无量纲变化量；

$F$——流路分段横截面积。

如果流路具有比较复杂的形状，那么在第一次近似时可用等效的圆柱形流路来代替它，燃气在其中的停留时间由公式(3.1.12)来确定。考虑到对圆柱形流路来说，$m=\rho FL$；$\tau=m/G$，把方程(3.1.20)和(3.1.21)化成下式

$$\tau\frac{\mathrm{d}\delta m}{\mathrm{d}t}=\delta G_1-\delta G_2 \tag{3.1.22}$$

$$\delta m=\int_0^1\delta\rho(\bar{x},t)\,\mathrm{d}\bar{x} \tag{3.1.23}$$

在流路分段入口处产生的温度（熵）变化量以熵波的形式沿流路轴线传播；随着温度沿着流路长度变化，燃气密度也同时发生变化，由热力学关系式把密度与压力及熵联系在一起

$$s=c_v\ln p-c_p\ln\rho+\mathrm{const} \tag{3.1.24}$$

将式(3.1.24)进行线性化处理，采用无量纲变化量后得

$$\delta\rho=\frac{1}{\kappa}\delta p-\delta s \tag{3.1.25}$$

把式(3.1.25)代入方程(3.1.23)，这时考虑条件(3.1.11)，可得

$$\delta m=\int_0^1\left[\frac{1}{\kappa}\delta p-\delta s(\bar{x},t)\right]\mathrm{d}\bar{x}=\frac{1}{\kappa}\delta p-\int_0^1\delta s(\bar{x},t)\,\mathrm{d}\bar{x}$$



(3.1.26)

可以把$\bar{x}$截面上熵变化的瞬时值$\delta s(\bar{x},t)$与流路分段入口处的熵变化量$\delta s_1$联系起来，为此可利用熵守恒条件(3.1.14)，并把式(3.1.26)中纵向坐标$\bar{x}$化为流路分段上$x$截面前的燃气停留时间$\tau$。当然气平均速度$u$不变时可把$\tau$与$\bar{x}$联系起来：

$$\tau=\frac{x}{u}=\frac{L}{u}\bar{x};\quad \mathrm{d}\tau=\frac{1}{u}\mathrm{d}x=\frac{L}{u}\mathrm{d}\bar{x}=\tau\mathrm{d}\bar{x}$$

考虑到这些关系式和利用式(3.1.14)，把方程(3.1.26)化成下式：

$$\delta m=\frac{1}{\kappa}\delta p-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\delta s_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.1.27}$$

把式(3.1.27)代入质量平衡方程(3.1.22)，得

$$\frac{\tau}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^\tau\delta s_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\delta G_1-\delta G_2 \tag{3.1.28}$$

方程(3.1.28)中含有在积分符号外的时间导数项，积分的上下限与时间无关。可以把导数引入积分符号之中，同时在积分中方便地把自变量$t$转为自变量$\theta=t-\tau$。结果方程(3.1.28)化成下式

$$\frac{\tau}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}+\int_t^{t-\tau}\frac{\mathrm{d}\delta s_1(0)}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta=\delta G_1-\delta G_2$$

对此方程左边第二项进行积分后，可得流路分段质量守恒方程的最终形式

$$\frac{\tau}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}-\delta s_1+\delta s_1(t-\tau)=\delta G_1-\delta G_2 \tag{3.1.29}$$

方程(3.1.29)是在关于每股燃气流绝热特性的假定下描述气路分段动态特性的线性方程组中的最后一个方程。用已线性化的式(3.1.16)把流路分段入口处燃气熵的变化量与压力和温度联系在一起，利用该式把方程(3.1.29)写成另一个形式

$$\frac{\tau}{\kappa}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}-\delta T_1+\delta T_1(t-\tau)+\frac{\kappa-1}{\kappa}[\delta p-\delta p(t-\tau)]$$

$$=\delta G_1-\delta G_2 \qquad (3.1.30)$$

式中 $\delta T_1$——流路分段入口处（$\bar{x}=0$）燃气温度的无量纲变化量。

分段入口处和出口处燃气的熵、温度和流量变化量与液体火箭发动机其它参数变化量的关系取决于该分段在流路中及在整个发动机中所处的位置。建立发动机气路数学模型的有关问题将在3.2节中进行比较详细的研究。

### 3.1.4 气路瞬时充分混合的数学模型

对气路中另一种极端过程——瞬时充分混合的过程要利用前面所作的关于声波波长和流路分段长度之间相互关系的假设。这种过程可由关于燃气压力变化量的等式（3.1.11）来描述。

如取燃气瞬时充分混合的假设条件，也即认为热导率和扩散系数为无限大，那么整个流路分段上的燃气温度的瞬时值 $T(x,t)$（在该瞬间刚进入入口或刚形成的那股燃气除外）是一样的，并等于流路分段出口处的温度 $T(L,t)=T_2(t)$：

$$T(x,t)=T(L,t)=T_2(t) \quad (0<x\leqslant L) \qquad (3.1.31)$$

式中 $T_2(t)$——流路分段出口处的温度。

采用了“瞬时充分混合”这一术语，而未采用“瞬时传热”这一术语，因前者更普遍，既考虑传热，也考虑混气组分变化，即意味着考虑燃气气体常数也变化。

对等式（3.1.31）进行线性化处理后，可得无量纲变化量之间的关系（对无量纲坐标 $\bar{x}=x/L$ 而言）：

$$\delta T(\bar{x},t)=\delta T_2(t) \quad (0<\bar{x}\leqslant 1) \qquad (3.1.32)$$

式中 $\delta T(\bar{x},t)$、$\delta T_2(t)$——流路 $\bar{x}$ 截面外和出口处（$\bar{x}=1$）燃气温度的无量纲变化量。



忽略燃气的动能，可写出流路分段上视作集中参数系统的燃气流的能量守恒方程，因为按所作的假设，流动是绝热的，流路入口处的温度干扰散逸得很快，因此整个分段上（除入口截面外）燃气温度的瞬时值是相同的。这就意味着条件（3.1.31）是满足的，而燃气的比热容是常值。由此得出

$$\frac{\mathrm{d}(mc_vT_2)}{\mathrm{d}t}=c_pT_1G_1-c_pT_2G_2 \qquad (3.1.33)$$

将方程（3.1.33）进行线性化处理，即得气流参数无量纲变化量的能量方程

$$mc_vT\frac{\mathrm{d}\delta T_2}{\mathrm{d}t}+mc_v\frac{\mathrm{d}\delta m}{\mathrm{d}t}$$

$$=c_pTG\delta G_1+c_pTG\delta T_1-c_pTG\delta G_2-c_pTG\delta T_2$$

式中 $m$、$T$、$G$—— 流路分段中质量、温度和流量的平均值。

将上式各项除以右边部分变化量的系数，经变换后得

$$\frac{\tau}{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}\delta T_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\delta m}{\mathrm{d}t}\right)=\delta G_1-\delta G_2+\delta T_1-\delta T_2 \qquad (3.1.34)$$

线性化的能量方程（3.1.34）把燃气温度变化量导数和质量变化量导数与气流其它参数的变化量联系在一起。流路分段中燃气质量变化量由连续方程（3.1.22）确定。

利用理想气体状态方程

$$p/\rho=RT \qquad (3.1.35)$$

并取 $R$ = 常数，可得联系燃气参数（无量纲变化量的）的线性化方程

$$\delta p-\delta\rho=\delta T \qquad (3.1.36)$$

由方程(3.1.36)解出密度变化量 $\delta\rho$，把它代入式(3.1.23)，并考虑条件（3.1.11）和（3.1.32），得

$$\delta m=\int_0^1[\delta p(\bar{x},t)-\delta T(\bar{x},t)]\mathrm{d}\bar{x}=\delta p-\delta T_2$$

考虑到上面的等式时质量守恒方程（3.1.22）化成下式：

$$\tau\left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\delta T_2}{\mathrm{d}t}\right)=\delta G_1-\delta G_2 \qquad (3.1.37)$$

解方程组（3.1.34)和（3.1.37），使其中每一个方程只剩下一个导数。为此把质量平衡关系式(3.1.22)代入方程(3.1.34)，可得

$$\frac{\tau}{\kappa}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta T_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\kappa-1}{\kappa}(\delta G_1-\delta G_2)+\delta T_1-\delta T_2 \qquad (3.1.38)$$

把方程（3.1.38）的导数代入式（3.1.37)，可得气路分段的第二个微分方程

$$\frac{\tau}{\kappa}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}=\delta G_1-\delta G_2+\delta T_1-\delta T_2 \qquad (3.1.39)$$

方程组（3.1.11)、(3.1.32)、(3.1.38）和（3.1.39）在燃气瞬时充分混合的假定条件下用线性近似的方法描述了不等温流气路分段的动态特性。

## 3.2 气路的数学模型

第3.1节中所得的不等温流气路的线性数学模型方程没有与具体的、有燃气流的发动机组件的结构特点直接联系起来，也没有与组体中过程的组织直接联系起来。尤其是在所推出的共性方程中把流路分段入口和出口处的燃气流量变化量及入口处的温度变化量用作外部干扰变量。对具体的发动机组件来说，这些变化量实际上是与发动机其它参数的变化量有联系的。液态和气态的推进剂组元燃烧时在发动机组件中形成燃气，而这些组元正是从液路和气路通过喷嘴喷入组件的。所以最方便的是把通过燃烧室喷嘴的液态和气态组元的流量变化量用作变量，正是这些变量决定了燃烧室和燃气发生器中来自燃气流入口方向的外部干扰。



对液-液型发动机燃烧室（无补燃)和燃气发生器来说，经喷嘴进入燃烧室中的液体组元的流量平衡方程可写成下式

$$G_{\text{ж}}=G_{\text{ок}}+G_{\text{г}}$$

式中 $G_{\text{ок}}$、$G_{\text{г}}$——通过喷嘴的液体氧化剂和燃料的流量；

$G_{\text{ж}}$——液体组元的总流量。

按照前面所作的假定，推进剂的转化曲线逼近于纯时滞。这时由下式把气路分段（燃烧室）入口处的燃气流量与经过喷嘴的液体组元流量联系在一起

$$G_1=G_{\text{ж}}(t-\tau_{\text{г}})=G_{\text{ок}}(t-\tau_{\text{г}})+G_{\text{г}}(t-\tau_{\text{г}})$$

式中 $\tau_{\text{г}}$——液体组元转化为燃烧产物的时间。

把上式进行线性化处理并转为流量的无量纲变化量，得

$$\delta G_1=\frac{G_{\text{ок}}}{G_{\text{ок}}+G_{\text{г}}}\delta G_{\text{ок}}(t-\tau_{\text{г}})+\frac{G_{\text{г}}}{G_{\text{ок}}+G_{\text{г}}}\delta G_{\text{г}}(t-\tau_{\text{г}}) \qquad (3.2.1)$$

式中 $\delta G_{\text{ок}}$、$\delta G_{\text{г}}$——氧化剂和燃料流量的无量纲变化量。

如果采用燃烧室入口处组元的质量混合比 $K_{\text{m1}}=G_{\text{ок}}/G_{\text{г}}$，则式（3.2.1）变为下式

$$\delta G_1=\frac{K_{\text{m1}}}{K_{\text{m1}}+1}\delta G_{\text{ок}}(t-\tau_{\text{г}})+\frac{1}{K_{\text{m1}}+1}\delta G_{\text{г}}(t-\tau_{\text{г}}) \qquad (3.2.2)$$

两组元流量的变化导致其混合比的变化，因而也与燃烧产物的温度变化联系在一起。室压对燃烧产物温度的影响不大，所以只限于研究燃烧产物温度与组元混合比的关系曲线

$$T_1=f(K_{\text{m1}}) \qquad (3.2.3)$$

该曲线按照热力计算数据或试验数据得出[2]。作为举例图3.2上列出了四氧化二氮和偏二甲肼的这种关系曲线[31]。对公式(3.2.3)

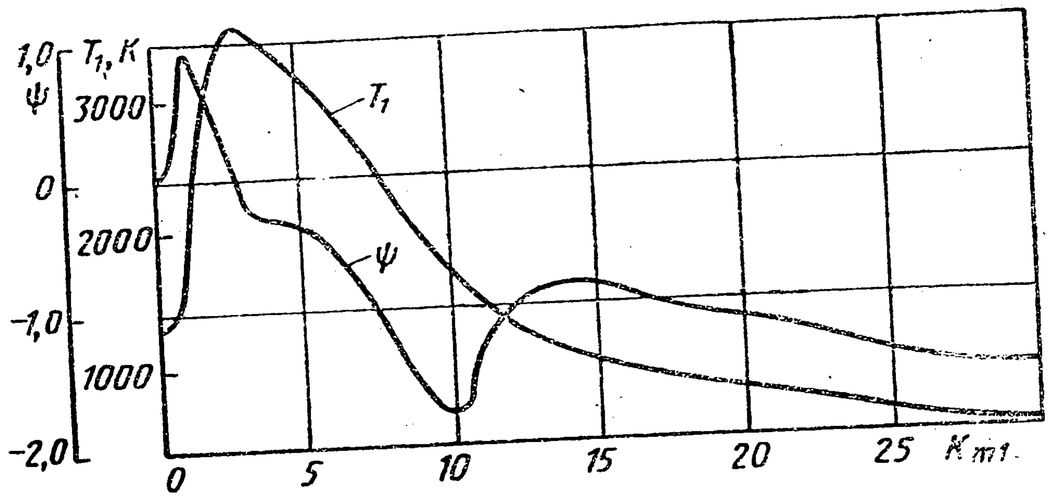



图3.2 燃烧产物温度与组元混合比的关系曲线和当组元混合比变化时此关系曲线无量纲斜率的变化曲线

进行线性化处理，考虑到组元混合比与氧化剂和燃料流量的关系并引入液体组元转化为燃气的时间，就得到气路入口处温度无量纲变化量的关系式

$$\delta T_1 = \psi \delta K_{m1} = \psi[\delta G_{ок}(t-\tau_г) - \delta G_г(t-\tau_г)] \quad (3.2.4)$$

式中 $\psi = (K_{m1}/T)(\partial T/\partial K_{m1})$——燃烧产物温度与推进剂组元混合比的关系曲线的无量纲斜率。

图3.2所列的曲线$\psi$适用于已建立曲线$T_1 = f(K_{m1})$的那些组元。从分析曲线可知，$\psi$取决于组件的类型。对于燃烧室($K_{m1}$ = 2～3) 此系数接近于零，对于富燃的燃气发生器 ($K_{m1}<1$)，$\psi>0$，但大得不多，而对于富氧的燃气发生器 ($K_{m1}>15$)，$\psi \leqslant -0.8$。$\psi$值的大小对燃气发生器内温度波动幅值的影响很大，因而对熵波幅值的影响也很大，以后将要证明，熵波的大小在很多方面决定了液体火箭发动机的动态特性。

式 (3.2.1)、(3.2.2) 和 (3.2.4)把气路入口处参数变化量——燃气流量和温度的变化量与经过喷嘴的液体组元流量变化量联系在一起。余下的问题是找出把气路出口处燃气流量与发动机其它参数联系起来的关系式。现研究具有亚临界压降的局部阻力（涡轮喷嘴、燃烧室喷嘴、平衡叶栅等）位于流路分段出口处的一般情况。在这种情况下由气体动力学公式[1]把流量与压力及温



度联系在一起

$$G_2 = \mu_2 F_2 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p^2}{RT_2}\left[\left(\frac{p_{м.с}}{p}\right)^{2/\kappa} - \left(\frac{p_{м.с}}{p}\right)^{(\kappa+1)/\kappa}\right]} \quad (3.2.5)$$

式中 $\mu_2$——流量系数；

$F_2$——流路分段出口处局部阻力的最小截面积；

$p$、$p_{м.с}$——局部阻力前后的压力；

$R$、$T_2$——气体常数及出口温度。

将式 (3.2.5)进行线性化处理和转为无量纲变化量，取气体常数$R$ = const，得

$$\delta G_2 = (1+\varepsilon)\delta p - \varepsilon \delta p_{м.с} - 0.5\delta T_2 \quad (3.2.6)$$

式中 $\delta p$、$\delta p_{м.с}$——局部阻力前后的压力无量纲变化量；

$\delta T_2$——流路分段出口温度无量纲变化量；

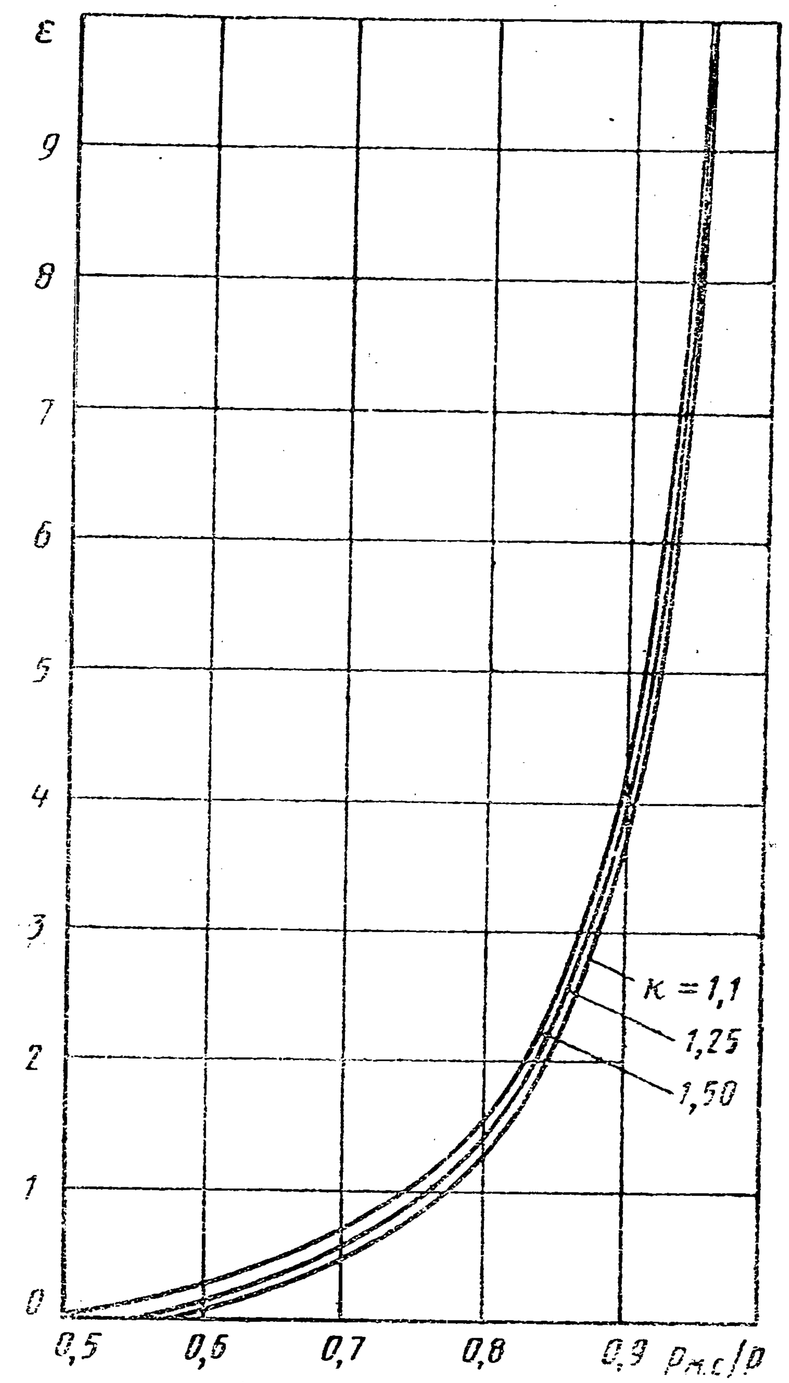



图3.3 通过局部阻力的燃气流量与$p_{м.с}/p$的关系曲线的斜率关系

$$\varepsilon = \frac{(\kappa+1)(p_{м.с}/p)^{(\kappa-1)/\kappa} - 2}{2\kappa[1-(p_{м.с}/p)^{(\kappa-1)/\kappa}]} \quad (3.2.7)$$

$\varepsilon$——通过局部阻力的燃气流量与$p_{м.с}/p$的关系曲线的无

量纲斜率。

当$p_{м.с}/p$为临界和超临界值时，即当

$$p_{м.с}/p \leqslant [2/(\kappa+1)]^{\kappa/(\kappa-1)} \text{ 时}$$

系数$\varepsilon$变为零（图3.3）。必须指出，$p_{м.с}/p$临界比的关系式严格地说只适合于具有平滑进口的喷嘴类型的局部阻力。对其它情况此关系式是不严密的[6]。对液体火箭发动机来说实际上只有涡轮喷嘴和燃烧室喷管的$p_{м.с}/p$才有临界比。在临界压降下系数$\varepsilon$变为零，而当$p_{м.с}/p$趋向1时$\varepsilon$趋向无穷大。对超临界压降，公式（3.2.7）不适用。

将关系式（3.2.2）、（3.2.4）和（3.2.6）代入式（3.1.17）和（3.1.30）就可求得绝热过程下气路分段的数学模型方程，它们描述了燃气发生器（它的部件）或燃烧室（液-液型火箭发动机）从头部到出口局部阻力（喷管、叶栅等）的气路动力学：

$$\frac{\tau}{\kappa}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}+(1+\varepsilon)\delta p-\left(\psi+\frac{K_m}{K_m+1}\right)\delta G_{ок}(t-\tau_г)$$

$$+\left(\psi-\frac{1}{K_m+1}\right)\delta G_г(t-\tau_г)+\frac{1}{2}\psi[\delta G_{ок}(t-\tau-\tau_г)$$

$$-\delta G_г(t-\tau-\tau_г)]+\frac{\kappa-1}{2\kappa}[\delta p-\delta p(t-\tau)]-\varepsilon\delta p_{м.с}=0 \tag{3.2.8}$$

$$\delta T_2-\psi[\delta G_{ок}(t-\tau-\tau_г)-\delta G_г(t-\tau-\tau_г)]$$

$$-\frac{\kappa-1}{\kappa}[\delta p-\delta p(t-\tau)]=0 \tag{3.2.9}$$

式中 $\tau$——流路分段内燃气的停留时间。

方程（3.2.8）和（3.2.9）适用于在入口处有两种液体组元燃烧的任何气路分段。公式（3.2.8）和（3.2.9）中的参数都没有写上与各流路分段相对应的下标。以后对燃气停留时间和转化



时间（当存在燃烧区时）采用如下下标：1—燃气发生器，2—燃气导管，3—燃烧室。对气路始端处的压力和温度变化量则使用另一些下标：在燃气发生器中为$\delta p_{гг}$、$\delta T_{гг}$，在燃气导管中为$\delta p_{газ}$、$\delta T_{газ}$，在燃烧室中为$\delta p_к$、$\delta T_к$。流路分段入口和出口的下标（以前相应为1和2）为了与燃气发生器和燃气导管的下标区别开来，用вх和вых来表示。

如果回到采用关于流路内燃气瞬时充分混合的假定来描述气路中过程的另一种极端情况，那么，将方程（3.1.38）和（3.1.39）代入式（3.2.2）、（3.2.4）和（3.2.6）后，可得

$$\frac{\tau}{\kappa}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta T_{вых}}{\mathrm{d}t}+\frac{\kappa-1}{2\kappa}\delta T_{вых}-\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\cdot\frac{K_m}{K_m+1}+\psi\right)\delta G_{ок}$$

$$\times(t-\tau_г)-\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\cdot\frac{1}{K_m+1}-\psi\right)\delta G_г(t-\tau_г)$$

$$+\frac{\kappa-1}{\kappa}(1+\varepsilon)\delta p-\frac{\kappa-1}{\kappa}\varepsilon\delta p_{м.с}=0 \tag{3.2.10}$$

$$\frac{\tau}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}t}+(1+\varepsilon)\delta p-\left(\frac{K_m}{K_m+1}+\psi\right)\delta G_{ок}(t-\tau_г)$$

$$-\left(\frac{1}{K_m+1}-\psi\right)\delta G_г(t-\tau_г)+\frac{1}{2}\delta T_{вых}-\varepsilon\delta p_{м.с}=0 \tag{3.2.11}$$

方程（3.2.8）和（3.2.9）或（3.2.10）和（3.2.11）用线性近似法描述了气路分段的动态特性，在该分段入口处进入两种液体组元，燃烧时转化为燃气。

另一种可能的条件是在分段入口处只进入气态燃烧产物。属于入口处有类似条件的分段者有：单区燃气发生器的流路分段，它被局部阻力与位于头部附近的另一个分段（或一些分段）所分开；在气-液型或气-气型等的火箭发动机中把涡轮与燃烧室连接

起来的燃气导管流路分段[2]。对这些流路分段由气体动力学关系式（3.2.5）或线性化的关系式（3.2.6）把入口处燃气流量与其它流动参数联系在一起，式（3.2.6)必须考虑使用流路分段的下标，可写成下式：

$$\delta G_{\text{вхj}} = (1+\varepsilon_i)\delta p_i - \varepsilon_i \delta p_j - \frac{1}{2}\delta T_{\text{выхi}} \qquad (3.2.12)$$

式中 $\delta G_{\text{вхj}}$——气路第$j$分段入口处流量的无量纲变化量；

$\delta p_i$、$\delta T_{\text{выхi}}$——流路第$i$分段出口处压力和温度的无量纲变化量，燃气由此分段（经局部阻力）进入流路第$j$分段；

$\varepsilon_i$——由关系式（3.2.7)对第$i$分段出口处和第$j$分段入口处局部阻力所确定的系数；

$\delta p_j$——流路第$j$分段内压力的无量纲变化量。

第$j$分段出口处流量变化量$\delta G_{\text{выхj}}$由式（3.2.6）确定，考虑到上面所使用的下标，式（3.2.6）写成下式

$$\delta G_{\text{выхj}} = (1+\varepsilon_j)\delta p_j - \varepsilon_j \delta p_{\text{м.с}} - \frac{1}{2}\delta T_{\text{выхj}} \qquad (3.2.13)$$

式中 $\delta T_{\text{выхj}}$——第$j$流路分段出口温度的无量纲变化量；

$\varepsilon_j$——通过第$j$气路分段出口处局部阻力的燃气流量关系曲线的斜率。

分段入口处燃气温度变化量与其前面的分段出口处的燃气温度变化量有关，而且此关系的特性取决于两分段之间局部阻力的类型。如气路两分段之间具有一般的局部阻力（喷嘴、均压装置等)，那么，忽略节流效应，可以使两温度变化量相等：$\delta T_{\text{вхj}} = \delta T_{\text{выхi}}$。如果两流路分段之间存在涡轮一类的阻力，其中燃气还要作功，则必须考虑与此有关的燃气温度的变化

$$T_{\text{ггв.выхn}} - T_{\text{газ1}} = c_1^2 \eta_T / 2c_p) \qquad (3.2.14)$$



式中 $T_{\text{гг.выхn}}$——燃气发生器气路第$n$(最后的)分段出口处温度；

$T_{\text{газ1}}$——燃气导管气路第1分段入口处温度；

$c_1$——从涡轮喷嘴流出的燃气流速；

$\eta_T$——涡轮效率。

将式（3.2.14）进行线性化处理后，得

$$\frac{T_{\text{гг}}}{T_{\text{гг}} - T_{\text{газ}}}\delta T_{\text{гг.выхn}} - \frac{T_{\text{газ}}}{T_{\text{гг}} - T_{\text{газ}}}\delta T_{\text{газ1}} = 2\delta c_1 + \delta \eta_T \qquad (3.2.15)$$

式中 $T_{\text{гг}}$、$T_{\text{газ}}$——燃气发生器和燃气导管内温度的平均值；

$\delta T_{\text{гг.выхn}}$、$\delta T_{\text{газ}}$——燃气发生器出口处和燃气导管入口处温度的无量纲变化量；

$\delta c_1$、$\delta \eta_T$——流速和涡轮效率的无量纲变化量。

对无燃烧区，但在分段入口处和出口处具有燃气局部阻力的气路第$j$分段，把式（3.2.6）和（3.2.12）代入方程（3.1.17）和（3.1.30）或（3.1.38）和（3.1.39)，可得描述流路分段动态特性的线性方程：对绝热过程

$$\frac{\tau_j}{\kappa}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta p_j}{\mathrm{d}t} + (\varepsilon_i + \varepsilon_j + 1)\delta p_j - \frac{1}{2}\delta T_{\text{выхi}} + \frac{1}{2}\delta T_{\text{выхi}} \times (t-\tau_j) + \frac{\kappa-1}{2\kappa}[\delta p_j - \delta p_j(t-\tau_j)] - (1+\varepsilon_i)\delta p_i - \varepsilon_i \delta p_{\text{м.с}} = 0 \qquad (3.2.16)$$

$$\delta T_{\text{выхj}} - \delta T_{\text{выхi}}(t-\tau_j) - \frac{\kappa-1}{\kappa}[\delta p_j - \delta p_j(t-\tau_j)] = 0 \qquad (3.2.17)$$

和对瞬时充分混合

$$\tau_j\frac{d\delta T_{вых j}}{dt}-(\kappa+1)(\delta T_{вых i}-\delta T_{вых j})-(\kappa-1)$$

$$\times[(1+\varepsilon_i)\delta p_i+\varepsilon_i\delta p_{м.с}-(1+\varepsilon_i+\varepsilon_j)\delta p_j]=0 \quad (3.2.18)$$

$$\frac{\tau_j}{\kappa}\cdot\frac{d\delta p_j}{dt}+(1+\varepsilon_i+\varepsilon_j)\delta p_j-(1+\varepsilon_j)\delta p_i-\varepsilon_j\delta p_{м.с}$$

$$-\frac{1}{2}\delta T_{вых i}+\frac{1}{2}\delta T_{вых j}=0 \quad (3.2.19)$$

在建立液体火箭发动机的数学模型时对燃气发生器的流路分段在方程（3.2.16）和（3.2.17）或（3.2.18）和（3.2.19）中以后将用下标ггj代替下标j，其中$j$——燃气发生器气路中分段的编号（$j=2,3,\cdots,n$，其中$n$——流路中的分段数）。对燃气导管的流路则用下标газk代替下标$j$，其中$k$——燃气导管气路中分段的编号（$k=2,3,\cdots,m$，其中$m$——流路中的分段数）。对燃气导管流路的第1分段必须利用方程（3.2.15）（见后文）。

比方说，如果把单区的燃气发生器气路分为两个分段，则它的数学模型包括4个方程：

对具有燃烧区的第1分段为方程（3.2.8）和（3.2.9）或（3.2.10）和（3.2.11），在这些方程中：$\delta p=\delta p_{гг1}$；$\delta T_{вых}=\delta T_{гг1}$；$\tau_г=\tau_{г1}$；$\tau=\tau_{11}$（气路第1分段内燃气的停留时间）；$\kappa=\kappa_{гг}$；$\psi=\psi_{гг1}$；$K_{m1}=K_{mгг1}$；$\varepsilon=\varepsilon_{гг1}(p_{гг2}/p_{гг1})$；$\delta G_{ок}=\delta G_{ок11}$；$\delta G_г=\delta G_{г11}$；$\delta p_{м.с}=\delta p_{гг2}$；

对第2分段（无燃烧区）为方程（3.2.16）和（3.2.17）或（3.2.18）或（3.2.19），在这些方程中$\delta p_j=\delta p_{гг2}$；$\delta T_{вых j}=\delta T_{гг.вых2}$；$\delta T_{вых i}=\delta T_{гг.вых1}$；$\kappa=\kappa_{гг}$；$\varepsilon_i=\varepsilon_{гг1}(p_{гг2}/p_{гг1})$；$\varepsilon_j=\varepsilon_т(p_{газ1}/p_{гг2})$；$\delta p_{м.с}=\delta p_{газ1}$；$\delta p_i=\delta p_{гг1}$，其中$\varepsilon_т$是经过涡轮的燃气流量与$p_{газ1}/p_{гг2}$的关系曲线的斜率。



对涡轮出口一开始的流路第一分段（当燃气导管分为好几个分段时$j=1$），利用方程（3.1.17）和（3.1.30），以及涡轮中温降的关系式（3.2.15），并假设过程是绝热的，可得下列方程：

$$\delta T_{газ1}-\frac{T_{гг}}{T_{газ}}\delta T_{гг.вых n}-\frac{T_{гг}-T_{газ}}{T_{газ}}$$

$$\times(2\delta c_1+\delta\eta_т)=0 \quad (3.2.20)$$

$$\delta T_{газ.вых1}-\delta T_{газ1}(t-\tau_{21})$$

$$-\frac{\kappa_{гг}-1}{\kappa_{гг}}[\delta p_{газ1}-\delta p_{газ1}(t-\tau_{21})]=0 \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\tau_{21}}{\kappa_{гг}}\cdot\frac{d\delta p_{газ1}}{dt}+(\varepsilon_т+\varepsilon_{газ1}+1)\delta p_{газ1}-\frac{1}{2}\delta T_{газ1}$$

$$+\frac{1}{2}\delta T_{газ1}(t-\tau_{21})+\frac{\kappa_{гг}-1}{2\kappa_{гг}}[\delta p_{газ1}-\delta p_{газ1}(t-\tau_{21})]$$

$$-(1+\varepsilon_т)\delta p_{ггn}-\varepsilon_{газ1}\delta p_{газ2}=0 \quad (3.2.22)$$

式中 $p_{газ1}$、$\delta p_{газ1}$、$\delta T_{газ1}$——燃气导管流路第1分段入口处压力和无量纲压力和温度的变化量；

$p_{ггn}$、$\delta p_{ггn}$、$\delta T_{гг.вых n}$——燃气发生器流路最后的第$n$分段出口处压力和无量纲压力和温度的变化量；

$\delta T_{газ.вых1}$——燃气导管流路第1分段出口处温度的无量纲变化量；

$\tau_{21}$——燃气导管流路第1分段中燃气的停留时间；

$\varepsilon_т=\varepsilon_т(p_{газ1}/p_{ггn})$、$\varepsilon_{газ1}=\varepsilon_{газ1}(p_{газ2}/p_{газ1})$——经过涡轮和燃气导管流路第1分段出口处局部阻力的燃

气流量曲线的无量纲斜率。

$p_{газ2}$、$\delta p_{газ1}$——燃气导管流路第2分段中压力和无量纲压力变化量。

在这些公式中为了避免累赘的下标省略了入口参数变化量附有的下标вх，只剩下确定组件类型和分段编号的下标。对流路分段出口参数变化量下标вых保留不变。

用类推的方法从式（3.1.38）、（3.1.39）和（3.2.15）求得描述另一种极端的流动模型——瞬时充分混合模型的燃气导管流路第1分段动态特性的两个方程，

$$\tau_{21}\frac{\mathrm{d}\delta T_{газ.вых1}}{\mathrm{d}t}-(\kappa_{гг}+1)(\delta T_{газ1}-\delta T_{газ.вых1})$$
$$-(\kappa_{гг}-1)[(1+\varepsilon_T)\delta p_{ггп}+\varepsilon_{газ1}\delta p_{газ2}$$
$$-(1+\varepsilon_T+\varepsilon_{газ1})\delta p_{газ1}]=0 \qquad (3.2.23)$$

$$\frac{\tau_{21}}{\kappa_{гг}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta p_{газ1}}{\mathrm{d}t}+(1+\varepsilon_T+\varepsilon_{газ1})\delta p_{газ1}-(1+\varepsilon_T)$$
$$\times\delta p_{ггп}-\varepsilon_{газ1}\delta p_{газ2}-\frac{1}{2}\delta T_{газ1}+\frac{1}{2}\delta T_{газ.вых1}=0 \qquad (3.2.24)$$

描述涡轮内温度下降的方程（3.2.20）保持不变，它也适用于所研究的燃气导管流路中的过程。

如果燃气导管流路分成两个分段就够了，那么除对第1分段利用3个方程：（3.2.20）、（3.2.21）和（3.2.22）或（3.2.20）、（3.2.23）和（3.2.24）外，对第2分段要利用方程（3.2.16）和（3.2.17）或（3.2.18）和（3.2.19），在这些方程中取 $\delta T_{вых j}=\delta T_{газ.вых2}$；$\delta T_{вых i}=\delta T_{газ.вых1}$；$\delta p_j=\delta p_{газ2}$；$\kappa=\kappa_{гг}$；$\tau_j=\tau_{22}$；$\delta p_i=\delta p_{газ1}$；$\delta p_{м.с}=\delta p_к$；$\varepsilon_i=\varepsilon_{газ1}(p_{газ2}/p_{газ1})$，$\varepsilon_j=\varepsilon_ф(p_к/p_{газ2})$——燃气导管内经过局部阻力的流量与$p_{газ1}$



$/p_{газ2}$的关系曲线的斜率和经燃烧室燃气喷嘴的流量与$p_к/p_{газ2}$的关系曲线的斜率。

如果流路中没有显著的局部阻力，燃气发生器或燃气导管的气路允许不分段，于是每个组件的数学模型大为简化，用两个或三个方程来描述就可以了。在这种情况下燃气发生器用方程（3.2.8）和（3.2.9）或（3.2.10）和（3.2.11）来描述，其中必须取$\delta T_{вых j}=\delta T_{гг.вых}$；$\delta p=\delta p_{гг}$；$\delta p_{м.с}=\delta p_{газ1}$；$\delta G_{ок}=\delta G_{ок1}$；$\delta G_г=\delta G_{г1}$；$\tau=\tau_1$；$\tau_г=\tau_{г1}$；$K_m=K_{mгг}=G_{ок1}/G_{г1}$；$\kappa=\kappa_{гг}$；$\psi=\psi_{гг}=(K_{mгг}/T_{гг})(\partial T_{гг}/\partial K_{mгг})$；$\varepsilon=\varepsilon_T(p_{газ1}/p_{гг})$。

燃气导管用3个方程（3.2.20）、（3.2.21）和（3.2.22）或（3.2.20）、（3.2.23）和（3.2.24）来描述，其中必须取$\delta T_{газ.вых1}=\delta T_{газ.вых}$；$\delta T_{газ1}=\delta T_{газ}$；$\delta p_{газ1}=\delta p_{газ}$；$\delta p_{газ2}=\delta p_к$；$\tau_{21}=\tau_2$；$\varepsilon_{газ1}=\varepsilon_ф(p_к/p_{газ})$。

进入补燃发动机（气-液型）燃烧室和双区燃气发生器第二区的推进剂，一部分是液相，其余部分是发生器燃气的状态。在这种情况下燃烧室头部附近或燃气发生器中引入不参燃组元的截面处燃烧产物的组分和温度既决定于该液体组元的流量，也决定于进入的发生器燃气流量和该发生器内的组元质量混合比。

在绝热过程下由燃气导管经喷嘴进入燃烧室的发生器燃气具有的组元混合比与其在形成时刻，也即与燃气发生器头部附近所具有的混合比是相同的。考虑到燃气发生器中液体转化为燃气的时间$\tau_{г1}$和所研究的这股燃气在燃气发生器流路中的停留时间$\tau_1$以及燃气导管到燃烧室喷嘴前流路中的停留时间$\tau_2$，这股燃气的组元混合比守恒条件可写成下式：

$$K_{mг.ф.к}=\frac{G_{ок1}(t-\tau_{г1}-\tau_1-\tau_2)}{G_{г1}(t-\tau_{г1}-\tau_1-\tau_2)} \qquad (3.2.25)$$

式中 $K_{\text{мг.ф.к}}$——燃烧室气喷嘴出口处（与液体组元开始反应前）发生器燃气的组元混合比。

将式（3.2.25）进行线性化处理并转为无量纲变化量，得

$$\delta K_{\text{мг.ф.к}} = \delta G_{\text{ок1}}(t-\tau_{\text{г1}}-\tau_1-\tau_2) - \delta G_{\text{г1}}(t-\tau_{\text{г1}}-\tau_1-\tau_2) \qquad (3.2.26)$$

式中 $\delta K_{\text{мг.ф.к}}$、$\delta G_{\text{ок1}}$、$\delta G_{\text{г1}}$——燃烧室气喷嘴出口处发生器燃气组元混合比的无量纲变化量和燃气发生器的氧化剂和燃料流量。

假定两种组元以液体状态供入燃烧室，液体组元在燃烧室头部附近的发生器燃气中燃烧后，此时组元混合比由下式确定

$$K_{\text{мк}} = \frac{G_{\text{ок1}}(t-\tau_{\text{г1}}-\tau_1-\tau_2) + G_{\text{ок3}}(t-\tau_{\text{г3}})}{G_{\text{г1}}(t-\tau_{\text{г1}}-\tau_1-\tau_2) + G_{\text{г3}}(t-\tau_{\text{г3}})} \qquad (3.2.27)$$

式中 $G_{\text{ок3}}$，$G_{\text{г3}}$——通过燃烧室喷嘴的氧化剂和燃料的流量；

$\tau_{\text{г3}}$——燃烧室中液体组元转化成燃气的时间。

将式（3.2.27）进行线性化处理并转为无量纲变化量，得

$$\delta K_{\text{мк}} = \bar{G}_{\text{ок1}}\delta G_{\text{ок1}}(t-\tau_{\text{г1}}-\tau_1-\tau_2) + (1-\bar{G}_{\text{ок1}})\delta G_{\text{ок3}}(t-\tau_{\text{г3}}) - \bar{G}_{\text{г1}}\delta G_{\text{г1}}(t-\tau_{\text{г1}}-\tau_1-\tau_2) - (1-\bar{G}_{\text{г1}})\delta G_{\text{г3}}(t-\tau_{\text{г3}}) \qquad (3.2.28)$$

式中 $\delta K_{\text{мк}}$——燃烧室气路入口处燃气混合比的无量纲变化量；

$\delta G_{\text{ок3}}$、$\delta G_{\text{г3}}$——进入燃烧室的液体氧化剂和燃料流量的无量纲变化量；

$\bar{G}_{\text{ок1}} = G_{\text{ок1}}/(G_{\text{ок1}}+G_{\text{ок3}})$、$\bar{G}_{\text{г1}} = G_{\text{г1}}/(G_{\text{г1}}+G_{\text{г3}})$

——供入燃气发生器的氧化剂和燃料相对流量的平均值。



如果其中有一种组元全部进入燃气发生器，那么方程（3.2.28）中某一个相对流量（或者是$\bar{G}_{\text{ок1}}$，或者是$\bar{G}_{\text{г1}}$）等于1，而另一个相对流量等于零，这是因为有关的组元没有进入燃烧室。

知道了由式（3.2.28）所确定的组元混合比变化量，就可求得燃烧室进口和出口处燃烧产物温度的变化量

$$\delta T_{\text{к.вх}} = \psi_{\text{к}}\delta K_{\text{мк}} \qquad (3.2.29)$$

$$\delta T_{\text{к.вых}} = \psi_{\text{к}}\delta K_{\text{мк}}(t-\tau_3) + \frac{\varkappa_{\text{к}}-1}{\varkappa_{\text{к}}}[\delta p_{\text{к}} - \delta p_{\text{к}}(t-\tau_3)] \qquad (3.2.30)$$

式中 $\delta T_{\text{к.вх}}$、$\delta T_{\text{к.вых}}$——燃烧室进口和出口处燃气温度的无量纲变化量；

$\tau_3$——燃烧室内燃气的停留时间；

$\delta p_{\text{к}}$——燃烧室压力的无量纲变化量；

$\varkappa_{\text{к}}$——燃烧室内燃气的绝热指数；

$\psi_{\text{к}} = (K_{\text{мк}}/T_{\text{к}})(\partial T_{\text{к}}/\partial K_{\text{мк}})$——燃烧室内燃气温度$T_{\text{к}}$与组元混合比$K_{\text{мк}}$的关系曲线的斜率。

为了建立燃烧室内质量平衡方程必须知道进入燃烧室的气态燃烧产物的总流量$G_{\text{к}}$：

$$G_{\text{к}} = G_{\text{г3}}(t-\tau_{\text{г3}}) + G_{\text{ок3}}(t-\tau_{\text{г3}}) + G_{\text{ф}} \qquad (3.2.31)$$

式中 $G_{\text{ф}}$是由燃气导管通过喷嘴进入燃烧室的发生器燃气流量。

将式（3.2.31）进行线性化处理，并把通过燃烧室气喷嘴的流量变化量公式（3.2.6）代入，可得各流量无量纲变化量之间的关系

$$\delta G_{\text{к}} = \tilde{G}_{\text{г3}}\delta G_{\text{г3}}(t-\tau_{\text{г3}}) + \tilde{G}_{\text{ок3}}\delta G_{\text{ок3}}(t-\tau_{\text{г3}})$$

$$+(1-\tilde{G}_{\text{гз}}-\tilde{G}_{\text{окз}})\times[(1+\varepsilon_{\text{ф}})\delta p_{\text{газ.вых m}}$$

$$-\frac{1}{2}\delta T_{\text{газ.вых m}}-\varepsilon_{\text{ф}}\delta p_{\text{к}}] \qquad (3.2.32)$$

式中 $\delta p_{\text{газ.вых m}}$、$\delta T_{\text{газ.вых m}}$——燃气导管流路最后的第$m$分段出口处压力和温度的无量纲变化量；

$\varepsilon_{\text{ф}}$——通过燃烧室喷嘴的燃气流量与$p_{\text{к}}/p_{\text{газm}}$的关系曲线的斜率；

$\tilde{G}_{\text{гз}}=G_{\text{гз}}/G_{\text{к}}$、$\tilde{G}_{\text{окз}}=G_{\text{окз}}/G_{\text{к}}$——通过燃烧室的燃料和氧化剂的相对流量。

把式（3.2.32）代入绝热过程方程（3.1.30），考虑到燃烧室喷管的关系式（3.2.6）和（3.2.7）（认为$\varepsilon=0$），得

$$\frac{\tau_{\text{з}}}{\kappa_{\text{к}}}\frac{\mathrm{d}\delta p_{\text{к}}}{\mathrm{d}t}+\delta p_{\text{к}}-\delta T_{\text{к}}+\frac{1}{2}\delta T_{\text{к}}(t-\tau_{\text{з}})$$

$$+\frac{\kappa_{\text{к}}-1}{2\kappa_{\text{к}}}[\delta p_{\text{к}}-\delta p_{\text{к}}(t-\tau_{\text{з}})]-\tilde{G}_{\text{гз}}\delta G_{\text{гз}}(t-\tau_{\text{гз}})$$

$$-\tilde{G}_{\text{окз}}\delta G_{\text{окз}}(t-\tau_{\text{гз}})-(1-\tilde{G}_{\text{гз}}-\tilde{G}_{\text{окз}})$$

$$\times[(1+\varepsilon_{\text{ф}})\delta p_{\text{газm}}-\frac{1}{2}\delta T_{\text{газ.вых m}}-\varepsilon_{\text{ф}}\delta p_{\text{к}}]=0 \qquad (3.2.33)$$

线性方程（3.2.28）、（3.2.29）、（3.2.30）和（3.2.33）描述了气-液型发动机在每层燃气为绝热过程的情况下燃烧室的动态特性。对燃气发生器的第二区也可写出类似的方程（推导在3.5.2节中）

当气路中利用其它的过程模型（用瞬时充分混合模型）时为了确定气-液型发动机燃烧室内或双区燃气发生器第二区内的组元混合比变化量，引入关于充满第$i$流路分段的燃气组元质量混合比平均瞬时值（组分）的概念，

$$K_{\text{mi}}=m_{\text{окi}}/m_{\text{гi}} \qquad (3.2.34)$$



式中 $m_{\text{окi}}$、$m_{\text{гi}}$——第$i$流路分段内氧化剂和燃料的质量。

对流路内每种组元的质量可单独写出质量平衡方程

$$\frac{\mathrm{d}m_{\text{окi}}}{\mathrm{d}t}=G_{\text{ок.вхi}}-G_{\text{ок.выхi}} \qquad (3.2.35)$$

$$\frac{\mathrm{d}m_{\text{гi}}}{\mathrm{d}t}=G_{\text{г.вхi}}-G_{\text{г.выхi}} \qquad (3.2.36)$$

式中 $G_{\text{ок.вхi}}$、$G_{\text{г.вхi}}$——流路分段入口处气态氧化剂和燃料的流量；

$G_{\text{ок.выхi}}$、$G_{\text{г.выхi}}$——流路分段出口处这两个组元的流量。

离开流路分段的氧化剂和燃料流量由第$i$整个分段内燃气的组元混合比$K_{\text{mi}}$（它是不变的）和分段出口处燃气总流量$G_{\text{выхi}}$来确定：

$$G_{\text{ок.выхi}}=\frac{K_{\text{mi}}}{K_{\text{mi}}+1}G_{\text{выхi}};\quad G_{\text{г.выхi}}=\frac{1}{K_{\text{mi}}+1}G_{\text{выхi}} \qquad (3.2.37)$$

利用公式(3.2.24)和方程(3.2.25)、(3.2.36)和(3.2.37)，得

$$\frac{\mathrm{d}K_{\text{mi}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{m_{\text{гi}}}\cdot\frac{\mathrm{d}m_{\text{окi}}}{\mathrm{d}t}-\frac{m_{\text{окi}}}{m_{\text{гi}}^2}\cdot\frac{\mathrm{d}m_{\text{гi}}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{m_{\text{гi}}}G_{\text{ок.вхi}}-\frac{m_{\text{ок.i}}}{m_{\text{гi}}^2}G_{\text{г.вхi}}$$

$$-\left[\frac{K_{\text{mi}}}{m_{\text{гi}}(K_{\text{mi}}+1)}-\frac{m_{\text{окi}}}{m_{\text{гi}}^2(K_{\text{mi}}+1)}\right]G_{\text{выхi}} \qquad (3.2.38)$$

考虑到第$i$流路分段内的燃气质量为$m_{\text{i}}=m_{\text{окi}}+m_{\text{гi}}$，可写出

$$m_{\Gamma i}=m_i/(K_{mi}+1);\quad m_{oKi}=m_iK_{mi}/(K_{mi}+1) \qquad (3.2.39)$$

把式（3.2.39）代入方程（3.2.38），这时考虑到方程（3.2.28）中方括号内的表式等于零，得

$$\frac{dK_{mi}}{dt}=\frac{K_{mi}+1}{m_i}(G_{ок.вхi}-K_{mi}G_{г.вхi}) \qquad (3.2.40)$$

将方程（3.2.40）进行线性化处理，考虑到对包括在此方程中各数值的平均值，括号中的项变为零，就可写出无量纲变化量方程

$$\tau_i\frac{d\delta K_{mi}}{dt}=\delta G_{ок.вхi}-\delta G_{г.вхi}-\delta K_{mi} \qquad (3.2.41)$$

式中 $\tau_i=m_i/G_{выхi}$——第$i$流路分段内燃气的停留时间。

燃气发生器或液-液型发动机燃烧室第1流路分段入口处气态氧化剂和燃料流量的变化量等于（考虑了转化时间$\tau_{\Gamma i}$）经过喷嘴的液体组元流量的变化量，因此方程（3.2.41）具有如下形式

$$\tau_i\frac{d\delta K_{mi}}{dt}=\delta G_{oKi}(t-\tau_{\Gamma i})-\delta G_{\Gamma i}(t-\tau_{\Gamma i})-\delta K_{mi} \qquad (3.2.42)$$

对于进入发生器燃气的其它流路分段，最好是把方程（3.2.41）右边部分的前两项进行合并，其方法是利用燃气的组元混合比$K_{mBxi}=G_{ок.вхi}/G_{г.вхi}$进行线性化而得到的等式：

$$\delta K_{mBxi}=\delta G_{ок.вхi}-\delta G_{г.вхi}$$

这种情况下方程（3.2.41）变为下式：

$$\tau_i\frac{d\delta K_{mi}}{dt}=\delta K_{mBxi}-\delta K_{mi} \qquad (3.2.43)$$

式中 $\delta K_{mBxi}$——进入流路分段入口处一股燃气的组元混合比的相对变化量。

对有发生器燃气运动的所有流路分段（除靠近燃气发生器头



部的第1分段外）都可利用方程（3.2.43），而在该方程中变化量$\delta K_{mBxi}$是由气路中前一分段内的组元混合比变化量确定的。对第1流路分段则可利用方程（3.2.42）。

对气-液型发动机燃烧室和燃气发生器第2区，气路入口处的组元混合比由下式确定：

$$K_{mк.вх}=\frac{G_{ок.газ.вых}+G_{ок3}(t-\tau_{г3})}{G_{г.газ.вых}+G_{г3}(t-\tau_{г3})}$$

式中 $G_{ок.газ.вых}$、$G_{г.газ.вых}$——分别为从燃气导管出口进来的发生器燃气中的氧化剂和燃料的流量。

对于燃烧室也可明确地写出上式。通常设，两种组元都以液态供入燃烧室。对具体的液体火箭发动机，其中一种液体组元的流量设其等于零。燃气发生器第2区的方程可写成相同的形式，只是变量用另外的下标。

燃气导管出口处通过喷嘴的发生器燃气流量$G_ф=G_{выхi}$与燃气导管中的氧化剂和燃料流量可用关系式(3.2.37)联系起来。考虑到这些关系式，确定$K_{mк.вх}$的公式取下式：

$$K_{mк.вх}=\frac{K_{mгаз}G_ф+(1+K_{mгаз})G_{ок3}(t-\tau_{г3})}{G_ф+(1+K_{mгаз})G_{г3}(t-\tau_{г3})} \qquad (3.2.44)$$

式中 $K_{mгаз}$——燃气导管内（或燃气导管最后一个分段内，如必须把它分段的话）组元混合比的瞬时值。

把式（3.2.44）进行线性化处理后，就可确定燃烧室内组元混合比的无量纲变化量$\delta K_{mк.вх}$与燃烧室入口处其它参数变化之间的关系

$$\delta K_{mк.вх}=\frac{G_ф}{A}\left(\frac{K_{mгаз}}{K_{mк.вх}}-1\right)\delta G_ф+\frac{K_{mгаз}}{A}$$

$$\times\left(\frac{G_{\phi}+G_{\text{ок3}}}{K_{\text{мк.вх}}}-G_{\text{г3}}\right)\delta K_{\text{мгаз}}+\frac{G_{\text{ок3}}(1+K_{\text{мгаз}})}{AK_{\text{м к.вх}}}$$

$$\times\delta G_{\text{ок3}}(t-\tau_{\text{г3}})-\frac{G_{\text{г3}}(1+K_{\text{мгаз}})}{A}\delta G_{\text{г3}}(t-\tau_{\text{г3}})$$

(3.2.45)

式中 $A=G_{\phi}+(1+K_{\text{мгаз}})G_{\text{г3}}$；

$K_{\text{мк.вх}}$、$K_{\text{мгаз}}=K_{\text{мгг}}$——燃烧室入口处和燃气导管内组元混合比的平均值；

$G_{\phi}$、$G_{\text{ок3}}$、$G_{\text{г3}}$——通过燃气导管出口处喷嘴的燃气流量平均值，以及进入燃烧室的氧化剂和燃料的流量平均值；

$\delta K_{\text{мк.вх}}$——燃烧室入口处组元混合比的无量纲变化量；

$\delta G_{\phi}$——经过燃烧室喷嘴的发生器燃气流量的无量纲变化量。

利用式（3.2.45）和式（3.2.4）可以求出燃烧室始端(燃气发生器第2区内)的温度变化量，并将该变化量代入热量平衡方程（3.1.38）和质量平衡方程（3.1.39）。

## 3.3 流路内有熵波时动态特性的特点

### 3.3.1 描述流路内具有熵波的气流频率特性的方程

当燃气中的过程为两种极端情况时，也即为绝热过程和瞬时充分混合的过程时，描述气路分段动态特性的方程，就其形式而言是与自动调节原理[5]中通常用来描述气容型对象中过程动态的一阶流容（非周期振荡的）元件方程有区别的。实际上，如果分析一下质量守恒方程（3.2.8）的结构，就会发现只有流路出口



处阻力后有着压力变化量时此方程的形式才与非周期振荡的元件方程的形式相接近。这时，当忽略带有系数$(\kappa-1)/(2\kappa)$的相对小项，方程（3.2.8）在干扰为$\delta p_{\text{м.с}}$时就与具有时间常数为$T=\tau/[\kappa(1+\varepsilon)]$的非周期振荡的元件方程相一致。

时间常数$T$取决于$\tau$，取决于流路出口处局部阻力流量特性曲线的斜率$\varepsilon$，也取决于绝热指数$\kappa$。绝热指数考虑了流路内燃气压缩（膨胀）时绝热特性的影响(也即压力变化时温度变化的影响)。系数$\varepsilon$则表示压力变化对通过出口处阻力的燃气流量的影响程度。此影响表现为在外界条件变化时流容中压力变化的速度。

如果外界干扰影响是液体组元的流量变化量$\delta G_{\text{ок}}$和$\delta G_{\text{г}}$，那么方程（3.2.8)与通常的非周期振荡元件的方程有很大的差别。当把方程（3.2.8）中的所有变量，除$\delta p$外，移到该式的右边时，右边各项就都带有时滞。这时右边每一个流量变化量就有着带有不同时滞的两个项。带有不同时滞的两个项的存在证实了动态特性的变化，因为它们既可由被研究对象的方程的左边部分，也可由右边部分来描述。

在推导描述流路分段动态特性的关系式时，要利用方程（3.2.8）和（3.2.9）或（3.2.10）和（3.2.11)。

把周期特解$\delta x_i(\omega)=\delta\bar{x}_i\exp(i\omega t)$代入上述方程，其中$\delta x_i$——第$i$参数的无量纲变化量；$\delta\bar{x}_i$——第$i$参数的无量纲变化量幅值。经变换后得可以用来确定流路分段频率特性的关系式。由绝热过程的方程（3.2.8）和（3.2.9）得

$$\delta\bar{p}=\frac{\left(\psi+\frac{K_{\text{m}}}{K_{\text{m}}+1}-\frac{1}{2}\psi e^{-i\omega\tau}\right)e^{-i\omega\tau_{\text{r}}}\delta\bar{G}_{\text{ок}}+\varepsilon\delta\bar{p}_{\text{м.с}}}{\frac{i\omega\tau}{\kappa}+1+\varepsilon+\frac{\kappa-1}{2\kappa}(1-e^{-i\omega\tau})}$$

$$-\frac{\left(\psi-\frac{1}{K_{\text{m}}+1}-\frac{1}{2}\psi e^{-i\omega\tau}\right)e^{-i\omega\tau_{\text{r}}}\delta\bar{G}_{\text{r}}}{\frac{i\omega\tau}{\kappa}+1+\varepsilon+\frac{\kappa-1}{2\kappa}(1-e^{-i\omega\tau})}\qquad(3.3.1)$$

$$\delta\bar{T}_{\text{вых}}=\psi e^{-i\omega(\tau+\tau_r)}(\delta\bar{G}_{\text{ок}}-\delta\bar{G}_{\text{г}})+\frac{\kappa-1}{\kappa}$$

$$\times(1-e^{-i\omega\tau})\delta\bar{p} \qquad (3.3.2)$$

借助于方程(3.2.10)和(3.2.11)用类似的方法可得用来计算流路分段在瞬时充分混合过程的情况下的频率特性的关系式

$$\delta\bar{T}_{\text{вых}}=\frac{1}{\frac{i\omega\tau}{\kappa}+\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\left\{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{K_m}{K_m+1}+\psi\right)e^{-i\omega\tau_{\text{г}}}\delta\bar{G}_{\text{ок}}\right.$$

$$+\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{1}{K_m+1}-\psi\right)e^{-i\omega\tau_{\text{г}}}\delta\bar{G}_{\text{г}}$$

$$\left.-\frac{\kappa-1}{\kappa}[(1+\varepsilon)\delta\bar{p}-\varepsilon\delta\bar{p}_{\text{м.с}}]\right\} \qquad (3.3.3)$$

$$\delta\bar{p}=\frac{1}{\frac{i\omega\tau}{\kappa}+1+\varepsilon}\left[\left(\frac{K_m}{K_m+1}+\psi\right)e^{-i\omega\tau_{\text{г}}}\delta\bar{G}_{\text{ок}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{K_m+1}-\psi\right)e^{-i\omega\tau_{\text{г}}}\delta\bar{G}_{\text{г}}-\frac{1}{2}\delta\bar{T}_{\text{вых}}+\varepsilon\delta\bar{p}_{\text{м.с}}\right] \qquad (3.3.4)$$

关系式(3.3.1)和(3.3.2)或(3.3.3)和(3.3.4)彼此间是有联系的，而且它们可以对变量$\delta\bar{p}$和$\delta\bar{T}_{\text{вых}}$进行求解。但是所得的关系式过于烦冗，所以按上列两对方程直接进行频率特性的计算就比较方便。

### 3.3.2 流路频率特性的计算结果与试验数据的比较

图3.4列出了绝热过程和瞬时充分混合过程的同一流路分段频率特性的计算结果。计算的原始数据与试验装置[6]的参数符合，在该试验装置上进行了保证在流路分段入口处形成熵波和流量振荡的谐波干扰试验。计算时采用了下列参数：$\tau=0.02$s；



$\psi=0.25$；$\varepsilon=0$(流路出口有临界喷管)；$K_m=0.684$；$\tau_{\text{г}}=0$；

$\delta\bar{G}_{\text{ок}}=\delta\bar{p}_{\text{м.с}}=0$。

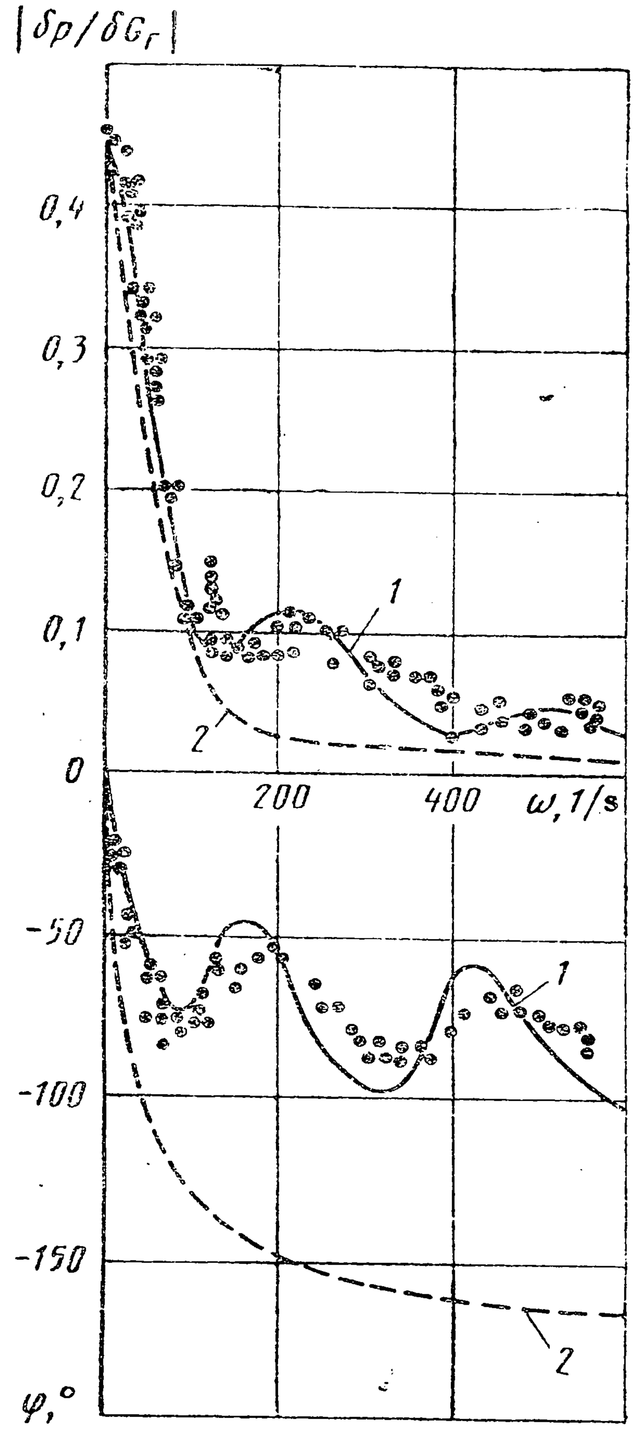



图3.4 气路分段的频率特性曲线
·—试验数据；
1—按公式(3.3.1)和(3.3.2)计算的绝热过程的特性；
2—按公式(3.3.3)和(3.3.4)计算的瞬时充分混合过程的特性

绝热过程的曲线1(见图3.4)和瞬时充分混合的曲线2彼此有

试验装置由一段长约1.5m和直径约0.12m的圆柱形流路组成，经过大量具有临界压降的气喷嘴分别把冷空气和热空气送入该流路。在喷嘴前的冷空气流路内建立谐波干扰。此方案等效于富燃料燃气发生器($\psi>0$)方案的燃烧室前燃料流路中的干扰。由于气喷嘴中的临界压降在喷嘴出口处(气路入口处)$\delta G_{\text{г}}=\delta p_{\text{п.п}}$，其中$\delta p_{\text{п.п}}$—脉动器后(喷嘴前)压力的无量纲变化量。

在头部附近两种气流的混合区内由于冷空气的流量振荡，引起混合气体的温度变化(也就是说熵的变化)，从而形成了熵波。因为喷嘴的数量很多(每种气流各有一百多个)，所以混合区靠近头部，因而它的容积，也就是说混合时间可以忽略不计，并取$\tau_{\text{г}}=0$。

很大的区别。在绝热过程的幅频特性曲线和相频特性曲线上都出现了特征波，这与流容内气体的动态过程中同熵波的相互作用有关。

在瞬时充分混合过程的频率特性曲线上这些波是没有的，而且特性曲线具有二阶非周期振荡元件的典型形状[5]——幅频特性曲线平缓地趋向零，相频特性曲线趋向180°。对所研究的这两种过程来说，在频率为50Hz($\omega\approx300$ 1/s)的情况下 $|\delta p/\delta G_{\text{г}}|$ 相差约2倍，而$\varphi$相差约60°。因而在还可以不考虑声学效应的频率范围内，对所研究的这两种过程来说，具有不等温流的气路频率特性曲线的差别是很大的。

试验数据与计算结果的比较表明(见图3.4)，在圆柱形流路内(其长度对液体火箭发动机气路有代表性)，在100Hz($\omega\approx600$ 1/s)以下的频率范围内过程接近于绝热过程。对于绝热过程，试验点与理论的幅频特性和相频特性吻合得相当好。所出现的一些不大的差别，看来可以用熵波的部分耗散来解释[6、7]。这时必须指出，流路试验模型的长度足够长，而由于混合器内喷嘴截面积相对地小和气流速度很大，使得形成的气流具有更高的紊流度水平(与流路内正常水平相比，差不多提高一个数量级)，以致能够加速熵波的耗散。因此可以预料到，在通常紊流度水平的圆柱形流路内当频率在400Hz以上时熵波才开始耗散。

### 3.3.3 有熵波的气路频率特性曲线

上面已经提到，有熵波的气路分段所得出的方程的结构与非周期振荡元件的方程结构是有区别的，后者的方程在自动调节原理中一般用来描述位于流容内的气体中的流动过程[5]。所以最好的办法是对有熵波的气路动态特性的特点进行分析，因为它们在许多方面决定了整台液体火箭发动机的动态特性。

描述气路内压力对入口处液体组元流量按谐波定律变化而建



立的干扰作出反应的方程(3.3.1)可写成普遍形式：

$$(i\omega\tau_1+1+Ae^{-i\omega\tau_2})\delta\bar{x}_{\text{вых}}=B(D+e^{-i\omega\tau_2})\delta\bar{y}_{\text{вх}} \tag{3.3.5}$$

式中 $A$、$B$、$D$——系数；

$\tau_1$——流路的时间常数；

$\tau_2$——不变时滞；

$\delta\bar{x}_{\text{вых}}$——元件出口处参数的幅值；

$\delta\bar{y}_{\text{вх}}$——系统入口处干扰参数的幅值。

两种组元中的某一种组元的流量变化幅值(或者是$\delta\bar{G}_{\text{ок}}$，或者是$\delta\bar{G}_{\text{г}}$)可作为气路中的干扰量，压力变化幅值($\delta\bar{p}$)可作为出口参数。例如，在氧化剂流量$\delta\bar{G}_{\text{ок}}$的作用下($\delta\bar{G}_{\text{г}}=0$)，如取$\tau_{\text{г}}=0$，按照式(3.3.1)

$$\tau_1=\frac{\tau}{\varkappa[1+\varepsilon+(\varkappa-1)/(2\varkappa)]};\quad A=-\frac{(\varkappa-1)/(2\varkappa)}{1+\varepsilon+(\varkappa-1)/(2\varkappa)};$$

$$B=-\frac{\psi}{2[1+\varepsilon+(\varkappa-1)/(2\varkappa)]};\quad D=-\frac{2[\psi+K_{\text{m}}/(1+K_{\text{m}})]}{\psi}. \tag{3.3.6}$$

方程(3.3.5)中流路的时间常数$\tau_1$随着出口阻力流量特性曲线的斜率$\varepsilon$的增大而减少。但是由于发动机组件的$\varepsilon$在0～10的范围内变化，故时间常数的变化不会大于一个量级。带有不变时滞$\tau_2$的指数函数前的系数$A$相当小(与1相比)，因而考虑气体绝热压缩(膨胀)下温度变化的这一项可以忽略不计。由于方程(3.3.5)右边带时滞$\tau_2$的这一项没有系数，故系数$D$就起了决定作用。对于富氧燃气发生器这个被加数值取决于温度曲线的无量纲斜率$\psi$值(见图3.2)和含有组元混合比$K_{\text{m}}$的综合数$K_{\text{m}}/(1+K_{\text{m}})$值两者之差。对于富氧燃气发生器$\psi$为负值，而$K_{\text{m}}\gg1$和相应地$K_{\text{m}}/(1+K_{\text{m}})\approx1$。所以，如$\psi\approx-1$，则$|D|\leqslant1$，因而有关熵波影响气路动态特性的一些效应基本上都归结为补充相位差的出现。这时，

按方程(3.3.5)在$D=0.2$的情况下计算出来的气路幅相频率特性曲线变成绕坐标原点旋转的螺旋线形状(图3.5)。因为系数$B$只改变曲线比例，在计算时这里和以后都取$B=1$，而$\tau_1/\tau_2=0.3$。在建立幅相频率特性曲线时利用了无量纲频率$\bar{\theta}=\omega\tau_2$。

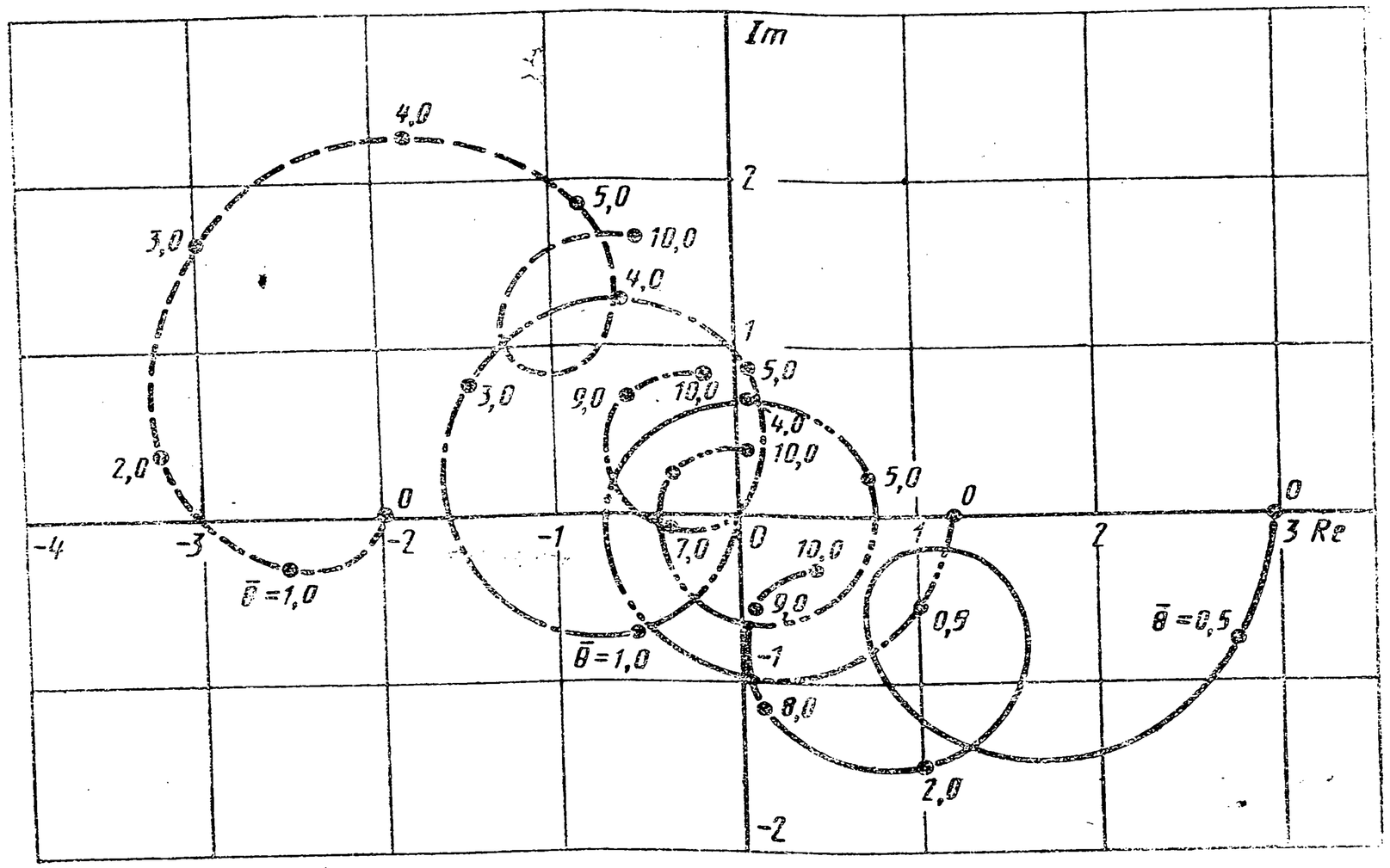



图3.5　由方程(3.3.5)描述的流容元件的幅相频率特性曲线

——$D=2$；　　----$D=-3$；

—·—$D=-1$；　　—··—$D=0.2$。

对有$\psi=-1.5\sim-2$和系数$D\approx-1$的富氧燃气发生器，幅相频率特性曲线形成环状，并在$\bar{\theta}=0.2\pi$、$4\pi$等等时，周期性地通过坐标原点，因为在这些$\bar{\theta}$值下方程(3.3.5)的右边变为零。当$D=1$时，幅相频率特性曲线也有类似的性质，只是它在另外一些$\bar{\theta}$值下通过坐标原点。在燃料流量$\delta\bar{G}_r$的作用下($\delta\bar{G}_{ок}=0$)方程(3.3.5)中的系数$D$由下式确定

$$D=-2[\psi-1/(K_m+1)]/\psi$$

对于富氧燃气发生器$1/(K_m+1)\ll1$，因而此项可忽略不计。



这时$D\approx-2$。当$|D|>1$(见图3.5中$D=2$和$-3$)，幅相频率特性曲线所取的形状对气容动态特性和熵波(时滞)同时发生影响的情况则是典型的形状——曲线上出现环状，环的摆幅随着$D$接近$\pm1$而增大。

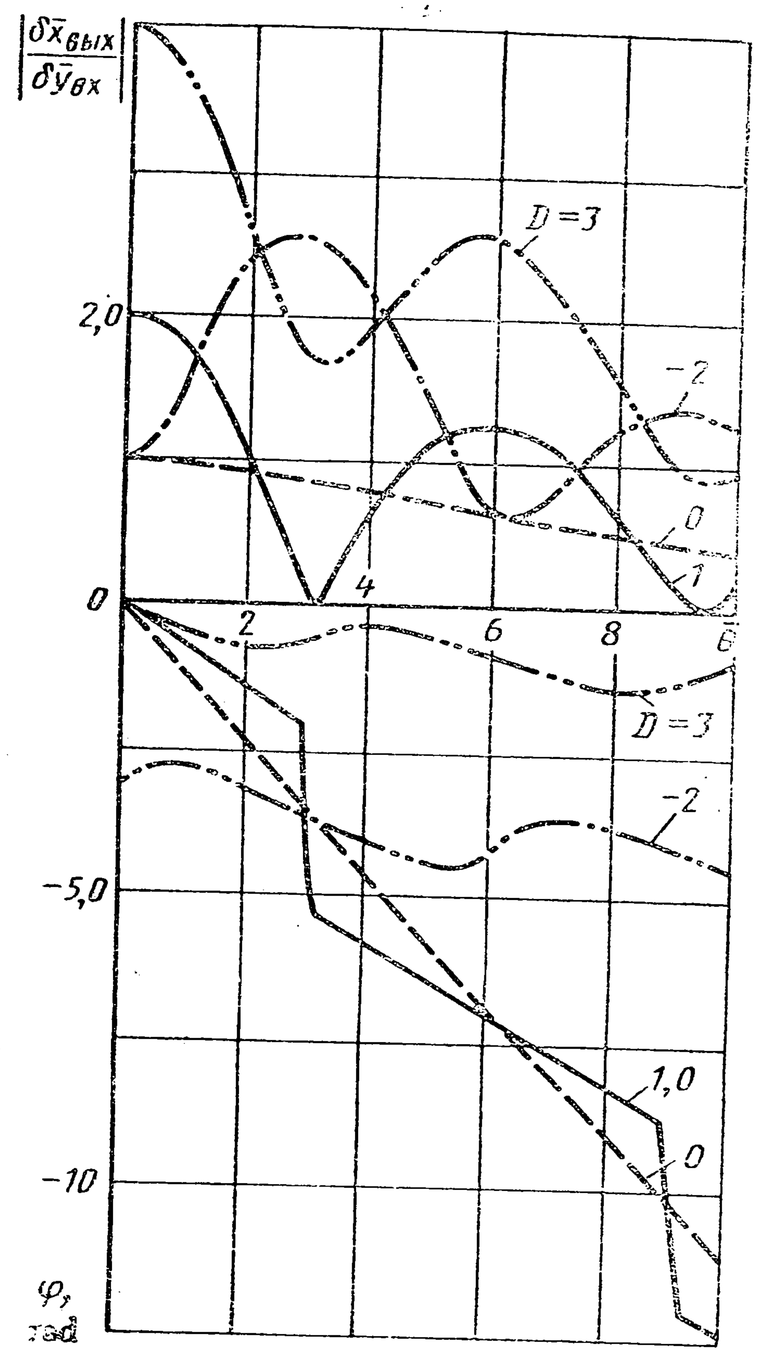



图3.6　有熵波的气路分段的幅频和相频特性曲线

在富燃料燃气发生器的情况下$\psi<1$，$K_m\leqslant1$并在氧化剂流量的作用下系数$D<-1$，而在燃料流量的作用下，通常，$|D|\leqslant1$。这些$D$值下的幅相频率特性曲线的变化情况前面已描述过。

图3.6列出了按式(3.3.5)计算的有熵波的气路的幅频特性曲线和相频特性曲线。在幅频和相频特性曲线上，在$D=0$以外的各种情况下，与图3.4所列的特性曲线相比“波”更加显著地区分出来，这些波进一步证明了熵波的影响。

## 3.4　液体火箭发动机气路的频率特性曲线

### 3.4.1　燃气发生器的特性曲线

液体火箭发动机的气路由燃气发生器、涡轮、燃气导管、燃

烧室等一系列组件的过流部分所组成。上列流路每一个部位内的过程都有其特点，影响着它们的动态特性。所以要对每一个组件单独进行研究。

如3.3.2节中所列计算数据与试验数据对比结果表明的那样，发动机气路内的过程接近于绝热过程。所以将只对绝热过程下的气路动态特性进行分析。

整个液体火箭发动机的动态特性有很多地方取决于燃气发生器的动态特性，与其它气路分段的特性相比燃气发生器往往具有最大的特征时间常数(停留时间)和最大的熵波幅值。这两个因素首先既影响到燃气发生器流路内过程的动态特性，也影响到液体火箭发动机的动态特性。

在建立发动机的线性数学模型时以液路内的液体流量变化量及气路内的压力和温度的变化量作为变量。也可用这些变量写出计算气路分段频率特性的方程(3.3.1)和(3.3.2)。按公式(3.3.1)对富氧燃气发生器幅相频率特性进行计算的结果示于图3.7。曲线是按无量纲频率$\bar{\theta}$来建立的，所对应的情况是：在不同的转化时间$\bar{\tau}_\Gamma=\tau_\Gamma/\tau$和参数值为$K_m=20$；$\psi=-1$；$K=1.2$；$\varepsilon=0$条件下，用按谐波定律改变氧化剂流量$\delta\bar{G}_{ок}(\delta\bar{G}_\Gamma=0)$，或改变燃料流量$\delta\bar{G}_\Gamma(\delta\bar{G}_{ок}=0)$的办法引入干扰。

燃气发生器的幅相频率特性曲线在不同的干扰下差别是很大的。当$\bar{\tau}_\Gamma=0$并用改变氧化剂流量来产生干扰时曲线具有螺旋状，它随着幅频的增加而缓慢地减小。如果把方程(3.3.1)化成方程(3.3.5)的形式并对这两个方程的右边的系数进行对比，则可以查明，这一类曲线正好对应于$|D|<1$。当按$\delta\bar{G}_\Gamma$进行干扰时系数$|D|>1$并相应地幅相频率特性曲线上出现环状，而且在低频区出现相位超前。转化时间$\tau_1$的考虑(图3.7上为$\bar{\tau}_\Gamma=1$)既会引起在按燃料流量进行干扰时幅相频率特性曲线的特征发生变化，也会引起相位差增大。



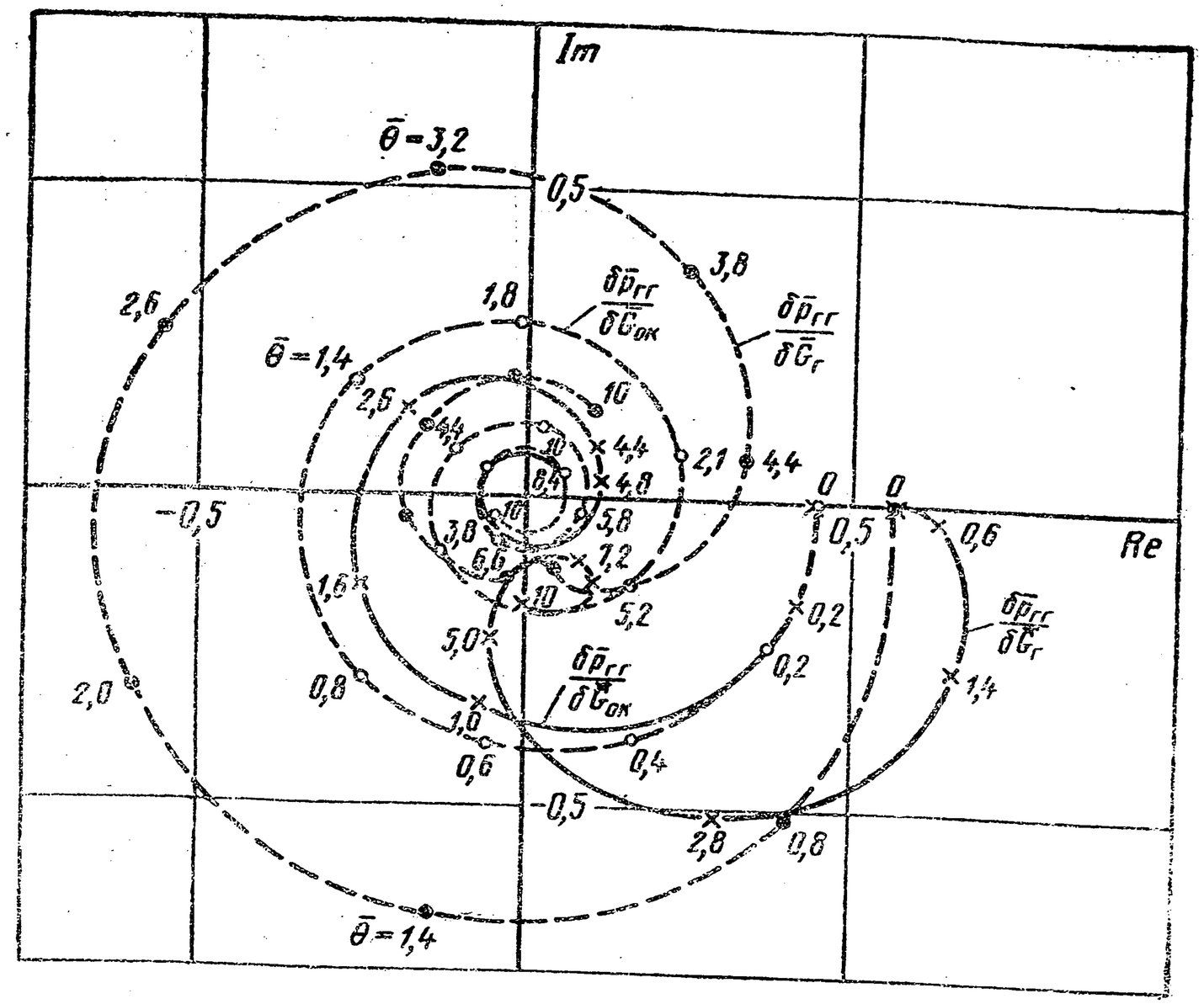



图3.7 富氧燃气发生器的幅相频率特性曲线

——$\bar{\tau}_\Gamma=0$；- - - -$\bar{\tau}_\Gamma=1$。

在前述参数情况下以及在各种$\bar{\tau}_\Gamma$值和涡轮喷嘴流量与涡轮压比关系曲线的各种斜率$\varepsilon$下富氧燃气发生器的频率特性曲线示于图3.8。$\bar{\tau}_\Gamma$之值只对相频特性曲线有影响，而在不同$\bar{\tau}_\Gamma$下幅频特性曲线则是相合的。系数$\varepsilon$的增大，实际上对相频特性曲线没有影响，而同时幅频特性曲线则变化很大——随着$\varepsilon$的增大曲线的最大值移向大的频率$\bar{\theta}$区。系数$\varepsilon$与发动机组件特性有关，其对幅相频率特性曲线的影响可由公式(3.3.6)来预计。实际上，系数$\varepsilon$已包含在确定参数$\tau_1$和$B$的关系式中，这两个参数只对静态的放大系数

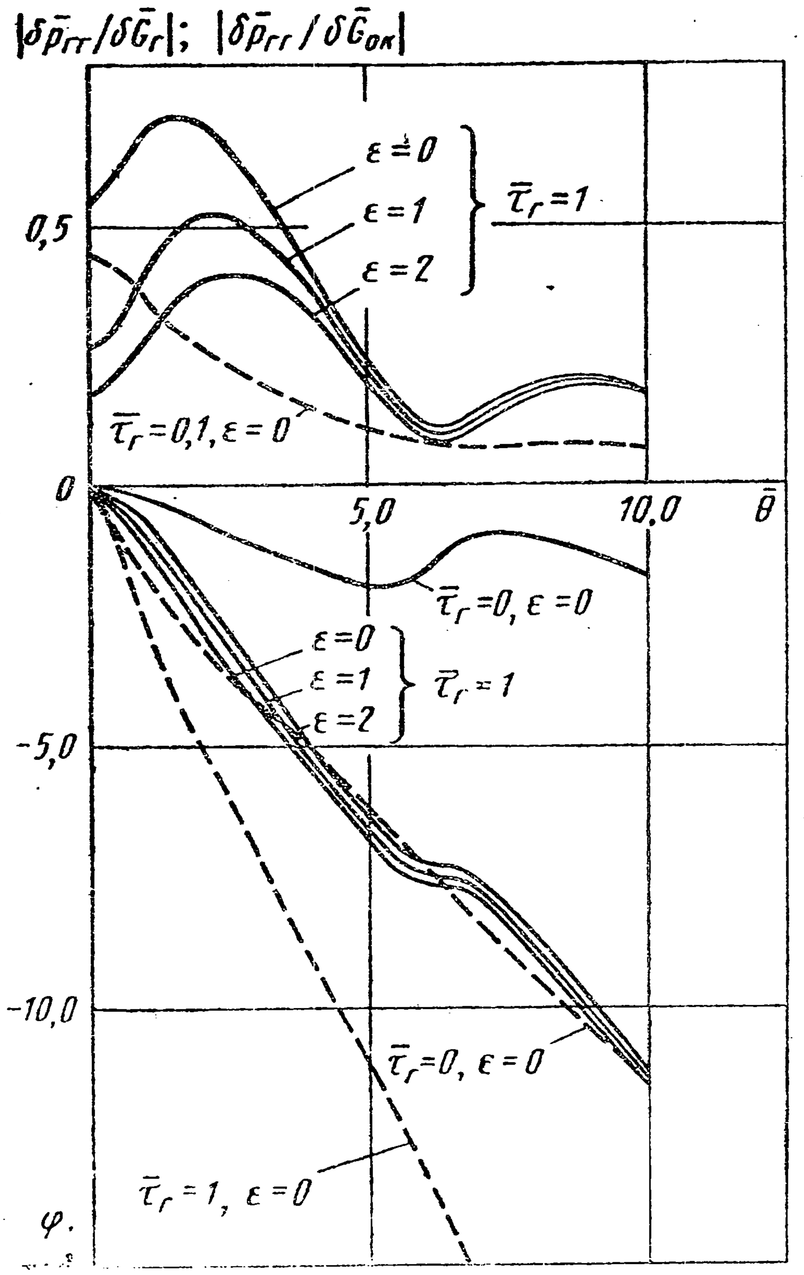



图3.8 燃气发生器的频率特性曲线

——$\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma}/\delta\bar{G}_\Gamma$；----·——$\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma}/\delta\bar{G}_{0\kappa}$。

$|\delta\bar{x}_{вых}/\delta\bar{y}_{вх}|$（当$\bar{\theta}=0$时）有影响，并随着频率增大对幅值的减少速度有影响，而对幅相频率特性曲线的形状没有影响。

与$\varepsilon$不同，其它结构参数——温度曲线的斜率$\psi$在公式（3.3.6）中确定系数$B$和$D$。改变方程(3.3.5)中的系数$D$可使已在3.3节中表示的幅相频率特性曲线发生变化。这可由富氧燃气发生器在不同$\psi$值下的幅相频率特性曲线（图3.9）来证实。对图3.6～3.9上的频率特性曲线进行比较后表明，对它们影响最明显的是温度曲线的斜率$\psi$，它决定了熵波的幅值。这个事实确认了熵波对液体火箭发动机气路的动态特性有着决定性的影响。

图3.10列出了富燃料燃气发生器在两个$\bar{\tau}_\Gamma$值下的$\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma}/\delta\bar{G}_\Gamma$的幅相频率特性曲线（$\psi=0.5$；$K_m=0.5$；$\kappa=1.2$；$\varepsilon=-1$）。在所有情况下幅相频率特性曲线具有螺旋状，它对坐标原点的距离周期地减小和增大。

当分析发动机的动态特性时在许多情况下比较方便的不是把流量的变化量而是把喷嘴前的压力变化量作为燃气发生器的入口



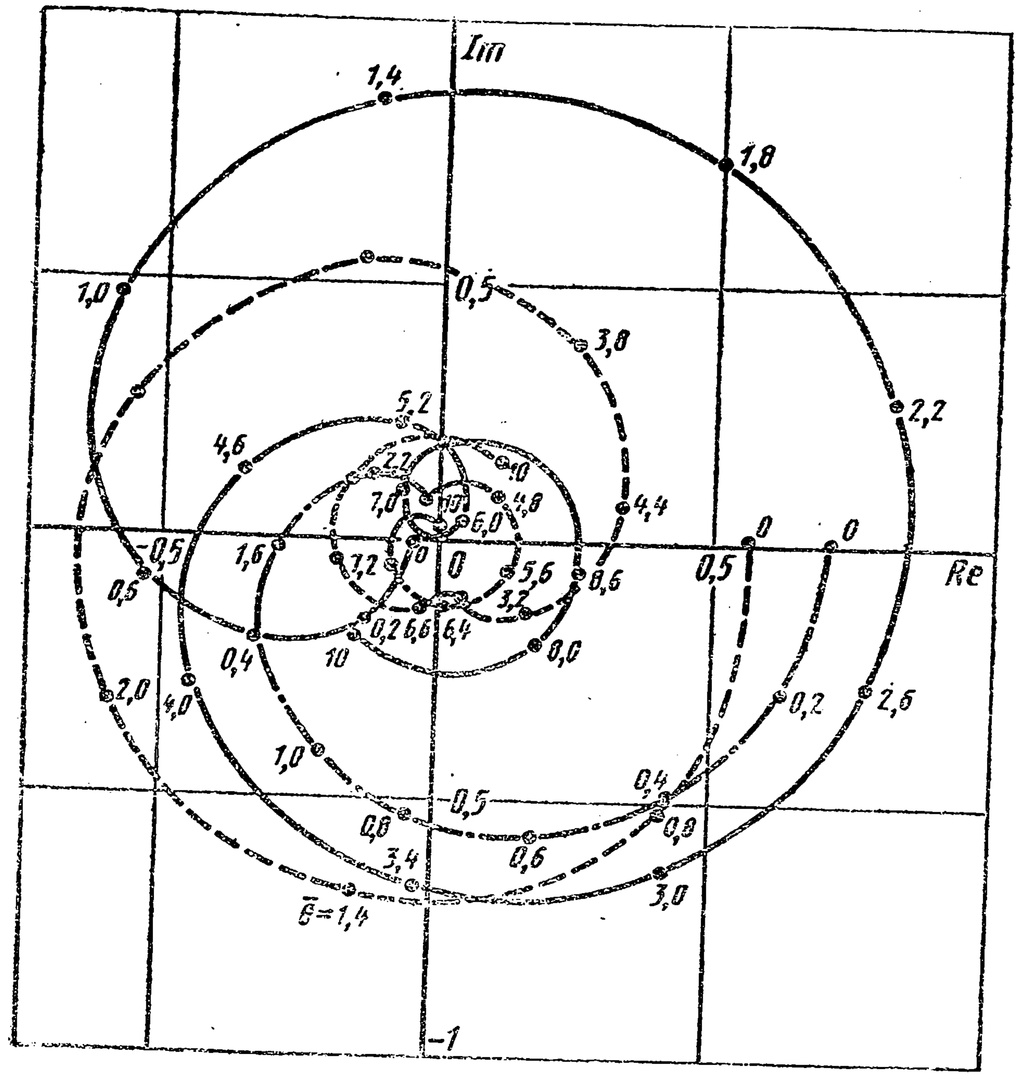



图3.9 富氧燃气发生器的$\delta\overline{p}_{\Gamma\Gamma}/\delta\overline{G}_\Gamma$幅相频率特性曲线

——$\psi=-0.5$；

----$\psi=-1$；

——·——$\psi=-2$。

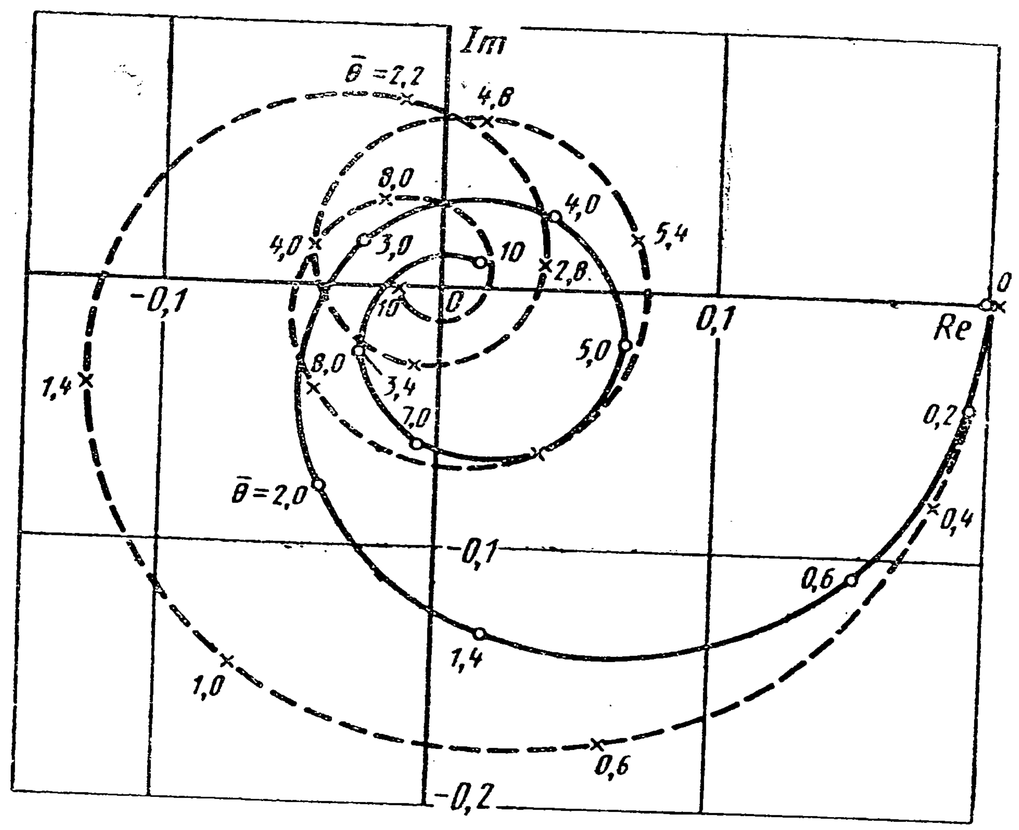



图3.10 富燃料燃气发生器的$\delta\overline{p}_{\Gamma\Gamma}/\delta\overline{G}_\Gamma$幅相频率特性曲线

——$\bar{\tau}_\Gamma=0$；　　----$\tau_{\bar{\Gamma}}=1$。

变量，这是因为喷嘴是燃气发生器的零件，并且喷嘴压降对发动机的频率特性有明显的影响。忽略液体的惯性，写出将第$i$种组元的流量变化量与压力变化量联系起来的线性方程，

$$\delta G_i = \frac{p_{\phi i}}{2\Delta p_{\phi i}}\delta p_{\phi i} - \frac{p_{\Gamma\Gamma}}{2\Delta p_{\phi i}}\delta p_{\Gamma\Gamma} \qquad (3.4.1)$$

式中 $\Delta p_{\phi i} = p_{\phi i} - p_{\Gamma\Gamma}$——喷嘴压降；

$p_{\phi i}$、$\delta p_{\phi i}$——喷嘴前压力和无量纲压力变化量。

将关系式(3.4.1)分别以氧化剂和燃料喷嘴压降来表示，代入方程(3.3.1)和(3.3.2)，得

$$\left\{\frac{i\omega\tau}{\kappa} + 1 + \varepsilon + \frac{\kappa-1}{2\kappa}\left(1 - e^{-i\omega\tau}\right) + \frac{e^{-i\omega\tau_\Gamma}}{\Delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi}}\left[\frac{K_m}{K_m+1}\right.\right.$$

$$\left. + \psi_{\Gamma\Gamma}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega\tau}\right)\right] + \frac{e^{-i\omega\tau_\Gamma}}{\Delta\bar{p}_{\Gamma.\phi}}\left[\frac{1}{K_m+1} - \psi_{\Gamma\Gamma}\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} - e^{-i\omega\tau}\right)\right]\right\}\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma} = \left(\frac{1}{\Delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi}} + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{K_m}{K_m+1}\right.$$

$$\left. + \psi_{\Gamma\Gamma}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega\tau}\right)\right]e^{-i\omega\tau_\Gamma}\delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi} + \left(\frac{1}{\Delta\bar{p}_{\Gamma.\phi}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left[\frac{1}{K_m+1} - \psi_{\Gamma\Gamma}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega\tau}\right)\right]e^{-i\omega\tau_\Gamma}\delta\bar{p}_{\Gamma.\phi} \qquad (3.4.2)$$

$$\delta\bar{T}_{\text{вых}} = \psi_{\Gamma\Gamma}\exp[i\omega(\tau + \tau_\Gamma)]\left[\left(\frac{1}{\Delta\bar{p}_{\Gamma.\phi}} - \frac{1}{\Delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi}}\right)\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma}\right.$$

$$+ \frac{1}{\Delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi}}\delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi} - \frac{1}{\Delta\bar{p}_{\Gamma.\phi}}\delta\bar{p}_{\Gamma.\phi}\Big]$$

$$+ \frac{\kappa-1}{\kappa}\left[1 - \exp(i\omega\tau)\right]\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma} \qquad (3.4.3)$$

式中 $\Delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi} = 2\Delta p_{\text{ок}.\phi}/p_{\Gamma\Gamma}$； $\Delta\bar{p}_{\Gamma.\phi} = 2\Delta p_{\Gamma.\phi}/p_{\Gamma\Gamma}$；



$\Delta p_{\text{ок}.\phi}$、$\Delta p_{\Gamma.\phi}$——氧化剂和燃料的喷嘴压降；

$\delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi}$、$\delta\bar{p}_{\Gamma.\phi}$——氧化剂和燃料喷嘴前相对压力变化量的幅值。

图3.11列出了当$K_m = 20$，$\psi_{\Gamma\Gamma} = -1$，$K = 1.2$，$\varepsilon = \tau_\Gamma = 0$和不同喷嘴压降$\Delta\bar{p}_{\phi.\text{ок}} = \Delta\bar{p}_{\phi.\Gamma}$时富氧燃气发生器在氧化剂喷前压力$\delta\bar{p}_{\text{ок}.\phi}$($\delta\bar{p}_{\Gamma.\phi} = 0$)干扰作用下的幅相频率特性曲线。当喷嘴压降足够大$\Delta\bar{p}_{\phi.\text{ок}} = \Delta\bar{p}_{\phi.\Gamma} = 0.25$时，也即相当于气路内压力的12%时，并且在喷前压力干扰作用下，幅相频率特性曲线与用改变流量进行干扰下的类似曲线相比没有本质上的差别（见图3.7）。当$\Delta\bar{p}_{\phi.\text{ок}} = \Delta\bar{p}_{\phi.\Gamma} = 0.05$(气路内压力的2.5%)时幅相频率特性曲线的特征发生改变——基本上由螺旋状变为圆形。

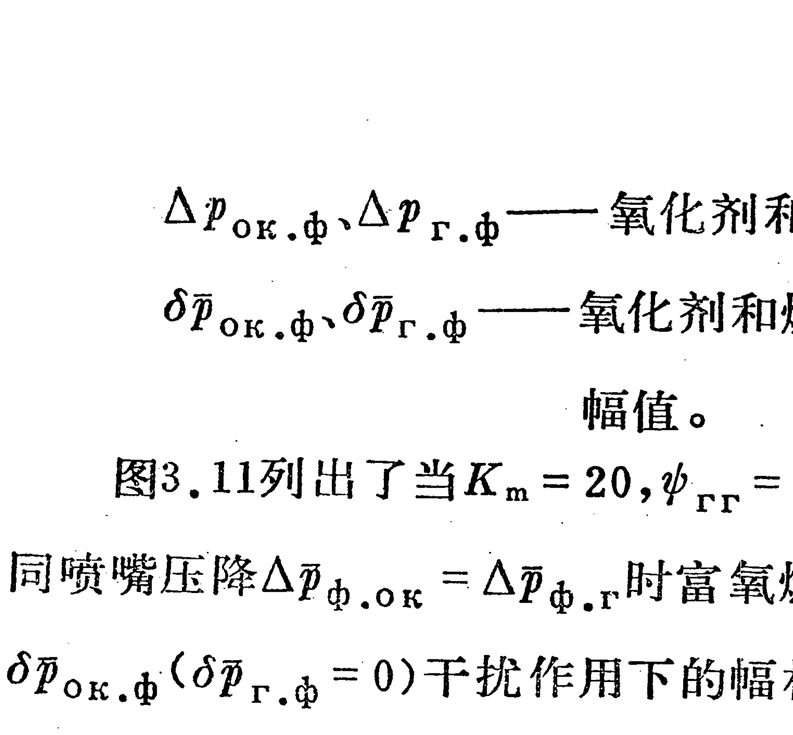



图3.11 燃气发生器的 $\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma}/\delta\bar{p}_{\text{ок}.\Phi}$ 幅相频率特性曲线

—·—·—

$\Delta\bar{p}_{\text{ок}.\Phi} = \Delta\bar{p}_{\Gamma.\phi} = 0.05$；

------

$\Delta\bar{p}_{\text{ок}.\Phi} = \Delta\bar{p}_{\Gamma.\Phi} = 0.25$

## 3.4.2 燃气导管的特性曲线

与燃气发生器不同的是燃气导管内没有燃烧过程，但由于燃气把熵波从发生器燃烧区经发生器和涡轮的气路传输给燃气导管

而使入口处产生燃气温度振荡。试验[6,7]表明，当在足够长（约1.5m）的流路内流动而没有回流区的情况下，在400Hz以下的宽的频率范围内熵波是不会耗散的。据此可以认为，燃气导管入口处既具有燃气流量的振荡，也有燃气温度(熵)的振荡，燃气导管的动态特性可用方程(3.2.16)和(3.2.17)来描述，而涡轮内的温度则为常值。燃气发生器出口处的压力变化量$\delta p_{\text{гг}}$和温度变化量$\delta T_{\text{гг.вых}} = \delta T_{\text{газ.вых}}$为干扰量(为了简单起见，涡轮内的温度变化忽略不计)。图3.12列出了各种$\varepsilon_\phi$值——燃烧室喷嘴流量特性曲线的斜率下燃气导管的$\delta\bar{p}_{\text{газ}}/\delta\bar{p}_{\text{гг}}$和$\delta\bar{p}_{\text{газ}}/\delta\bar{T}_{\text{гг.вых}}$的幅频特性曲线。当以改变燃气发生器内的压力($\delta\bar{T}_{\text{гг.вых}}$和$\delta\bar{p}_{\text{н}}=0$)的方法对燃气导管进行干扰时，方程(3.2.16)在把它化为关系式(3.3.5)时就不包含系数$D$，而系数$A$将很小。相应地在这种干扰量下燃气导管的幅相频率特性曲线将与一阶非周期振荡的（流容的)元件的幅相频率特性曲线类似。

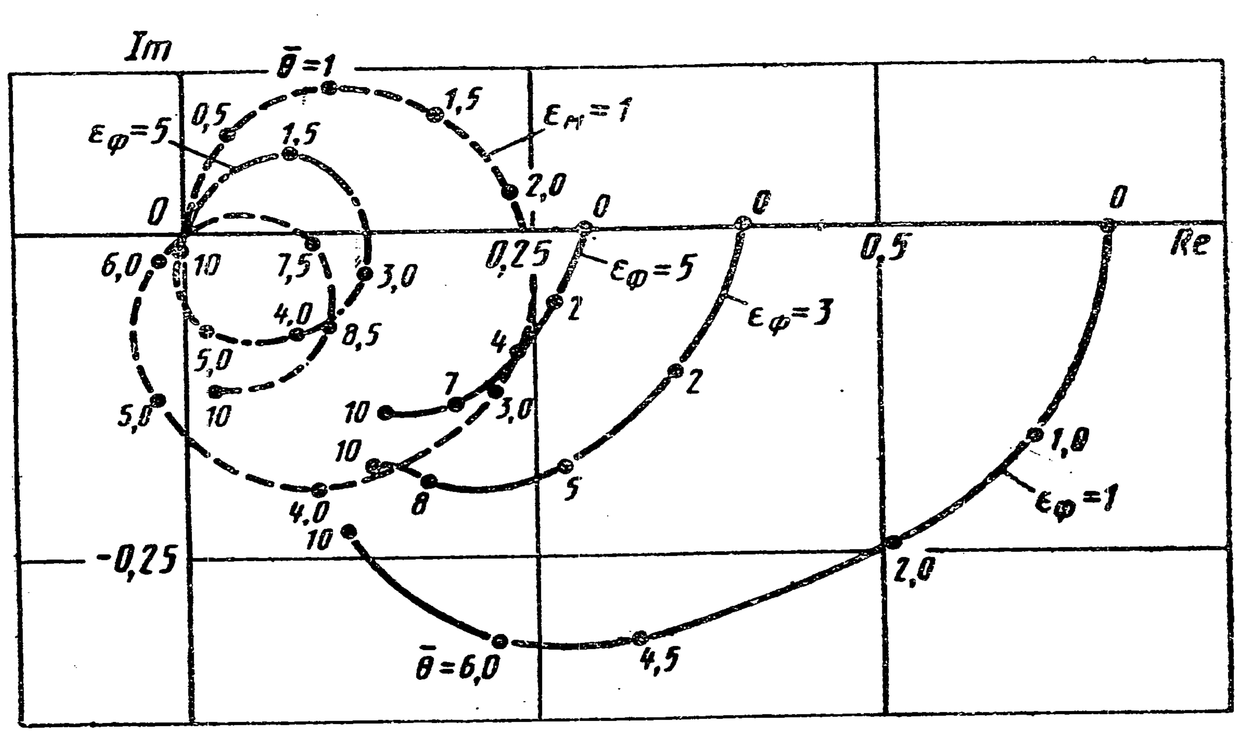



图3.12　燃气导管的幅相频率特性曲线

—·—·—$\delta\bar{p}_{\text{газ}}/\delta\bar{p}_{\text{гг}}$；------$\delta\bar{p}_{\text{газ}}/\delta T_{\text{гг.вых}}$

事先把方程(3.2.16)化为关系式(3.3.5)，会发现，用改变燃



气发生器出口处温度$\delta T_{\text{гг.вых}}$($\delta\bar{p}_{\text{гг}} = \delta\bar{p}_{\text{м.с}} = 0$)的方法对燃气导管入口进行干扰时参数$D=-1$。在这种情况下幅相频率特性曲线为螺旋形，其螺旋圈周期地通过坐标原点。改变$\varepsilon_\phi$可使环圈的展幅发生变化——它随着系数$\varepsilon_\phi$的减小而增长。

燃烧室幅相频率特性曲线的特征由于它的时间常数$\tau_3$像流容一样很小($\tau_3 \ll \tau_1$)，故不准备进行讨论，因为它们对整个发动机的动态特性影响很小。

## 3.5　燃气发生器的结构特点对其动态特性的影响

### 3.5.1　均布出口

在许多情况下发生器燃气是通过专用管1（图3.13）输入涡轮的，然后经集合器2进入涡轮4的喷嘴环3的各个喷嘴。在该情况下可以认为燃气的输入在集合器的一个截面上是集中的，而燃气从集合器经涡轮喷嘴流出是沿其长度均布的。因为涡轮集合器的过流部分包含在燃气发生器过流部分之内，故燃气发生器可以视为具有均布出口的燃气发生器。

前面在推导气路动态方程时，曾作了如下假设，沿出口处局部阻力(喷管、喷嘴等)的长度上熵波的传播时间可以忽略不计。在推导具有均布出口的燃气发生器的动态方程时不能作这样的假设。其余的假设仍然有效。

为确定燃气的熵沿集合器的变化，式(3.1.13)是不能用的，该式是如下微分方程(见3.6节)的解

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} + u\frac{\partial \delta s}{\partial x} = 0 \qquad (3.5.1)$$

式中　$\delta s$——比熵的无量纲变化量；

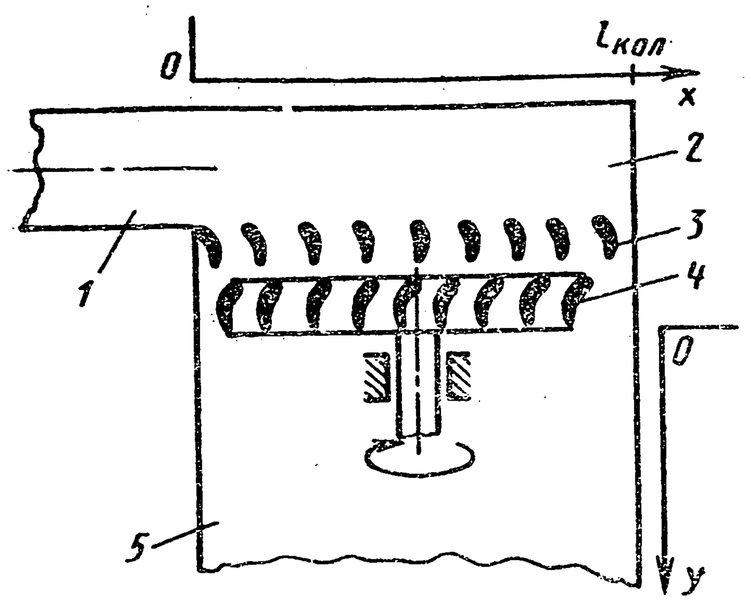



图3.13 燃气发生器连同涡轮集合器的气路简图

1—管路； 2—集合器；
3—喷嘴环； 4—涡轮；
5—燃气导管。

$u$——描述恒速不等温流轴线方向上液体的速度。

在集合器内燃气的速度沿着长度是变化的，因此熵的方程(3.5.1)必须重新求解。考虑到集合器具有圆柱形，而燃气经喷嘴流出沿着集合器长度上是均匀的，于是可以认为，燃气的平均速度沿集合器长度是线性变化的，并可用下式来描述

$$u=\frac{u_{вх}}{l_{кол}}\left(l_{кол}-x\right)=\frac{l_{кол}-\kappa}{\tau_{кол}} \qquad (3.5.2)$$

式中 $u_{вх}$——集合器入口截面上的燃气流速；

$\tau_{кол}$——集合器内假定的燃气停留时间；

$l_{кол}$——集合器长度。

停留时间$\tau_{кол}$之所以称为假定的，这是因为对进入该导气环喷嘴的每一股燃气射流来说，此停留时间都有各自的值。

将周期特解$\delta s=\delta\bar{s}\exp(i\omega t)$和式(3.5.2)的速度代入能量方程(3.5.1)，就得出描述沿集合器长度的熵变化量幅值变化的方程

$$i\omega\delta\bar{s}+\frac{l_{кол}-x}{\tau_{кол}}\frac{\mathrm{d}\delta\bar{s}}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (3.5.3)$$

方程(3.5.3)的解为

$$\delta\bar{s}=C(l_{кол}-x)^{\,i\omega\tau_{кол}} \qquad (3.5.4)$$



式中 $C$为常数。

考虑到集合器入口截面上熵的变化量幅值可从求解燃气发生器室的方程求得，就得出边界条件

$$x=0;\ \delta\bar{s}=\delta\bar{s}_{кол.вх}$$

式中 $\delta\bar{s}_{кол.вх}$——涡轮集合器入口处熵的变化量幅值。

把边界条件代入解式(3.5.4)，得

$$\delta\bar{s}=\delta\bar{s}_{кол.вх}\left(1-\frac{x}{l_{кол}}\right)^{i\omega\tau_{кол}}$$

$$=\delta\bar{s}_{кол.вх}\exp[i\omega\tau_{кол}(1-x/l_{кол})] \qquad (3.5.5)$$

解式(3.5.5)描述了沿长途均匀抽气的流路内，也即圆柱形涡轮集合器内熵波的传播。在$x$截面前波的传播时间不是像解式(3.1.14)中所进行的那样按线性规律增长（在圆柱形流道的公式(3.1.14)中$\tau=x/u$），而是比较急剧地按对数规律增长，这是解式(3.5.5)的特征。对$x=l_{кол}$的截面这个时间趋向无限大，因为在这个截面上有熵波在内传播的燃气的速度根据式(3.5.2)等于零。

无论把集合器视作具有集中参数的系统，还是视作具有分布参数的系统，当分析集合器内气柱的动态特性时都可利用解式(3.5.5)。为描述集合器的动态特性，除式(3.5.5)外，还需要燃气的动量守恒方程和质量平衡方程，这些方程的书写形式取决于所研究频率的范围。

下面着重研究低频范围，对该低频范围气柱可以视作具有集中参数的系统。对这种情况动量守恒方程写成条件式(3.1.11)。

单独写出从管路1(见图3.13)的出口截面到涡轮4的导气环喷口的质量平衡方程(3.1.22)如下式：

$$\tau_{кол}\frac{\mathrm{d}\delta m_{кол}}{\mathrm{d}t}=\delta G_{кол.вх}-\delta G_{кол.вых} \qquad (3.5.6)$$

式中 $\tau_{кол}=m_{кол}/G_{кол.вх}$；

$m_{кол}$、$\delta m_{кол}$——集合器内燃气质量和无量纲质量变化量。

$G_{кол.вх}$、$\delta G_{кол.вх}$——集合器入口处燃气流量及其无量纲变化量；

$\delta G_{кол.вых}$——涡轮集合器出口处燃气流量的无量纲变化量（通过所有导气环喷嘴）。

对集合器轴上每一个截面以及与之对应的涡轮导气环喷嘴来说，流量变化量有自己的值，这是因为由于集合器各截面前的传输时间不同而使燃气温度的变化幅值（通过喷嘴的流量与其有关）有差异。所以最好的办法是引入一个集合器单位长度上的比流量 $q = G_{кол.вх}/l_{кол}$ 的变化量，其中 $l_{кол}$——从集合器入口到末端（对环形集合器到中点）的长度。

对坐标为 $\bar{x} = x/l_{кол}$ 的集合器截面，经过喷嘴的流量由式(3.2.6)确定，在这种情况下该式具有如下形式

$$\delta q(\bar{x},t) = -\frac{1}{2}\delta s(\bar{x},t) + \left(1 + \varepsilon_T - \frac{\kappa_{гг}-1}{2\kappa_{гг}}\right) \times \delta p_{гг}(t) - \varepsilon_T \delta p_{газ}(t) \qquad (3.5.7)$$

式中 $\delta p_{гг}$——集合器内压力的无量纲变化量（与燃气发生器内的变化量相符）；

$\delta p_{гоз}$——涡轮出口处即燃气导管入口处压力的无量纲变化量；

$\varepsilon_T$——按公式(3.2.7)确定的涡轮流量对涡轮压降的关系曲线的斜率。

公式(3.5.7)中温度的变化量借助于式(3.1.16)被替代为熵的变化量。

为确定集合器出口处燃气流量的总变化量，将式(3.5.7)沿集合器长度进行积分，预先把它变成变化幅值，把解式(3.5.5)代入之，并考虑条件(3.1.11)：



$$\delta \bar{G}_{кол.вых} = \int_0^1 \delta \bar{q}(\bar{x},t)\,d\bar{x} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \delta \bar{s}\,d\bar{x} + \left(1 + \varepsilon_T - \frac{\kappa_{гг}-1}{2\kappa_{гг}}\right)\delta \bar{p}_{гг} - \varepsilon_T \delta \bar{p}_{газ} = -\frac{\delta \bar{s}_{кол.вх}}{2(1+i\omega\tau_{кол})} + \left(1 + \varepsilon_T - \frac{\kappa_{тт}-1}{2\kappa_{гг}}\right)\delta \bar{p}_{гг} - \varepsilon_T \delta \bar{p}_{газ} \qquad (3.5.8)$$

式(3.5.6)中集合器入口流量变化量 $\delta G_{кол.вх}$ 等于包含在燃气发生器质量平衡方程中的发生器出口流量变化量 $\delta G_{ггвых}$，把来自式(3.2.2)的 $\delta G_{вх}$ 代入方程(3.1.29)，变为变化幅值，将周期特解代入，并引入相应的变量及系数符号就得出燃气发生器质量平衡方程：

$$\frac{i\omega\tau_1}{\kappa_{гг}}\delta \bar{p}_{гг} - [1 - \exp(-i\omega\tau_1)]\delta \bar{s}_{ггвх} = \frac{K_{m_{гг}}}{K_{m_{гг}}+1} \times \exp(-i\omega\tau_г)\delta \bar{G}_{ок1} + \frac{1}{K_{m_{гг}}+1}\exp(-i\omega\tau_г) \times \delta \bar{G}_{г1} - \delta \bar{G}_{ггвых} \qquad (3.5.9)$$

式中 $\delta \bar{G}_{ок1}$、$\delta \bar{G}_{г1}$——燃气发生器中氧化剂和燃料的流量变化幅值；

$\delta \bar{G}_{ггвых}$——燃气发生器出口处燃气流量的变化幅值；

$\tau_1$——燃气发生器腔内（到集合器入口处）燃气的停留时间；

$K_{m_{гг}}$——燃气发生器的组元混合比。

方程(3.5.6)中剩下燃气质量变化量还需要确定，由式(3.1.23)和(3.1.25)把它与其它参数联系起来。考虑到关系式(3.5.8)，把周期特解代入后，就把方程(3.5.6)变成如下形式：

$$i\omega\tau_{кол}\int_0^1 \left[\frac{1}{\kappa_{гг}}\delta \bar{p}_{гг}(t) - \delta \bar{s}_{кол}(\bar{x},t)\right]d\bar{x}$$

$$= -\frac{\delta\bar{s}_{\text{кол.вх}}}{2(1+i\omega\tau_{\text{кол}})} + \left(1+\varepsilon_{\text{т}} - \frac{\kappa_{\text{гг}}-1}{2\kappa_{\text{гг}}}\right)\delta\bar{p}_{\text{гг}}$$

$$- \varepsilon_{\text{т}}\delta\bar{p}_{\text{газ}} - \delta\bar{G}_{\text{ггвых}}$$

为计算积分利用式(3.1.11)和(3.5.5)，得集合器质量平衡方程

$$\frac{i\omega\tau_{\text{кол}}}{\kappa_{\text{гг}}}\delta\bar{p}_{\text{гг}} - \frac{i\omega\tau_{\text{кол}}\delta\bar{s}_{\text{кол.вх}}}{1+i\omega\tau_{\text{кол}}} = -\frac{\delta\bar{s}_{\text{кол.вх}}}{2(1+i\omega\tau_{\text{кол}})}$$

$$+\left(1+\varepsilon_{\text{т}} - \frac{\kappa_{\text{гг}}-1}{2\kappa_{\text{гг}}}\right)\delta\bar{p}_{\text{гг}} - \varepsilon_{\text{т}}\delta\bar{p}_{\text{газ}} - \delta\bar{G}_{\text{ггвых}} \qquad (3.5.10)$$

集合器出口处熵的变化幅值由关系式(3.1.14)把它与燃气发生器入口处燃气的熵变化量联系在一起，对本情况该式写成下式

$$\delta\bar{s}_{\text{кол.вх}} = \delta\bar{s}_{\text{ггвх}}(t-\tau_1) \qquad (3.5.11)$$

把关系式(3.5.10)中的$\delta\bar{s}_{\text{кол.вх}}$代入方程(3.5.11)，从式(3.5.9)和(3.5.10)中消去变化幅值$\delta\bar{G}_{\text{ггвых}}$，考虑到把熵变化量与温度和压力变化量联系起来的式(3.1.16)，以及考虑把温度变化量与流量变化量联系起来的式(3.2.4)，就得带有涡轮集合器的燃气发生器气路的质量平衡方程，此方程中考虑了集合器的特性——燃气经涡轮导气环流出的均布性

$$\left(\frac{i\omega(\tau_1+\tau_{\text{кол}})}{\kappa_{\text{гг}}} + 1 + \varepsilon_{\text{т}} + \frac{\kappa_{\text{гг}}-1}{2\kappa_{\text{гг}}}\right)(1+i\omega\tau_{\text{кол}})\delta\bar{p}_{\text{гг}}$$

$$- \frac{\kappa_{\text{гг}}-1}{\kappa_{\text{гг}}}\exp(-i\omega\tau_1)\delta\bar{p}_{\text{гг}}$$

$$= (1+i\omega\tau_{\text{кол}})\left(\frac{K_{\text{mгг}}}{K_{\text{mгг}}+1}\delta\bar{G}_{\text{ок1}} + \frac{1}{K_{\text{mгг}}+1}\delta\bar{G}_{\text{г1}}\right)$$

$$\times\exp(-i\omega\tau_{\text{г}}) - \psi_{\text{гг}}\left[\frac{1}{2}\exp(-i\omega\tau_1) - (1+i\omega\tau_{\text{кол}})\right]$$



$$\times\exp(-i\omega\tau_{\text{г}})(\delta\bar{G}_{\text{ок1}} - \delta\bar{G}_{\text{г1}}) \qquad (3.5.12)$$

式中 $\psi_{\text{гг}}$——发生器燃气温度对组元混合比关系曲线的无量纲斜率。

图3.14列出了富氧燃气发生器($\psi_{\text{гг}}=-1$；$K_{\text{гг}}=1.2$；$\tau_1=0.01s$；$K_{\text{mгг}}=20$；$\tau_{\text{г}}=0$)在各种组合比$\tau_{\text{кол}}/\tau_1$情况下的幅相频率特性曲线。曲线图是在燃料流量变化量$\delta\bar{G}_{\text{г1}}(\delta\bar{G}_{\text{ок1}}=0)$的

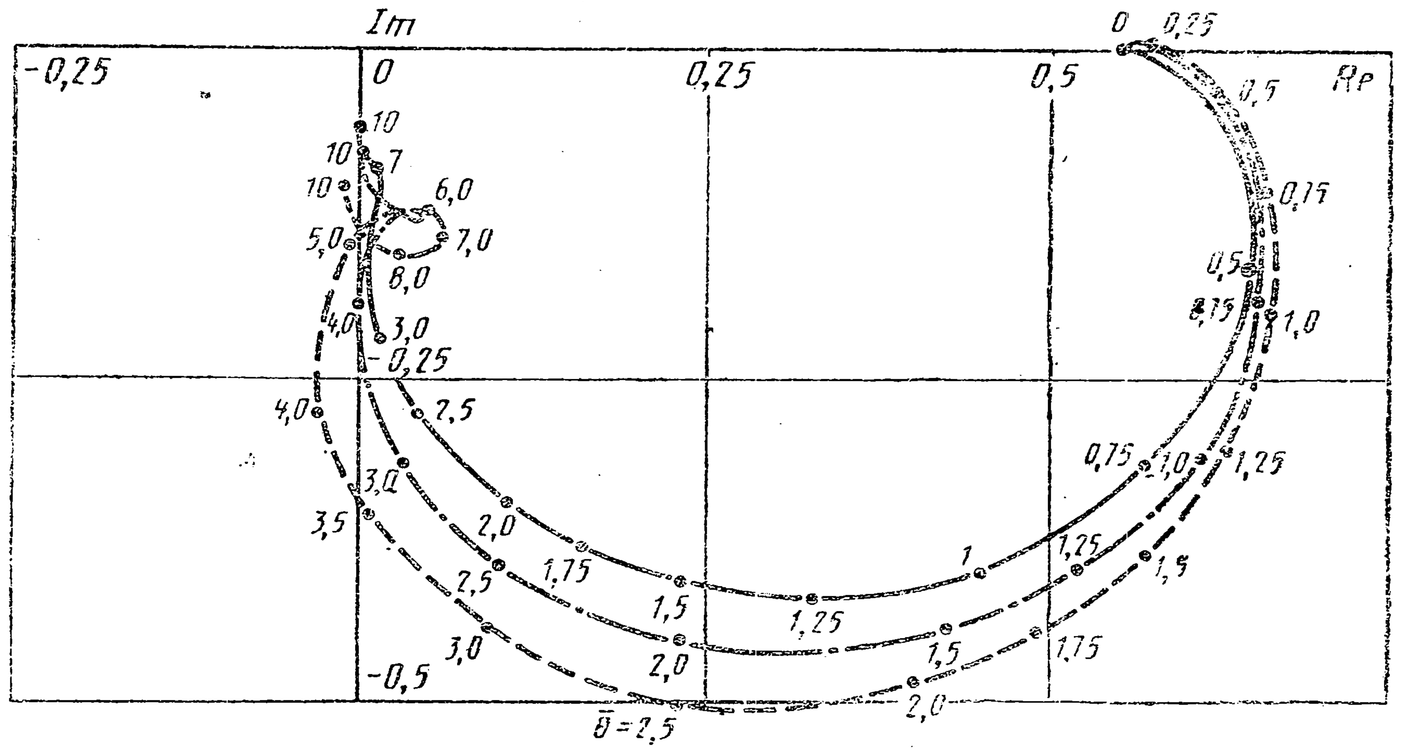



图3.14 均布出口富氧燃气发生器的幅相频率特性曲线

—·—·—$\tau_{\text{кол}}/\tau_1=0.5$；——$\tau_{\text{кол}}/\tau_1=1$；

-------$\tau_{\text{кол}}/\tau_1=0.2$

干扰作用情况下按无量纲频率$\bar{\theta}=\omega\tau_1$来建立的。随着比值$\tau_{\text{кол}}/\tau_1$的增加，幅相频率特性曲线的特征发生变化弧——状环的摆幅变小，它们变得比较平滑，近似于一阶非周期振荡元件，即简单的过流流容的幅相频率特性曲线。

幅相频率特性曲线的特征发生变化的原因可解释如下：与燃气发生器方程(3.3.1)不同，在集合器动态方程(3.5.10)中没有决定弧形环产生的滞后项。当$\tau_{\text{кол}}/\tau_1$增加时在出现熵波的情况下与喷嘴出口流动条件变化有关的效应对过流气体流容的动态特性

的影响变小。

### 3.5.2 双区燃气发生器

在某些情况下燃气发生器包含两个引入推进剂组元的装置：燃气发生器头部和距发生器头部某一距离的引入不参燃组元的辅助装置。第二个引入组元的装置把燃气发生器的气路分为两个区（容腔），每一个区均有各自的燃气流量和温度值。把双区燃气发生器的气路分为两个区之后，对从头部到引入不参燃组元截面的第一区来说，在写出方程(3.2.8)和(3.2.9)时要采用下列参数：

$\delta p = \delta p_{\text{гг1}}$ ——燃气发生器第一区内压力的无量纲变化量；

$\varepsilon = \varepsilon_{\text{гг1}}(p_{\text{гг2}}/p_{\text{гг1}})$ ——通过引入不参燃组元辅助装置的燃气流量对压比$p_{\text{гг2}}/p_{\text{гг1}}$的关系曲线的无量纲斜率；

$p_{\text{гг1}}$、$p_{\text{гг2}}$ ——燃气发生器第一区和第二区内的压力平均值；

$\kappa = \kappa_{\text{гг1}}$；

$\tau = \tau_{11}$——燃气发生器第一区内燃气的停留时间；

$\psi = \psi_{\text{гг1}}$ ——燃气发生器头部附近燃气温度对第一区内组元混合比$K_m = K_{m\text{гг1}}$关系曲线的无量纲斜率；

$\delta G_{\text{ок11}}$、$\delta G_{\text{г11}}$ ——通过第一区的氧化剂和燃料的液体流量的无量纲变化量；

$\delta p_{\text{гг2}} = \delta p_{\text{м.с1}}$ ——第二区内压力的无量纲变化量；

$\tau_{\text{г}} = \tau_{\text{г11}}$ ——第一区内液体组元转化成燃气的时间；

$\delta T_{\text{вых}} = \delta T_{\text{ггвых1}}$ ——第一区出口温度的无量纲变化量。

这时作如下假定：在任何情况下引入辅助组元的安排会导致产生局部阻力，对该阻力要采用像对喷嘴一样的关系式(3.2.6)，而流路内没有其它的局部阻力。

在推导第二区的方程时要利用燃烧室的方程(3.2.28)～



(3.2.33)，并要考虑到从燃气发生器出来的燃气进入涡轮，在一般情况下(与燃烧室喷管不一样)其压降是亚临界的。此外，表征熵波沿气路传输的时滞是另外的一些值。为了统一，像燃烧室一样，假定有两种液体组元供入第二区，这样就可以用一个方程来描述两种类型的燃气发生器——富氧的和富燃料的。相应地燃气发生器第二区入口温度无量纲变化量的方程与方程(3.2.28)和(3.2.29)类似，如下式：

$$\delta T_{\text{гг2}} = \psi_{\text{гг2}}[\bar{G}_{\text{ок11}}\,\delta G_{\text{ок11}}(t-\tau_{\text{г11}}-\tau_{11}) + (1-\bar{G}_{\text{ок11}})\delta G_{\text{ок12}}(t-\tau_{\text{г12}}) - \bar{G}_{\text{г11}}\,\delta G_{\text{г11}}(t-\tau_{\text{г11}}-\tau_{11}) - (1-\bar{G}_{\text{г11}})\delta G_{\text{г12}}(t-\tau_{\text{г12}})] \qquad (3.5.13)$$

式中 $\psi_{\text{гг2}}$——第二区内温度对组元混合比关系曲线的无量纲斜率；

$\bar{G}_{\text{ок11}} = G_{\text{ок11}}/(G_{\text{ок11}}+G_{\text{ок12}})$；

$G_{\text{ок11}}$、$G_{\text{ок12}}$ ——分别为通过第一区和第二区的氧化剂平均流量；

$\delta G_{\text{ок12}}$、$\delta G_{\text{г12}}$——通过第二区的氧化剂和燃料流量的无量纲变化量；

$\tau_{\text{г12}}$ ——第二区内液体组元转化为燃气的时间；

$\bar{G}_{\text{г11}} = G_{\text{г11}}/(G_{\text{г11}}+G_{\text{г12}})$；

$G_{\text{г11}}$、$G_{\text{г12}}$ ——通过第一区和第二区的燃料平均流量。

对第二区出口温度的变化量类似于关系式(3.2.30)写为

$$\delta T_{\text{ггвых2}} = \delta T_{\text{гг2}}(t-\tau_{12}) + \frac{\kappa_{\text{гг2}}-1}{\kappa_{\text{гг2}}} \times [\delta p_{\text{гг2}} - \delta p_{\text{гг2}}(t-\tau_{12})] \qquad (3.5.14)$$

式中 $\tau_{12}$——第二区内发生器燃气的停留时间；

$\kappa_{\text{гг2}}$ ——第二区内燃气的绝热指数。

利用推导方程(3.2.33)的方法，考虑了通过涡轮的燃气流量

变化量的关系式(3.2.6)，可得第二区内的质量平衡方程

$$\frac{\tau_{12}}{\kappa_{\text{гг2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta p_{\text{гг2}}}{\mathrm{d}t}+(1+\varepsilon_{\text{т}})\delta p_{\text{гг2}}-\delta T_{\text{гг2}}+\frac{1}{2}\delta T_{\text{гг2}}$$

$$\times(t-\tau_{12})+\frac{\kappa_{\text{гг2}}-1}{2\kappa_{\text{гг2}}}[\delta p_{\text{гг2}}-\delta p_{\text{гг2}}(t-\tau_{12})]$$

$$-\varepsilon_{\text{т}}\delta p_{\text{газ}}-\tilde{G}_{\text{г12}}\,\delta G_{\text{г12}}\,(t-\tau_{\text{г12}})-\tilde{G}_{\text{ок12}}\,\delta G_{\text{ок12}}$$

$$\times(t-\tau_{\text{г12}})-(1-\tilde{G}_{\text{г3}}-\tilde{G}_{\text{ок3}})\Big[(1+\varepsilon_{\text{гг1}})\delta p_{\text{гг1}}$$

$$-\frac{1}{2}\times\delta T_{\text{ггвых1}}-\varepsilon_{\text{гг1}}\,\delta p_{\text{гг2}}\Big]=0 \qquad (3.5.15)$$

式中 $\tilde{G}_{\text{ок12}}=G_{\text{ок12}}/G_{\text{гг}}$；$\tilde{G}_{\text{г12}}=G_{12}/G_{\text{гг}}$——通过燃气发生器第二区的液体组元的相对平均流量；

$G_{\text{гг}}$——通过燃气发生器第二区的燃气平均总流量。

实际上在燃气发生器中只有一种组元以液体状态供应到第二区中，相应地对另一种组元来说$\tilde{G}_{\text{г12}}=0$或$\tilde{G}_{\text{ок12}}=0$。由于同样的原因在方程(3.5.15)中或者是$\tilde{G}_{\text{г11}}=1$，或者是$\tilde{G}_{\text{ок11}}=1$，同样地通过第二区的其中某一种流量变化量的项也会消失。

图3.15列出了单区和双区燃气发生器的幅相频率特性曲线。单区的燃气发生器和双区燃气发生器的第一区按公式(3.4.2)和(3.4.3)计算，而双区燃气发生器的第二区则按公式(3.5.13)～(3.5.15)和式(3.4.1)计算。单区和双区燃气发生器的计算均是对下述情况进行的：$\tau_1=\tau_{11}+\tau_{12}$；$\psi=\psi_{\text{гг2}}$；$\kappa=\kappa_{\text{гг1}}=\kappa_{\text{гг}_2}$；$\tau_{\text{г}}=\tau_{\text{г11}}=\tau_{\text{г12}}$；$\Delta\bar{p}_{\text{ок.ф}}=\Delta\bar{p}_{\text{г.ф}}$，其中$\tau_1$、$\tau_{\text{г}}$、$\kappa$、$\psi$——单区燃气发生器的参数。用氧化剂喷嘴前压力进行干扰。对幅相频率特性曲线进行比较表明，单区和双区燃气发生器的动态特性在相当宽的频率范围内($\bar{\theta}=\omega\tau=4.0$)彼此之间没有明显的差异。只有在$\bar{\theta}>4$时才有差异，但是这个频率范围已不是液体火箭发动机低频



动态特性的特征。

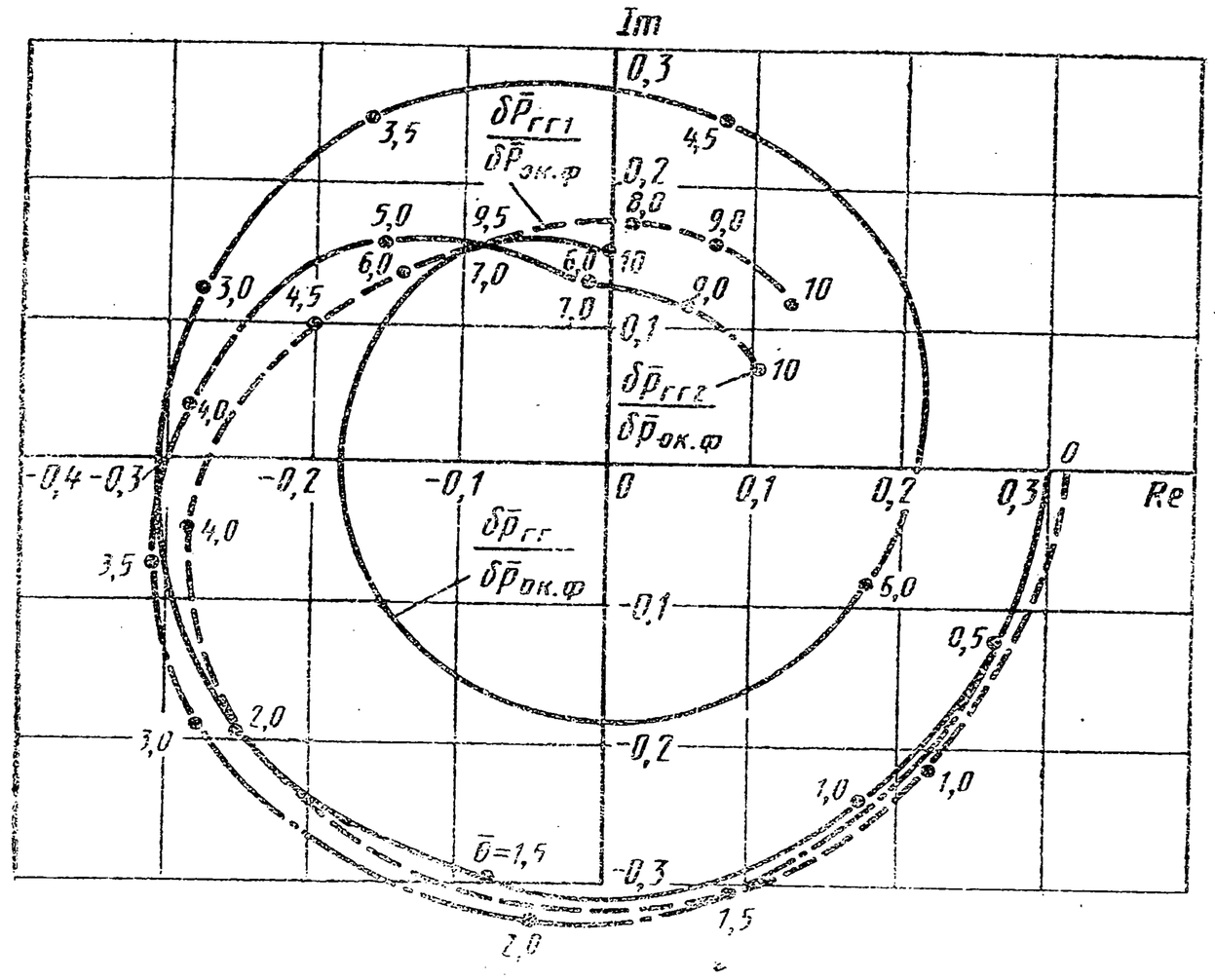



图3.15 燃气发生器的幅相频率特性曲线
——单区的；—·—，-------双区的。

## 3.6 气路中的声学效应计算

### 3.6.1 视为具有分布参数系统的气路动态方程

在液体火箭发动机气路内的运动是不等温的，所以在其视为具有分布参数系统模型的数学模型中除运动方程(2.2.21)和连续方程(2.2.16)外还应包括能量方程。在液体火箭发动机流路所特有的流路内的无粘无导热燃气的绝热一维运动情况下利用如下熵的变化方程作为能量方程是方便的：

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}=0 \qquad (3.6.1)$$

式中　$s$——熵。

在无粘气体一维运动的方程(2.2.16)和(2.2.21)中认为$\tau_w = F_x = 0$；$\gamma = 1$并弃去平均值的符号。对这些简化了的方程以及对方程(3.6.1)进行线性化并化成无量纲变化量和变量$\bar{x}$和$\bar{t}$，就得

$$\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{t}} + Ma\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{3.6.2}$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{t}} + Ma\frac{\partial \delta p}{\partial \bar{x}} + \alpha\frac{\partial \delta u}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{3.6.3}$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial \bar{t}} + Ma\frac{\partial \delta s}{\partial \bar{x}} = 0 \tag{3.6.4}$$

对于由方程(3.6.2)～(3.6.4)所描述的理想气体的不等温运动来说，连续运动方程(3.6.2)和(3.6.3)与能量方程(3.6.4)无关，因而它们可独立积分。用2.3节中所提出的求解液路的类似方法就可写出速度和压力变化幅值方程

$$\delta\bar{u} = C\exp[i\bar{\omega}\bar{x}/(1-Ma)] + D\exp[-i\bar{\omega}\bar{x}/(1+Ma)] \tag{3.6.5}$$

$$\delta\bar{p} = -\alpha\{C\exp[i\bar{\omega}\bar{x}/(1-Ma)] - D\exp[-i\bar{\omega}\bar{x}/(1+Ma)]\} \tag{3.6.6}$$

式中　$\bar{\omega} = \omega l/a$；

$C$、$D$——系数。

方程(3.6.4)的熵变化幅值的解具有行波的解式

$$\delta\bar{s} = E\exp(-i\bar{\omega}\bar{x}/Ma) \tag{3.6.7}$$

式中　$E$——系数。

为确定解(3.6.5)～(3.6.7)中的任意常数必须写出3个边界条件。

第一个边界条件由分段入口处（$\bar{x}=0$）燃气流量平衡方程求出，这时作如下假定：燃烧在这个截面上进行，而燃烧区的容积和燃烧时间可忽略不计。线性化的平衡方程表示式如下：



$$\delta\bar{p} = -\delta\bar{u} + (\bar{G}_{ок} + \psi)\delta\bar{G}_{ок} + (\bar{G}_{г} - \psi)\delta\bar{G}_{г} \tag{3.6.8}$$

式中　$\bar{G}_{ок} = G_{ок}/(G_{ок} + G_{г})$

$$\bar{G}_{г} = 1 - \bar{G}_{ок} = G_{г}/(G_{ок} + G_{г})$$

$\psi$——温度对组元混合比关系曲线的斜率

流路分段入口截面($\bar{x}=0$)上第二个边界条件用燃烧产物温度与氧化剂和燃料流量的关系式进行线性化的办法来确定：

$$\delta\bar{s} = \psi(\delta\bar{G}_{ок} - \delta\bar{G}_{г}) - \frac{\kappa-1}{\kappa}\delta\bar{p} \tag{3.6.9}$$

用线性化了的通过喷嘴(局部阻力)的燃气流量方程作为第三个边界条件——流路分段出口处($\bar{x}=1$)的条件

$$\left(\frac{\kappa-1}{2\kappa} + \varepsilon\right)\delta\bar{p} = \delta\bar{u} - \frac{1}{2}\delta\bar{s} + \varepsilon\delta\bar{p}_{м.с} \tag{3.6.10}$$

式中　$\varepsilon$——局部阻力的流量特性系数，见公式(3.2.7)；

$\delta\bar{p}_{м.с}$——局部阻力后的压力变化幅值。

把解式(3.6.5)～(3.6.7)代入边界条件(3.6.8)～(3.6.10)，即可求出系数$C$、$D$和$E$。

对于气流考虑到折算波阻$\alpha = \rho ua/p = \kappa Ma$，求得确定流路分段轴线上任意点的压力变化幅值的解，

$$\delta\bar{p}(\bar{x}) = \frac{\kappa Ma}{D}\left(\left\{\frac{\kappa-1}{2}Ma\exp\left(\frac{-i\bar{\omega}}{Ma}\right) - \left[1 + \left(\frac{\kappa-1}{2\kappa} + \varepsilon\right)\kappa Ma\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\exp\left(\frac{i\bar{\omega}}{1-Ma}\right)\right\}[(\bar{G}_{ок} + \psi)\delta\bar{G}_{ок} + (\bar{G}_{г} - \psi)\delta\bar{G}_{г}]\right.$$

$$+ \frac{\psi}{2}(1-\kappa Ma)\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}}{Ma}\right)(\delta\bar{G}_{ок} - \delta\bar{G}_{г}) + (1-\kappa Ma)$$

$$\left.\times\varepsilon\delta\bar{p}_{м.с}\right)\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}\bar{x}}{1+Ma}\right) - \frac{\kappa Ma}{D}\left(\left\{\frac{\kappa-1}{2}Ma\right.\right.$$

$$\times\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}}{Ma}\right)+\left[1-\left(\frac{\kappa-1}{2\kappa}+\varepsilon\right)\kappa Ma\right]\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}}{1+Ma}\right)\Big\}$$

$$\times[(\bar{G}_{\text{ок}}+\psi)\delta\bar{G}_{\text{ок}}+(\bar{G}_{\text{г}}-\psi)\delta\bar{G}_{\text{г}}]-\frac{\psi}{2}(1+\kappa Ma)$$

$$\times\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}}{Ma}\right)(\delta\bar{G}_{\text{ок}}-\delta\bar{G}_{\text{г}})+(1+\kappa Ma)\varepsilon\delta\bar{p}_{\text{м.с}}\Big)$$

$$\times\exp\left(\frac{i\bar{\omega}\bar{x}}{1-Ma}\right) \qquad (3.6.11)$$

$$D=(\kappa-1)Ma\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}}{Ma}\right)+\left[1-\left(\frac{\kappa-1}{2\kappa}+\varepsilon\right)\kappa Ma\right]$$

$$\times(1-\kappa Ma)\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}}{1+Ma}\right)-\left[1+\left(\frac{\kappa-1}{2\kappa}+\varepsilon\right)\kappa Ma\right]$$

$$\times(1+\kappa Ma)\exp\left(\frac{i\bar{\omega}}{1-Ma}\right)$$

流路$\bar{x}$坐标上任意截面的温度变化幅值由下面的解求得

$$\delta\bar{T}(\bar{x})=\psi(\delta\bar{G}_{\text{ок}}-\delta\bar{G}_{\text{г}})\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}\bar{x}}{Ma}\right)-\frac{\kappa-1}{\kappa}$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{i\bar{\omega}\bar{x}}{Ma}\right)\delta\bar{p}(0)-\delta\bar{p}(\bar{x})\right] \qquad (3.6.12)$$

解(3.6.11)和(3.6.12)在相当宽的频率范围内描述了具有熵波的视作为分布参数系统的气路的动态特性。频率范围的限制决定于达到一定的频率水平后熵波耗散的影响[6]，也决定于高频率时不仅必须考虑纵向声学振荡。当气流内出现熵波时流体力学方程解要改变，流路幅相频率特性曲线的形状也要发生改变。

有熵波的非稳态流动的理论模型已被专门进行的试验[6,7]结果所证实，试验装置有圆柱形流路并有空气流。在流路入口处激发起流量和温度的振荡(即熵波)，用混合装置在流路内形成运动，



通过该装置将两种不同温度(300和780K)的空气流供入到流路内并进行混合。借助于节流脉动器在所研究流路的入口，在供应冷空气的导管内使流过混合装置的流量产生谐波振荡，气体是借助于该混合装置供应到流路的。空气是通过大量管道供入的，对这些管道始终保证超声速压降，以消除流路内压力振荡对通过混合装置的气体流量的影响。用小惯性的感应式仪表测量栅网前冷气的压力脉动($\delta p_{\text{x}}=\delta G_{\text{г}}$)和流路长度上一些截面上的压力脉动。

有熵波的流路在其末端附近截面处(总长为$L=1.5$m时$x=1.3$m)的试验结果(小圆点)以幅频特性和相频特性曲线的形式示于图3.16上。图上还列出了按式(3.6.11)计算的理论特性曲线2。

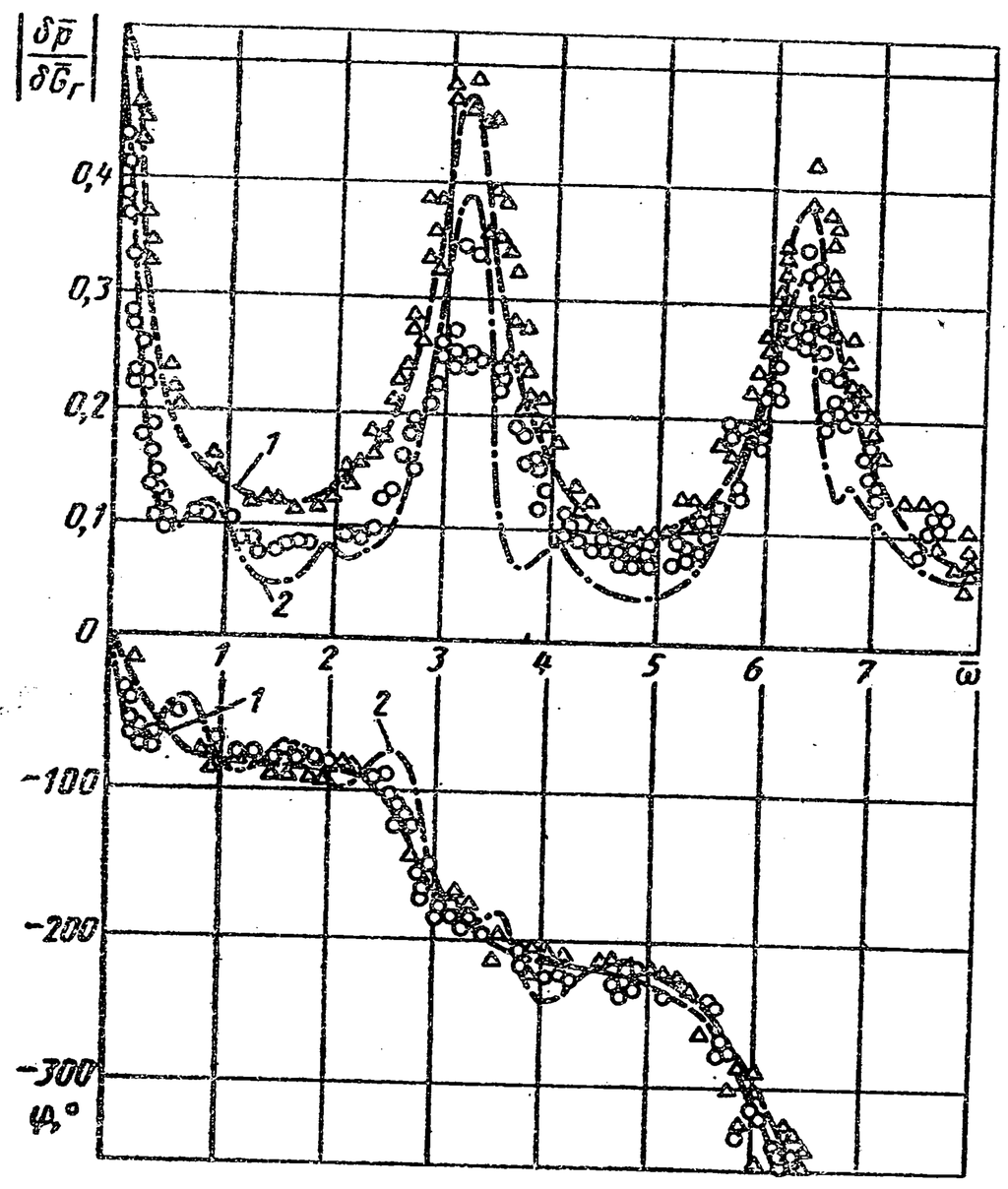



图3.16 气路频率特性曲线

1—无熵波流路的理论特性曲线；
2—有熵波流路的理论特性曲线；
△—无熵波流路的试验数据；
○—有熵波流路的试验数据。

理论特性与试验数据进行比较后表明，在无量纲频率$\varpi=\omega L/a$从0到1.5的范围内理论关系式(3.6.11)经试验证实是完全令人满意的。当$\varpi>1.5$时试验数据与流路内绝热过程的特性曲线已不太吻合，尤其是不随着《波》移动(在相位特性曲线上特别明显)，而是沿着某一条中间的比较平滑的曲线移动。当$\varpi>1.5$时试验数据与理论数据存在着差异，其原因可用熵波的耗散来解释，使计算方法稍微复杂化[6]以后，熵波的耗散是可以计算的。

图3.16上列出了无熵波(向流道只供入冷空气时)同一流路的试验数据(小三角点)和计算的声学特性曲线1。试验数据与理论特性令人满意地完全吻合，证明所采用的试验方法是有效的。

在遵守条件为$\varpi=\omega L/a\ll 1$的低频区，可忽略声学效应，就是说对速度和压力振荡而言可不考虑参数的分布性[28、30]。通过流路的特征时间声学上为$\tau_{a\kappa}=L/a$而热力学上为$\tau_1=L/u$，如果这两个特征时间之比决定于表达式$\tau_{a\kappa}/\tau_1=u/a=Ma$，而$Ma<1$，那么虽然忽略声学效应，但对熵波而言参数的分布性是不能忽略的。取$Ma\ll 1,\varpi\ll 1$，假定$\bar{x}=1$，并把方程(3.6.11)中的指数项展开成级数：

$$\exp(\pm i\varpi)=\exp(\pm i\omega L/a)\approx 1\pm i\omega L/a$$

就可求出将流路中压力变化幅值与外部参数变化量联系在一起的简化方程

$$\begin{aligned}&\{i\omega\tau_1/\kappa-[(\kappa-1)/(2\kappa)][1-\exp(-i\omega\tau_1)]+1-\varepsilon\}\delta\bar{p}\\&=\bar{G}_{o\kappa}\delta\bar{G}_{o\kappa}+\bar{G}_{\Gamma}\delta\bar{G}_{\Gamma}+\psi[1-0,5\exp(-i\omega\tau_1)]\\&(\delta\bar{G}_{o\kappa}-\delta\bar{G}_{\Gamma})+\varepsilon\delta\bar{p}_{M.c}\end{aligned}\qquad(3.6.13)$$

在推导方程(3.6.13)时把确定流路内气柱惯性影响的一些项当作小项忽略了$i\omega\rho uL/a=i\omega\kappa\tau_1 Ma^2$，这样在简化方程中流路始端的压力变化幅值$\delta\bar{p}(0)$和流路终端的变化幅值$\delta\bar{p}(1)$是相符的。方程(3.6.13)与前面用另一种方法得出的流路分段方程(3.2.8)



是完全一致的，如果其中取$\tau_{\Gamma}=0$，$\tau=\tau_1$，代入它的周期特解，并考虑到$\bar{G}_{o\kappa}=K_m/(K_m+1)$和 $\bar{G}_{\Gamma}=1/(K_m+1)$的话。

### 3.6.2 具有不等温气体流动的流路分段方程解的矩阵表示式

在第二章中为了描述流路分段内液体参数的强迫振荡利用了矩阵表示式作为四端网络方程。对于不等温气体流动时的强迫振荡利用矩阵表示式也是很方便的。特别是，在最简单的边界条件情况下即入口和出口处为开端时流体力学的线性化方程(3.6.2)～(3.6.4)具有如下的周期解[6,7]：

$$\delta\bar{u}(0)=\frac{1}{D}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)+\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right]\delta\bar{p}(0)$$

$$-\frac{2}{D}\delta\bar{p}(1)$$

$$\delta\bar{u}(1)=\frac{2}{D}\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\delta\bar{p}(0)$$

$$-\frac{1}{D}\times\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)+\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right]\delta\bar{p}(1)$$

$$\delta\bar{T}(1)=-\frac{\kappa-1}{\kappa}\exp\left(-\frac{i\varpi}{Ma}\right)\delta\bar{p}(0)+\frac{\kappa-1}{\kappa}\delta\bar{p}(1)$$

$$-\exp\left(-\frac{i\varpi}{Ma}\right)\delta\bar{T}(0)\qquad(3.6.14)$$

式中 $D=a\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)-\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right]$

式(3.6.14)的3个方程联系了6个变量，也即为Y-参数六极

网络方程，该方程可方便地表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}(0)\\ \delta\bar{u}(1)\\ \delta\bar{T}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{D}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)+\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right] & -\frac{2}{D} & 0\\ \frac{2}{D}\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right) & -\frac{1}{D}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)+\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right] & 0\\ -\frac{\kappa-1}{\kappa}\exp\left(-\frac{i\varpi}{Ma}\right) & \frac{\kappa-1}{\kappa} & \exp\left(-\frac{i\varpi}{Ma}\right)\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\times\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{T}(0)\end{bmatrix}=\mathbf{Y}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{T}(0)\end{bmatrix}\qquad(3.6.15)$$

利用六极网络矩阵变换规则[7]，就可把具有不等温气体流动的流路分段的方程写成B-参数方程。

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(1)\\ \delta\bar{u}(1)\\ \delta\bar{T}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)+\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right]-\frac{a}{2}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)\right. & \\ -\frac{1}{2a}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)-\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right] & \frac{1}{2}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)\right.\\ \frac{\kappa-1}{2\kappa}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)+\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)-2\exp\left(-\frac{i\varpi}{Ma}\right)\right] & \end{bmatrix}\rightarrow$$



$$\rightarrow\begin{bmatrix}-\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right] & 0\\ +\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right] & 0\\ -\frac{a(\kappa-1)}{2\kappa}\left[\exp\left(\frac{i\varpi}{1-Ma}\right)-\exp\left(-\frac{i\varpi}{1+Ma}\right)\right] & \exp\left(-\frac{i\varpi}{Ma}\right)\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}\delta\bar{p}(0)\\ \delta\bar{u}(0)\\ \delta\bar{T}(0)\end{bmatrix}\qquad(3.6.16)$$

为了把气路的数学模型建成六极网络方程的矩阵形式，还要写出具有集中参数元件的方程。

对于被描述的六极网络元件中的串联环节在第$i$和$(i+1)$个元件的接头处必须遵守如下条件：

$\delta\bar{u}_{i-1}(1)=\delta\bar{u}_i(0)$；$\delta\bar{p}_{i-1}(1)=\delta\bar{p}_i(0)$和$\delta\bar{T}_{i-1}(1)=\delta\bar{T}_i(0)$

利用这些条件，并像第2.8节对四端网络所做的那样，将A-参数方程或B-参数方程的元件矩阵连乘，就可得出整个流路的数学模型。

当不等温的气体流动时，在有许多分支的系统中，对系统的节点(分支)也要利用类似于第2.8节所述的办法，只是除了利用不等温流动的流量平衡方程外，还要利用节点处的能量平衡方程[7]。

# 第四章　涡轮泵动态特性

## 4.1 涡 轮 方 程

涡轮的功率方程

$$N_T = L_{a\text{д}} G_T \eta_T \qquad (4.1.1)$$

既是描述涡轮静态工作又是描述动态工作的基本关系式，

式中　$L_{a\text{д}} = c_1^2/2$——涡轮的绝热功；

$c_1$——燃气从涡轮喷嘴流出的绝对速度；

$G_T$——通过涡轮的燃气流量；

$\eta_T$——涡轮效率。

绝热功由下式确定：

$$L_{a\text{д}} = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_T \left[1 - \left(\frac{p_{\text{газ}}}{p_{\text{гг}}}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}\right] \qquad (4.1.2)$$

而通过涡轮的燃气流量（在亚临界流动状态下）则由下式确定：

$$G_T = \mu F_T \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p_{\text{гг}}^2}{RT_T}\left[\left(\frac{p_c}{p_{\text{гг}}}\right)^{2/\kappa} - \left(\frac{p_c}{p_{\text{гг}}}\right)^{(\kappa+1)/\kappa}\right]} \qquad (4.1.3)$$

式中　$T_T$—— 涡轮前燃气温度；

$p_c$——涡轮喷嘴切口处压力，与涡轮反力度$\rho_T$有关，并由下式确定：

$$p_c = p_{\text{гг}}\left[\rho_T + (1-\rho_T)(p_{\text{газ}}/p_{\text{гг}})^{(\kappa-1)/\kappa}\right]^{\kappa/(\kappa-1)}$$



$$(4.1.4)$$

涡轮反力度通常由半经验公式确定：

$$\rho_T = a + bu/c_1 + d(u/c_1)^2 \qquad (4.1.5)$$

式中　$u$——叶片圆周速度；$a$、$b$、$d$——常数。

对式（4.1.1）～（4.1.3）进行线性化，并把参数的变化量化成无量纲形式后，即得如下线性方程：

涡轮的功率

$$\delta N_T = \delta L_{a\text{д}} + \delta G_T + \delta \eta_T \qquad (4.1.6)$$

燃气的绝热功

$$\delta L_{a\text{д}} = 2\delta c_1 = \delta T_T - \beta_T(\delta p_{\text{газ}} - \delta p_{\text{гг}}) \qquad (4.1.7)$$

通过涡轮的燃气流量

$$\delta G_T = \delta p_{\text{гг}} - \frac{1}{2}\delta T_T - \varepsilon_T(\delta p_c - \delta p_{\text{гг}}), \qquad (4,1.8)$$

式中

$$\beta_T = \frac{(\kappa-1)(p_{\text{газ}}/p_{\text{гг}})^{(\kappa-1)/\kappa}}{\kappa\left[1-(p_{\text{газ}}/p_{\text{гг}})^{(\kappa-1)/\kappa}\right]} \qquad (4.1.9)$$

而系数$\varepsilon_T$则按公式（3.2.7）求出（见图3.3）。在不同的燃气绝热指数$\kappa$值下从涡轮喷嘴流出的速度系数$\beta_T$与$p_{\text{газ}}/p_{\text{гг}}$的关系曲线列于图4.1上。

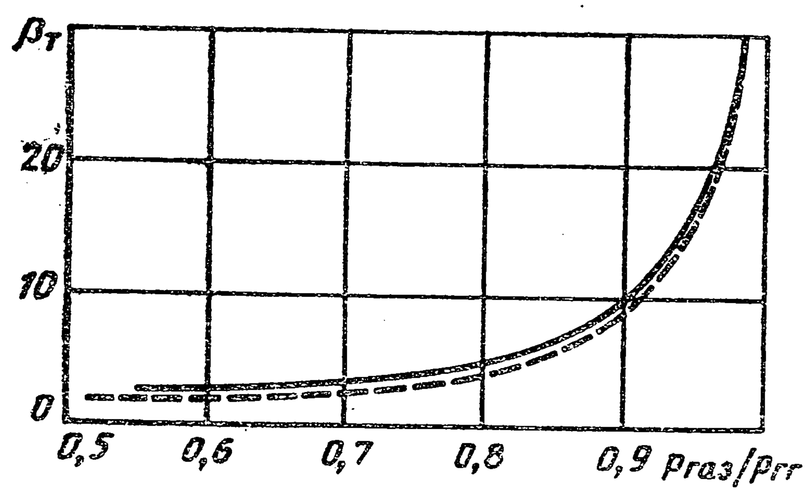



图4.1　速度系数$\beta_T$与$p_{\text{газ}}/p_{\text{гг}}$的关系曲线

——$\kappa=1.08$；- - - -$\kappa=1.5$。

燃气在临界流动状态和超临界流动状态下系数$\beta_T$取等于零。将式（4.1.5）代入式（4.1.4），并对此式进行线性化后可得：

$$\delta p_c = r_1(\delta n - \delta c_1) + r_2\delta p_{газ} + r_3\delta p_{тг} \qquad (4.1.10)$$

式中

$$r_1 = \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)\bar{b}\rho_T\left[1-(p_{газ}/p^{тг})^{(\kappa-1)/\kappa}\right]$$

$$\Big/\left[\rho_T + (1-\rho_T)\times(p_{газ}/p_{тг})^{(\kappa-1)/\kappa}\right]$$

$$r_2 = (1-\rho_T)(p_{газ}/p_{тг})^{(\kappa-1)/\kappa}$$

$$\Big/\left[\rho_T + (1-\rho_T)(p_{газ}/p_{тг})^{(\kappa-1)\kappa/\kappa}\right]$$

$$r_3 = \rho_T\Big/\left[\rho_T + (1-\rho_T)(p_{газ}/p_{тг})^{(\kappa-1)/\kappa}\right]$$

$$\bar{b} = [b(u/c_1) + 2d(u/c_1)^2]/\rho_T \qquad (4.1.11)$$

$\delta n = \delta u$——涡轮泵转速的相对变化量。

涡轮喷嘴切口处压力的变化量$\delta p_c$为一中间参数，把来自式（4.1.10）的$\delta p_c$代入方程式（4.1.8）后即可把它从式（4.1.8）中消去。于是可得另一形式的流量方程：

$$\delta G_T = \left[1-\varepsilon_T\left(r_3 - \frac{1}{2}\beta_T r_1 - 1\right)\right]\delta p_{тг}$$

$$-\varepsilon_T\left(r_2 + \frac{1}{2}\beta_T r_1\right)\delta p_{газ} - \frac{1}{2}(1-\varepsilon_T r_1)\delta T_T - \varepsilon_T r_1\delta n \qquad (4.1.12)$$

涡轮效率可从以下两个公式中选取一个：

$$\eta_T = f(u/c_1) \text{或} \eta_T = f_2(\pi_T, n/\sqrt{T_T})$$



式中 $\pi_T = p_{тг}/p_{газ}$

对这些关系式进行线性化后就可得出下列涡轮效率变化量的关系式：

$$\delta\eta_T = \psi_{c_1}(\delta u - \delta c_1)$$

$$= \psi_{c_1}\left(\delta n + \frac{1}{2}\beta_T\delta p_{газ} - \frac{1}{2}\beta_T\delta p_{тг} - \frac{1}{2}\delta T_T\right) \qquad (4.1.13)$$

$$\delta\eta_T = \psi_p(\delta p_{тг} - \delta p_{газ}) + \psi_n\left(\delta n - \frac{1}{2}\delta T_T\right) \qquad (4.1.14)$$

式中

$$\psi_{c_1} = \frac{u/c_1}{\eta_T}\cdot\frac{\partial\eta_T}{\partial(u/c_1)}$$

$$\psi_p = \frac{\pi_T}{\eta_T}\cdot\frac{\partial\eta_T}{\partial\pi_T}$$

$$\psi_n = \frac{n/\sqrt{T_T}}{\eta_T}\cdot\frac{\partial\eta_T}{\partial(n/\sqrt{T_T})}$$

把式（4.1.7）、（4.1.8）、（4.1.14）代入涡轮功率方程式（4.1.6）后，可得

$$\delta N_T = \frac{1}{2}(1-\psi_n)\delta T_T + (1+\varepsilon_T+\psi_p+\beta_T)\delta p_{тг}$$

$$-(\varepsilon_T+\psi_p+\beta_T)\delta p_{газ} + \psi_n\delta_n \qquad (4.1.15)$$

如果涡轮具有高的反力度，以式（4.1.12）代替式（4.1.8）代入式（4.1.6），则可得考虑到反力度的类似方程。

以上所列涡轮功率方程适用于如下情况，即燃气在涡轮集合器内的停留时间可以忽略不计时，或燃气沿集合器整个圆周引入

时。当必须考虑燃气发生器出口的分布性时，应改变燃气的绝热功（流动速度）方程（4.1.7）和燃气的流量方程（4.1.8）。

经涡轮喷嘴环的燃气流量方程已于第3.5节中推导出。用同方程（4.1.7）类似的方法可以写出通过长度为$dx$的喷嘴环微元段的燃气流绝热功方程（已为线性化形式）：

$$d\delta L_{ад}(x)=\delta T(x)\,dx/l_{кол}-\beta_т(\delta p_{газ}-\delta p_{гг})dx/l_{кол} \tag{4.1.16}$$

式中 $\delta T(x)$——坐标$x$截面上的温度变化量；

$l_{кол}$——喷嘴环的集合器长度。

坐标$x$从喷嘴环集合器入口截面算起（见图3.13）。喷嘴环高度为常值，微元流的截面积与$dx/l_{кол}$成正比。

考虑到，按所取的条件（见第3.5节）每一瞬间沿集合器的压力为常量，再利用式（3.1.16）和（3.5.5）求出温度变化量$\delta T_т$，并对方程（4.1.16）沿$x$从0到$l_{кол}$进行积分，得涡轮叶轮燃气平均绝热功变化幅值的最后关系式：

$$\delta\bar{L}_{ад}=\frac{\delta s_{кол.вх}}{i\omega\tau_{кол}+1}-\beta_т(\delta\bar{p}_{газ}-\delta\bar{p}_{гг})+\frac{\kappa-1}{\kappa}\delta\bar{p}_{гг} \tag{4.1.17}$$

考虑到热力学关系式（3.5.5），上式可用另一些变量来改写：

$$\delta\bar{L}_{ад}=2\delta\bar{c}_1-\frac{\delta\bar{T}_т-\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\delta\bar{p}_{гг}}{i\omega\tau_{кол}+1}$$

$$-\beta_т(\delta\bar{p}_{газ}-\delta\bar{p}_{гг}+\frac{\kappa-1}{\kappa}\delta\bar{p}_{гг}) \tag{4.1.18}$$

把式（4.1.18）代入方程（4.1.6）和（4.1.13），即可得出考虑到燃气发生器出口分布性的涡轮功率变化幅值的关系式：



$$\delta\bar{N}_т=\left[1+\varepsilon_т-\frac{\kappa-1}{2\kappa}+\left(1-\frac{1}{2}\psi_{c_1}\right)\left(\beta_т+\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\right]\delta\bar{p}_{гг}$$

$$-\left[\varepsilon_т+\left(1-\frac{1}{2}\psi_{c_1}\right)\beta_т\right]\delta\bar{p}_{газ}+\psi_{c_1}\delta\bar{n}$$

$$-\frac{(\psi_{c_1}-1)\left(\delta\bar{T}_т-\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\delta\bar{p}_{гг}\right)}{2(i\omega\tau_{кол}+1)} \tag{4.1.19}$$

在燃气发生器分布出口的情况下，涡轮功率变化量方程已是微分方程，且方程内含有涡轮功率变化量的导数。

## 4.2 离心泵方程

在涡轮泵的方程中包括泵轴上的力矩。在静态情况下此力矩由方程（2.1.23）右边的第一项确定，而此式的积分项表征泵内液体的惯性。用同式（2.1.29）类推的方法变换方程（2.1.23）中的积分项：

$$\int_{s_1}^{s_2}rF\left(\frac{du}{dt}-\sin\gamma\frac{d\omega}{dt}\right)ds$$

$$=2\pi\frac{dn}{dt}\int_{s_1}^{s_2}r^2F\,ds-\frac{dG}{dt}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\sqrt{1+ctg^2\beta}}{\rho}r\sin\gamma\,ds \tag{4.2.1}$$

式中 $s_1$、$s_2$——泵叶轮过流部分入口和出口坐标。

对式（4.2.1）进行线性化和置换后泵轴的力矩方程变为下式：

$$\delta M_н=\delta M_{н.ст}+\tau_n^{(M)}\frac{d\delta_n}{dt}-\tau_н^{(M)}\frac{d\delta_G}{dt} \tag{4.2.2}$$

式中 $M_н$——泵轴上的力矩；

$M_{н.ст}$——静态下泵轴上的力矩。

$$\tau_{n}^{(M)}=\frac{n}{M_H}2\pi\rho\int_{s_1}^{s_2}r^2F\mathrm{d}s \tag{4.2.3}$$

$$\tau_{H}^{(M)}=\frac{G}{M_H}\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\beta}\cdot r\sin\gamma\mathrm{d}s \tag{4.2.4}$$

变化量$\delta M_{H.CT}$与其它参数之间的关系取决于原始数据（泵的功率特性）的给定方法。如果泵的力矩特性$M_{H.CT}=f(G,n)$用图表方式或经验公式给定，则求出工作点处特性线的斜率后，就可写出线性化的关系式：

$$\delta M_{H.CT}=\frac{G}{M_H}\cdot\frac{\partial M_H}{\partial G}\delta G+\frac{n}{M_H}\cdot\frac{\partial M_H}{\partial n}\delta n$$

$$=\psi_G^{(M)}\delta G+\psi_n^{(M)}\delta n \tag{4.2.5}$$

式中 $\psi_G^{(M)}=\frac{G}{M_H}\cdot\frac{\partial M_H}{\partial G}$，$\psi_n^{(M)}=\frac{n}{M_H}\cdot\frac{\partial M_H}{\partial n}$——分别为泵轴力矩与流量及转速关系曲线的斜率。

往往泵轴上力矩用功率来代替，这两参数量的关系可用简单的关系式来表示：

$$M_H=N_H/\omega=60N_H/(2\pi n)$$

式中 $\omega$——泵轴的角速度；

$N_H$——泵的功率。

上式进行线性化后得出如下无量纲变化量关系式：

$$\delta M_H=\delta N_H-\delta n \tag{4.2.6}$$

利用公式（4.2.6），就可把泵轴力矩变化量的线性化方程与泵功率线性化关系式（稳态情况下）联系起来

$$\delta N_H=\frac{G}{N_H}\frac{\partial N_H}{\partial G}\delta G+\frac{n}{N_H}\frac{\partial N_H}{\partial n}\delta n=\psi_G^{(N)}\delta G+\psi_n^{(N)}\delta n \tag{4.2.7}$$



式中 $\psi_G^{(N)}=\frac{G}{N_H}\cdot\frac{\partial N_H}{\partial G}$，$\psi_n^{(N)}=\frac{n}{N_H}\cdot\frac{\partial N_H}{\partial n}$——分别为泵功率与流量及转速关系曲线的斜率。

如果泵的效率$\eta_H=\eta_H(G,n)$已给定，则必须利用联系泵功率与效率的公式：

$$N_H=\Delta p_H G/(\rho\eta_H) \tag{4.2.8}$$

式中 $\Delta p_H$——泵产生的压头；

$\rho$——液体密度。

对式（4.2.8）进行线性化后可得

$$\delta N_H=\delta\Delta p_H+\delta G-\delta\eta_H \tag{4.2.9}$$

式中 $\delta\Delta p_H,\delta\eta_H$——分别为泵压头及泵效率的无量纲变化量。

用关系式（2.1.31）把泵压头的变化量与流量及转速的变化量结合在一起。当把压头变化量代入方程（4.2.2)时必须舍弃式（2.1.31）中最后两项惯性项，该两项在推导关系式（4.2.2)时已考虑了。在求出工作点上效率的斜率后，必须对确定效率的关系式（代数式或图形曲线）进行线性化处理：

$$\delta\eta_H=\frac{G}{\eta_H}\cdot\frac{\partial\eta_H}{\partial G}\delta G+\frac{n}{\eta_H}\cdot\frac{\partial\eta_H}{\partial n}\delta n=\psi_G^{(\eta)}\delta G+\psi_n^{(\eta)}\delta n \tag{4.2.10}$$

式中 $\psi_G^{(\eta)}=\frac{G}{\eta_H}\cdot\frac{\partial\eta_H}{\partial G}$，$\psi_n^{(\eta)}=\frac{n}{\eta_H}\cdot\frac{\partial\eta_H}{\partial n}$——分别为效率与流量及转速关系曲线的斜率。

把式（2.1.31）及（4.2.10）代入方程（4.2.9），可得

$$\delta N_H=(\psi_G-\psi_G^{(\eta)}+1)\delta G+(\psi_n-\psi^{(\eta)})\delta n \tag{4.2.11}$$

把式（4.2.7）或（4.2.11）代入式（4.2.6），就可确定泵轴力矩的变化量。

在推导泵的压头特性及泵轴力矩的动态方程时未注意到气蚀

现象，气蚀可能发生在诱导轮内或叶轮进口边缘处[21,24]。现有的确定泵内气蚀区参数的方法[23]都是半经验性质的，并需要进一步用试验来检验。因此利用它们来计算液体火箭发动机动态特性目前实际上是不可能的。

## 4.3 涡轮泵方程

具有几台泵的装置，其旋转部分的动量矩方程是涡轮泵的基本方程：

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_{\mathrm{T}}-\sum_{i}M_{\mathrm{Hi}} \tag{4.3.1}$$

式中 $J$——涡轮泵旋转部分的转动惯量；

$\omega$——轴的角速度；

$M_{\mathrm{Hi}}$——第$i$台泵轴上的力矩。

涡轮发出的力矩与其功率有关：

$$M_{\mathrm{T}}=N_{\mathrm{T}}/\omega=60N_{\mathrm{T}}/(2\pi n) \tag{4.3.2}$$

同样地对泵来说：

$$M_{\mathrm{Hi}}=60N_{\mathrm{Hi}}/(2\pi n) \tag{4.3.3}$$

把式（4.3.2）和（4.3.3）代入方程（4.3.1)并对其进行线性化处理，即得

$$\frac{\pi^2Jn^2}{900N_{\mathrm{T}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}=\delta N_{\mathrm{T}}-\sum_{i}\frac{N_{\mathrm{Hi}}}{N_{\mathrm{T}}}\delta N_{\mathrm{Hi}} \tag{4.3.4}$$

对于第$i$台泵的功率可以用与压头特性类似的方法，并考虑式(4.2.2)、(4.2.6) 和 (4.2.7)，就可写出下面的线性化方程：

$$\delta N_{\mathrm{Hi}}=\psi_{\mathrm{Gi}}^{(\mathrm{N})}\delta_{\mathrm{Gi}}+\psi_{\mathrm{ni}}^{(\mathrm{N})}\delta n+\tau_{\mathrm{ni}}^{(\mathrm{M})}\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}-\tau_{\mathrm{Hi}}^{(\mathrm{M})}\frac{\mathrm{d}\delta_{\mathrm{Gi}}}{\mathrm{d}t} \tag{4.3.5}$$

式中

$$\psi_{\mathrm{Gi}}^{(\mathrm{N})}=\frac{G_i}{N_{\mathrm{Hi}}}\cdot\frac{\partial N_{\mathrm{Hi}}}{\partial G_{\mathrm{i}}}$$



$$\psi_{\mathrm{ni}}^{(\mathrm{N})}=\frac{n}{N_{\mathrm{Hi}}}\cdot\frac{\partial N_{\mathrm{Hi}}}{\partial n}$$

把式（4.1.15）及方程(4.3.5)代入涡轮泵的方程(4.3.4)，可得

$$\left(\frac{\pi^2Jn^2}{900N_{\mathrm{T}}}+\sum_{i}\frac{N_{\mathrm{Hi}}}{N_{\mathrm{T}}}\tau_{\mathrm{ni}}^{(\mathrm{M})}\right)\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\psi_{\mathrm{n}})\delta T_{\mathrm{T}}+(1-\varepsilon_{\mathrm{T}}+\psi_{\mathrm{p}}+\beta_{\mathrm{T}})\delta p_{\mathrm{r}\Gamma}$$

$$-(\varepsilon_{\mathrm{T}}+\psi_{\mathrm{p}}+\beta_{\mathrm{T}})\delta p_{\mathrm{газ}}-\sum_{i}\frac{N_{\mathrm{Hi}}}{N_{\mathrm{T}}}\left(\psi_{\mathrm{Gi}}^{(\mathrm{N})}\delta G_{\mathrm{i}}-\tau_{\mathrm{Hi}}^{(\mathrm{M})}\frac{\mathrm{d}\delta G_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$+\left(\psi_{\mathrm{n}}-\sum_{i}\frac{N_{\mathrm{Hi}}}{N_{\mathrm{T}}}\psi_{\mathrm{ni}}^{(\mathrm{N})}\right)\delta n \tag{4.3.6}$$

转速变化量导数$\delta\dot{n}$的系数与变化量$\delta n$的系数之比可确定涡轮泵的时间常数。此时间常数与运动部分的惯量及泵过流部分液体的惯性有关，也与涡轮泵的功率及涡轮和泵的特性曲线的斜度有关。

# 第五章　液压调节器动态特性

## 5.1　液压调节器非稳态过程的特点

液体火箭发动机自动控制系统中的调节器用于使发动机主要参数（即发动机工况）能保持给定的精度或按一定的规律变化。这些主要参数通常有推力(燃烧室压力)、燃烧室组元混合比、燃气发生器燃气温度及涡轮泵转速等。液体火箭发动机的调节系统可包含多个调节器，即它是多连通的[5]。

调节系统由调节对象（这里是指不带调节器的发动机）和调节器（或调节器组）组成。调节器通过调节机构对调节对象的工况产生作用，使它按一定的规律变化。采用液压调节器时，调节机构就是设置在发动机液路中的调节器的节流元件。节流元件的位置变化导致它的流阻发生变化，这样使原有的能量平衡关系受到破坏而转向新的平衡状态。

在调节系统中，利用感受调节对象工况参数对给定值的偏离的反馈系统来决定调节对象工况参数变化所需的方向和量值。反馈系统可保证控制系统执行程序装置或操作员发出的指令，或保持（稳定）住各参数的给定值。

在每个反馈系统中包含有测量被调参数偏离情况的敏感元件。在液压调节器中，采用膜片、波纹管、柱塞等作为敏感元件。将敏感元件所测得的参数同给定值进行比较、并根据比较结



果发出失调信号（调节修正量），该信号（直接地或经过放大器）传至执行机构。执行机构（在液压调节器中为柱塞、波纹管、分流阀）使调节（节流）机构运动，产生使调节对象减少失调的调节作用。

上述调节系统称为闭环系统，因为它借助反馈作用使调节对象总是处于调节器的监控下。由于外部干扰作用的影响以及调节对象本身参数的变化（老化、磨损等），在调节器保持被调参数为某个数值的稳态工况下，被调参数给定值与它的实际值之间可能会产生不一致。

当调节系统中有几个调节器时，不同的控制回路之间，例如液体火箭发动机的推力与组元混合比的控制回路之间就会产生相互影响的问题。

液体火箭发动机上所采用的液压调节器（如同涡轮泵那样）不是单纯的机械组件。液压调节器的各种特性（其中也包括动态特性）在很大程度上取决于流体动力学过程以及液体流动与机械组件运动间的相互作用。可能采用既有流体力学组件（节流装置及其传动机构），又有包含电子计算机在内的电气装置的混合式控制系统（参阅第七章）。

调节器可分为直接作用式和间接作用式两类。在直接作用式调节器中，敏感元件还同时起着改变（液压调节器）节流机构位置的执行元件的作用。在间接作用式调节器中，敏感元件与执行元件的功能是分开的，这使调节器的结构复杂，但使它的参数可在更大范围内变化。

图5.1所示为直接作用式流量调节器的原理图。改变节流装置1的位置，使控制阀4处的压降保持不变，从而保证流量为常值。当控制阀流通截面面积保持不变（液体密度也不变）时，恒定的压差保证了恒定的流量。

当飞行器控制系统对发动机工况进行调节时，借助传动机构改变控制阀的流通截面，使流量改变。如果由于某种原因，液体

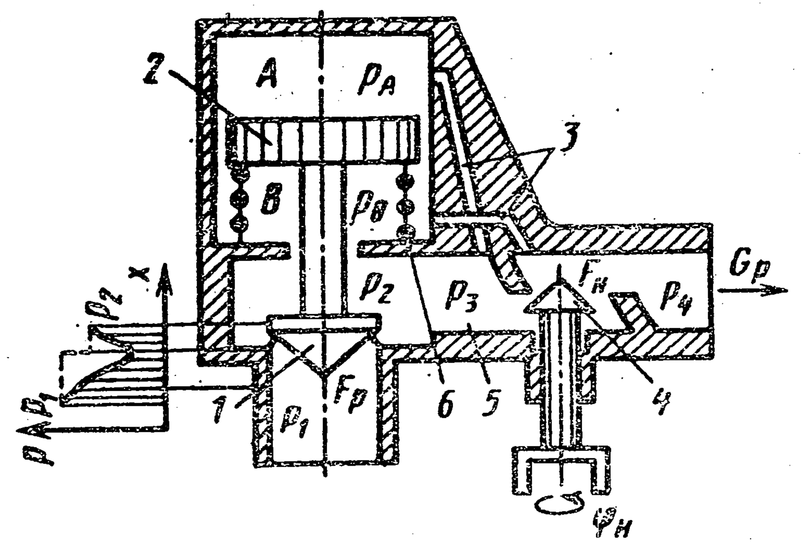



图5.1 直接作用式流量液压调节器示意图

1—节流装置； 2—柱塞；
3—反馈通道； 4—控制阀；
5—壳体； 6—弹簧。

流量（也意味着控制阀处的压差$p_3-p_4$）有变化时，则关于这个压差变化的信息就通过反馈通道3传至调节器的敏感元件——柱塞2。柱塞处压差$p_A-p_B$的变化破坏了作用在调节器运动部件上的力的平衡，柱塞移动，节流装置也随之移动，使通过调节器的液体流量发生变化。调节器的工作原理在于，对经过反馈通道传来的偏差信息，调节器运动部件回答以对被调参数所发生的偏差进行补偿的移动。例如，如果控制阀4处的压差（这也意味着流量）增大，节流装置对此的响应是在敏感元件—柱塞的推动下开始减少它的流通截面面积，以补偿所产生的偏差，也就是使流量减小（负反馈）。

利用弹簧6将调节器的敏感元件——柱塞2调整到设定的压降。在所研究的这个调节器中，由于它是直接作用式调节器，所以敏感元件和使节流装置移动的执行元件的功能都集中在同一个元件——活塞2上。

在间接作用式液压调节器中，由敏感元件（如膜片）控制着节流喷嘴型液流放大器、分流阀等[25]。放大器控制着进入执行元件（柱塞）的液流，使在执行元件上建立起一定的压力值。执行元件上压差的变化可由敏感元件测得，这种变化导致执行元件的移动，也就是使液流放大器中节流元件的位置发生变化，这样也就改变了进入执行元件的液体流量。因此，执行元件上的压力发生变化，这种变化再加上执行元件的位置变化以及节流装置位



置的相应变化，就产生了偏差的补偿作用——使流过调节器的液体流量产生变化。

为保证有效地调节发动机，调节器上应有足够大的压差。因压差关系到液压调节器调节过程的一个特性——在流过节流装置1（见图5.1）时产生的流体动力（射流反作用）对调节过程有重大影响。这个力与液流的速度头，也就是与节流元件处的压差成正比。

图5.1上，在节流装置1的侧面列出了沿着它的表面的压力分布曲线。在截面积最小（液体速度最大）处的压力低于节流装置出口处压力。液体作用于具有最大截面$F_{др}$的节流装置的合力可以表示为力$(p_1-p_2)F_{др}$和正比于速度头的流体动力之间的差值。流体动力正比于虚线下无阴影线的面积（参阅图5.1的曲线），并指向使节流装置关闭的方向，即与弹簧作用力相反的方向。流体动力（不同于压差所造成的力）就象弹簧产生的力那样，同节流装置的位置有关。但是它们的指向相反。

可以看到，在某些情况下节流机构的位移与流体动力（《流体动力刚性》）之间的耦合系数大于弹簧的相应刚性。由于在调节器运动部件的运动方程中这两个具有不同符号的项相叠加，因而包含有调节器运动部件坐标并决定着调节器差率的那一项的符号随之改变。如同后面将要指出的那样，调节器的差率，即表示被调参数与调节器负荷间关系的调节器特性曲线的斜率，在很大程度上决定着“发动机—调节器”系统的稳定性。差率的符号变化，也就是转向负的差率，很可能成为丧失稳定性的原因。

因此，流体动力以及它与节流装置位置的关系是调节器的重要特性。遗憾的是，由于液体在调节器流道内的流动图形非常复杂，有急剧的方向变化、流动分离、回流区等，同时，节流装置的结构方案也是各不相同，因此，只是在少数情况下能用计算方法求出流体动力[25,31]。大多数情况下，只能用间接方法来求出流体动力，例如将调节器在不同工况下的试验特性与计算特性进

行比较等。

液压调节器的另一重要特点是附加的液体质量对调节器运动部件的位移有很大影响。为使调节器尽量做得重量轻和体积小，各通道的流通截面积都较小，这时，上述影响就特别明显。例如，在调节器运动部件移动时，液体就被挤入（或吸入）反馈通道3(见图5.1)。这些通道的截面积通常要比柱塞(膜片、波纹管)的面积小很多倍，由于面积的巨大相差，通道内液体的速度和加速度要比柱塞的速度和加速度大很多倍。因而，连接通道内液体的惯性效应以及同壁面的摩擦显得很突出。如本节后面将要指出的那样，需考虑成附加于运动柱塞质量的液体质量为$m_{пр}=m_к\times(F_п/F_к)^2$，式中 $m_к$——通道内液体的实际质量；$F_п$、$F_к$——柱塞面积及通道的流通面积。

当柱塞直径$D_п=40mm$及通道直径$D_к=4mm$时，$(F_п/F_к)^2=(D_п/D_к)^4=10^4$，也就是说，附加于柱塞的10kg质量恰好是通道内的1g液体。在直径为$D_к=4mm$的通道内，密度为$\rho=10^3 kg/m^3$的1g液体占有的长度不大(80mm)。因而，即使流通截面积不大，通道长度较短，也会使调节器运动部件的质量有很大的增加。附加于调节器运动部件的液体质量常常会比运动的金属零件大很多倍。

对于摩擦损失，也有类似情况。在建立调节器运动部件的方程时，必须考虑调节器内所有充满液体通道的流体动力、液体的附加质量以及它同壁面的摩擦。

## 5.2 调节器的数学模型

现以方案上较简单的调节器——直接作用式调节器为例进行研究。直接作用式流量调节器(见图5.1)，以及类似的压力调节器和压力比（流量比）调节器，由带弹簧的柱塞2（膜片，波纹管）



以及通过连杆机械地连接在一起的节流装置1组成。敏感元件在调节器壳体内移动，它的平衡状态由弹簧6的作用力、$A$腔和$B$腔间的压差$(p_A-p_B)$以及作用在节流装置1上的流体动力所决定。在运动部件移动时，由于反馈通道3内的惯性力和摩擦力的作用，$A$腔和$B$腔内的压力不等于与反馈通道3相邻的调节器流道截面处的压力$p_3$和$p_4$。

液体在反馈通道内的流动状态决定于$A$腔和$B$腔的质量平衡。如果忽略柱塞2处的间隙的泄漏，则进入$A$腔的液体流量可由连续方程来确定，在该方程中考虑了腔内液体的压缩性

$$\frac{\rho V_A}{K_ж}\cdot\frac{dp_A}{dt}-\rho F_п\frac{dx}{dt}=G_A \qquad (5.2.1)$$

式中 $V_A$——$A$腔的容积；$K_ж$——液体的容积弹性模量；$x$——调节器运动部件的位置坐标；$G_A$——沿反馈通道进入$A$腔的液体的质量流量。

将方程（5.2.1）线性化，并变换成无量纲变化量，得

$$\frac{\rho V_A p_A}{K_ж G}\cdot\frac{d\delta p_A}{dt}-\frac{\rho F_п h}{G}\cdot\frac{d\delta x}{dt}=\delta G_A \qquad (5.2.2)$$

式中 $\delta p_A$——$A$腔压力的无量纲变化量；

$\delta x$——运动部件的位移相对于它们的行程$h$的无量纲变化量；

$\delta G_A$——进入$A$腔的液体流量相对于标定流量$G$的无量纲变化量。

以同样方式还可获得$B$腔的线性化的质量平衡方程：

$$\frac{\rho V_B p_B}{K_ж G}\cdot\frac{d\delta p_B}{dt}+\frac{\rho F_п h}{G}\cdot\frac{d\delta x}{dt}=-\delta G_B \qquad (5.2.3)$$

式中所有符号的意义与(5.2.2)式中的相同，仅将下标A更换为B。

考虑到液体不可压缩以及液体的惯性和壁面摩擦造成的压力

损失，可认为反馈回路连接通道内的液体流动具有层流、准稳态流性质。利用关系式(2.1.10)和(2.1.16)，取末项 $\delta(\mu F)=0$ 并去掉系数1/2，因为对于层流来说，流量与压降间有线性关系，故相应地其系数为1，于是对通往$A$腔的通道求得

$$\delta p_3-\delta p_A=\frac{\Delta p_A}{p_A}\delta G_A+\frac{GL_A}{p_A F_A}\frac{\mathrm{d}\delta G_A}{\mathrm{d}t} \qquad (5.2.4)$$

式中 $\delta p_3$——调节器控制阀4前压力的无量纲变化量；

$\Delta p_A$——最大液体流量下在通道内的最大压降；

$L_A$，$F_A$——通往$A$腔的反馈通道的长度及流通截面积。

同样地，对于通往$B$腔的通道有

$$\delta p_B-\delta p_4=\frac{\Delta p_B}{p_B}\delta G_B+\frac{GL_B}{p_B F_B}\frac{\mathrm{d}\delta G_B}{\mathrm{d}t} \qquad (5.2.5)$$

式中所有符号的意义与(5.2.4)式的相同，仅将下标A更换为B。

方程(5.2.4)和(5.2.5)只适于层流，因为在紊流下，摩擦压力损失与流量有平方关系，对通往盲腔（即无固定流路的容腔）的通道，这种关系具有典型的非线性，不能线性化[5]。当变化量较小时，可采用调和平衡法[5]，但它只适用于强迫振荡或自激振荡的分析。在计算过渡过程时，可利用(5.2.4)和(5.2.5)式来作为第一次近似，这时给式中引入若干个摩擦压力损失的有效值，或将右端第一项用平方项$\zeta_A G(\delta G_A)^2/p_A$和$\zeta_B G(\delta G_B)^2/p_B$来替换，其中$\zeta_A$、$\zeta_B$分别为通往A腔和B腔的通道的摩擦损失系数。如果将(5.2.2)式的$\delta G_A$代入方程(5.2.4)，将(5.2.3)式的$\delta G_B$代入方程(5.2.5)，则可获得振荡元件方程，它们的自振频率由调节器腔内液体的压缩性及连接通道内液柱的惯性所确定。

方程(5.2.2)～(5.2.5)将控制阀4(图5.1)前后的调节器流路截面处的压力变化量同柱塞2两侧的压力变化量联系起来。柱塞上的压降变化破坏了作用在调节器运动部件上的力的平衡，使它们产生可用下列力学方程来描述的运动



$$m_{\text{п.ч}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_{\text{тр}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+K_{\text{пружх}}=F_{\text{п}}(p_B-p_A)+R_0+R_{\text{г.д}} \qquad (5.2.6)$$

式中 $m_{\text{п.ч}}$——运动部件的质量；

$a_{\text{тр}}$——运动部件的摩擦系数；

$K_{\text{пруж}}$——弹簧刚度；

$R_0$——($x=0$时)弹簧预紧力；

$R_{\text{г.д}}$——由液体作用于调节器节流装置的流体动力。

将方程(5.2.6)线性化并采用无量纲变化量，可得到

$$\frac{m_{\text{п.ч}}}{K_{\text{пруж}}}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\delta x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a_{\text{тр}}}{K_{\text{пруж}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t}+\delta x=\frac{F_{\text{п}}p_B}{K_{\text{пруж}}h}\delta p_B-\frac{F_{\text{п}}p_A}{K_{\text{пруж}}h}\delta p_A+\frac{R_{\text{г.д}}}{K_{\text{пруж}}h}\delta R_{\text{г.д}} \qquad (5.2.7)$$

式中 $\delta R_{\text{г.д}}$——无量纲的流体动力变化量。

可方便地将作用于节流装置的流体动力分解为两个分量。一个分量确定当节流装置流通截面完全关闭并且压差$p_1-p_2$（见图5.1虚线所示)不变时的作用力。它等于压差$p_1-p_2$与节流装置中部最大截面面积$F_{\text{др}}$的乘积。当液体流过节流装置时，最窄截面处压力的降低值与该截面处液体的速度头成正比。因此，可将流体动力写成

$$R_{\text{г.д}}=(p_1-p_2)F_{\text{др}}-c_{\text{гд}}\rho w_{\text{р}}^2F_{\text{р}}/2 \qquad (5.2.8)$$

式中 $c_{\text{г.д}}$——由节流装置的位置所决定的流体动力的系数；

$F_{\text{р}}$——由节流装置位置所决定的调节器节流装置流通截面的面积；

$w_{\text{р}}$——调节器节流装置最窄截面处的液体速度。

系数$c_{\text{г.д}}$与流体力学中用来描述作用于绕流体的流体力系数$c_x$和$c_y$相类似。最窄截面处的速度$w_{\text{р}}$决定于流经调节器的液体

流量$G_p$：

$$w_p = G_p/(\rho\mu_p F_p) \qquad (5.2.9)$$

式中 $\mu_D$——调节器节流装置处的流量系数。

将(5.2.8)和(5.2.9)式线性化，求得关于流体动力变化量的关系式

$$\delta R_{г.д} = \frac{F_{др}p_1}{R_{г.д}}\delta p_1 - \frac{F_{др}p_2}{R_{др}}\delta p_2 - \frac{h}{c_{г.д}}\cdot\frac{\partial c_{г.д}}{\partial x}\delta x + \frac{h}{F_p}\cdot\frac{\partial F_p}{\partial x}\delta x - 2\delta G_p \qquad (5.2.10)$$

式中 $\delta p_1$、$\delta p_2$——调节器节流装置前后压力的无量纲变化量；

$\delta G_p$——流经调节器的液体流量的无量纲变化量。

将(5.2.10)式代入(5.2.7)式，可获得描述调节器运动部件位移的线性化关系式的另一种形式

$$\frac{m_{п.ч}}{K_{пруж}}\cdot\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{\alpha_{тр}}{K_{пруж}}\cdot\frac{d\delta x}{dt} + \left[1 - \frac{R_{г.д}}{K_{пруж}h}\left(\frac{h}{F_p}\cdot\frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{h}{c_{г.д}}\cdot\frac{\partial c_{г.д}}{\partial x}\right)\right]\delta x = \frac{F_п p_B}{K_{пруж}h}\delta p_B - \frac{F_п p_A}{K_{пруж}h}\delta p_A - 2\frac{R_{г.д}}{K_{пруж}h}\delta G_p + \frac{F_{др}p_1}{K_{пруж}h}\delta p_1 - \frac{F_{др}p_2}{K_{пруж}h}\delta p_2 \qquad (5.2.11)$$

在方程(5.2.11)左端，位移变化量$\delta x$前面的、决定着调节器差率的系数中含有弹簧刚度$K_{пруж}$及两个与流体动力有关的补充项。两补充项使表示作用于调节器运动部件的位置力（即与节流装置位置有关的作用力）同位移量间相互关系的系数发生变化。由于流体动力的作用，调节器特性线的斜率——被调参数（流量$G_p$）与负载（调节器压降）间的关系有变化，也就是调节器的差率有改变。当上述决定流体动力的补充项达较大值时（与



1相比），位移变化量前面的系数会改变符号，即调节器差率成为负的。这会对“发动机-调节器”系统的稳定性产生不良影响。

由于液体的压缩性很小，如果忽略调节器腔内液体的压缩性，也就是说，在(5.2.2)式和(5.2.3)式中舍去带有压力变化量的导数的各项，这样利用这些关系式可从描述调节器运动部件位移的方程(5.2.11)中消去中间变量——调节器腔内的压力变化量$\delta p_A$和$\delta p_B$。经变换后得到

$$\frac{1}{K_{пруж}}\left[m_{п.ч} + m_A\left(\frac{F_п}{F_A}\right)^2 + m_B\left(\frac{F_п}{F_B}\right)^2\right]\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{1}{K_{пруж}}\left[\alpha_{тр} + \rho F_п^2\left(\frac{\Delta p_A}{G} + \frac{\Delta p_B}{G}\right)\right]\frac{d\delta x}{dt} + \left[1 - \frac{R_{г.д}}{K_{пруж}h}\left(\frac{h}{F_p}\frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{h}{c_{г.д}}\frac{\partial c_{г.д}}{\partial x}\right)\right]\delta x = \frac{F_п p_4}{K_{пруж}h}\delta p_4 - \frac{F_п p_3}{K_{пруж}h}\delta p_3 - 2\frac{R_{г.д}}{K_{пруж}h}\delta G_p + \frac{F_{др}p_1}{K_{пруж}h}\delta p_1 - \frac{F_{др}p_2}{K_{пруж}h}\delta p_2 \qquad (5.2.12)$$

式中 $F_A$，$F_B$——通往A腔和B腔的流道的流通截面积。

在进行变换时，认为对于平均参数有 $p_3 = p_A$ 和 $p_4 = p_B$，而$m_A = \rho F_A L_A$和$m_B = \rho F_B L_B$，其中$m_A$，$m_B$——通往A腔和B腔的调节器反馈通道内的液体质量（见图5.1）。

调节器数学模型(5.2.12)考虑了影响到直接作用式液压调节器动态特性的各种主要因素(除了液体的压缩性)——液体附着质量的影响（第二个导数前方括弧中的系数，调节器反馈通道内的摩擦（第一个导数前方括弧中的系数），流体动力(变化量$\delta x$前方括弧中的系数)。

方程(5.2.11)和(5.2.12)的右端包含有调节器不同流道截面处的压力变化量。这些压力变化量同液体在流过局部阻力——节

流装置1(见图5.1，压降$p_1-p_2$)和控制阀4(压降$p_3-p_4$)时非稳态流动下的流量变化量有关。在上述各局部阻力处液体速度可达很大值，因此在它们的方程中必须考虑流道中液体的惯性。由(2.1.10)和(2.1.16)式可获得考虑了液体惯性的节流装置的线性化方程

$$\frac{p_1}{\Delta p_p}\delta p_1-\frac{p_2}{\Delta p_p}\delta p_2=2\delta G_p-2\delta F_p+\tau_{и.p}\frac{\mathrm{d}\delta G_p}{\mathrm{d}t} \tag{5.2.13}$$

式中 $\tau_{и.p}=G_p l_{эф}/(\Delta p_p F_p)$——调节器节流装置流道内液体的惯性时间常数；$l_{эф}$——在惯性项中所考虑的节流装置内液柱的有效长度（通常认为$l_{эф}$与节流截面水力直径有相同量级)；$\Delta p_p=p_1-p_2$。

对用来改变调节器调整状态（即调节器所保持的流量）的控制阀，可建立起与(5.2.13)式类似的方程

$$\frac{p_3}{\Delta p_н}\delta p_3-\frac{\bar{p}_4}{\Delta p_н}\delta p_4=2\delta G_p-2\delta F_н+\tau_{и.н}\frac{\mathrm{d}\delta G_p}{\mathrm{d}t} \tag{5.2.14}$$

式中 $\tau_{и.н}=G_p l_{нэф}/(\Delta p_н F_н)$——调节器调整时所采用的控制阀流道内液体的惯性时间常数；

$\Delta p_н=p_3-p_4$；

$F_н$——控制阀流通截面积；

$\delta F_н$——控制阀流通截面积的无量纲变化量（与控制阀转角$\varphi_н$成正比)；$l_{нэф}$——控制阀内液柱有效长度。

将(5.2.13)式和(5.2.14)式代入方程(5.2.12)，并引入($a_2$、$a_1$、$a_0'$)以使所获方程左端各系数的表示可简化，得

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2\delta x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t}+a_0'\delta x$$



$$=\frac{2F_{др}\Delta p_p}{K_{пруж}h}\delta G_p-\frac{2F_{др}\Delta p_p}{K_{пруж}h}\delta F_p+\frac{F_{др}\Delta p_p}{K_{пруж}h}\tau_{и.p}\frac{\mathrm{d}\delta G_p}{\mathrm{d}t}-\frac{2F_п\Delta p_н}{K_{пруж}h}\delta G_p+\frac{2F_п\Delta p_н}{K_{пруж}h}\delta F_н-\frac{F_п\Delta p_н}{K_{пруж}h}\tau_{и.н}\frac{\mathrm{d}\delta G_p}{\mathrm{d}t}-2\frac{R_{г.д}}{K_{пруж}h}\delta G_p$$

$$=-\frac{2}{K_{пруж}h}(F_п\Delta p_н-F_{др}\Delta p_p+R_{г.д})\delta G_p-\frac{1}{K_{пруж}h}(F_п\Delta p_н\tau_{и.н}-F_{др}\Delta p_p\tau_{и.p})\frac{\mathrm{d}\delta G_p}{\mathrm{d}t}-\frac{2F_{др}\Delta p_p}{K_{пруж}h}\delta F_p+\frac{2F_п\Delta p_н}{K_{пруж}h}\delta F_н \tag{5.2.15}$$

在调节器方程(5.2.15)的左端，包含有作为变量的调节器运动部件的位移变化量。为将这个方程与液路方程（见第二章）一起应用还必须有另一个变量——节流装置流通截面积的变化量$\Delta F_{пр}$。这两个变量由下列简单关系式相联系

$$\delta F_p=\frac{h}{F_p}\cdot\frac{\partial F_p}{\partial x}\delta x=\psi_p\delta x \tag{5.2.16}$$

当调节器运动部件和固定部件的相互位置一定，知道了节流装置的几何尺寸，就可求得(5.2.16)式中的系数$\psi_p$。将(5.2.16)式代入方程(5.2.15)，得

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2\delta F_p}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}+\left(a_0'+\frac{2\psi_p F_{др}\Delta p_p}{K_{пруж}h}\right)\delta F_p$$

$$=a_2\frac{\mathrm{d}^2\delta F_p}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}\delta F_p}{\mathrm{d}t}+a_0\delta F_p$$

$$= -\frac{2\psi_p}{K_{пруж}h}(F_п\Delta p_н - F_{др}\Delta p_р + R_{г.д})\delta G_р$$

$$-\frac{\psi_р}{K_{пруж}h}(F_п\Delta p_н\tau_{и.н} - F_{др}\Delta p_р\tau_{и.р})\frac{d\delta G_р}{dt}$$

$$+\frac{2\psi_р F_п\Delta p_н}{K_{пруж}h}\delta F_н \qquad (5.2.17)$$

在调节理论中，将(5.2.17)式那种型式的方程称为振荡元件方程[5]，并将它变换成下列形式

$$T_2^2\frac{d^2\delta F_р}{dt^2} + T_1\frac{d\delta F_р}{dt} + \delta F_р$$

$$= -K_р\delta G_р - \tau_{иG}\frac{d\delta G_р}{dt} + K\delta F_н \qquad (5.2.18)$$

式中 $T_2^2 = a_2/a_0$——调节器惯性时间常数的平方；

$T_1 = a_1/a_0$——调节器运动部件阻尼时间常数；

$K_р = [2\psi_р/(a_0K_{пруж}h)](F_п\Delta p_н - F_{др}\Delta p_р + R_{г.д})$——调节器放大系数；$\tau_{иG} = [\psi_р/(a_0K_{пруж}h)](F_п\Delta p_н\tau_{и.н} - F_{др}\Delta p_р \times\tau_{и.р})$——调节器中被调参数（流量）的惯性时间常数；

$K = 2\psi_р F_п\Delta p_н/(a_0K_{пруж}h)$——控制作用，即控制阀流通截面积变化的放大系数。如果以控制阀的转角$\varphi_н$来起控制作用，则系数$K$的含义就有改变。

## 5.3 “调节器—试验台管路”的系统稳定性

液压调节器在安装到液体火箭发动机上之前要在液流试验台上进行试验。在新设计发动机的调节器试验过程中，有时甚至在已被使用的发动机的调节器液流试验时，都会在系统中产生低频振荡。振荡的原因可能是调节器的研究不够充分，使它产生与液



流试验台参数无关的自激振荡，也可能是调节器本身工作很好，但“调节器—试验台管路”系统丧失稳定性。在后一种情况下，改变试验台系统——改变管路的长度或阻力，设置阻尼装置等，就可避免振荡。

现研究由贮箱（气瓶）及一个管路所组成的液流试验台，在管路出口装有调节器。假设管路入口有局部阻力，并考虑了管路壁面的摩擦损失。因为要解系统稳定性问题，可采用描述以一定频率和振幅重叠谐振的流动状态的(2.3.15)式和(2.3.16)式来描述管路中液体的动力学。这时，在出口处阻力$\psi_2$的表达式中考虑调节器动态特性。与第二章一样，管路入口处参数以下标1表示，而出口处则为下标2。

将认为作为出口处阻力的调节器的动态特性可用它的实部和虚部来描述，即$\psi_2 = Re_2(\omega) + iIm_2(\omega)$，而入口处阻力$\psi_1 = Re_1 = const$。这时，边界条件可表示为

$$\bar{x} = 0; \quad \psi_1 = Re_1$$

$$\bar{x} = 1; \quad \psi_2(\omega) = Re_2(\omega) + iIm_2(\omega) \qquad (5.3.1)$$

将阻力公式(5.3.1)代入管路关系式(2.3.15)，并用三角函数来表示指数，可求得“管路—调节器”闭合系统的特征方程

$$(\alpha+\psi_1)(\alpha-\psi_2)[\cos(\omega L/a) - i\sin(\omega L/a)]$$
$$-(\alpha-\psi_1)(\alpha+\psi_2)[\cos(\omega L/a) + i\sin(\omega L/a)]$$
$$= 2\alpha(Re_1 - Re_2 - iIm_2)\cos(\omega L/a)$$
$$-i2(\alpha^2 - Re_1Re_2 - iRe_1Im_2)\sin(\omega L/a) = 0 \qquad (5.3.2)$$

式中 $\alpha$，$a$——管路中液体的换算波阻及声速；

$L$——管路长度。

使方程(5.3.2)的实部和虚部等于零，可求得视为边界阻力的调节器参数稳定性边界的两个关系式

$$\frac{Re_2}{\alpha} = \frac{Re_1}{\alpha}\cdot\frac{1+tg^2(\omega L/a)}{1+(Re_1/\alpha)^2tg^2(\omega L/a)} \qquad (5.3.3)$$

$$\frac{\mathrm{Im}_2}{\alpha}=\frac{[1-(\mathrm{Re}_1/\alpha)^2]\mathrm{tg}(\omega L/a)}{1+(\mathrm{Re}/\alpha)^2\mathrm{tg}^2(\omega L/a)} \qquad (5.3.4)$$

Б.В.拉乌欣巴赫以有燃烧现象的气路内声振荡激发过程为例，对具有分布参数的系统的稳定性进行了非常深入的研究[28]。虽然本节所研究的是与调节器的工作有关的另一种振荡激发机理，但在著作[28]中所提出的关于长管路中过程稳定性的一些基本观点对于本节所研究的问题也是有关系的。特别是当振荡能源——调节器内的过程纯为力学过程时，调节器流阻的变化或它的运动部件将液体挤入（排出），都会对流动产生影响。

对于所研究的情况，可以用下列方式来表示系统丧失稳定性的特征[28]：如果流体阻力和速度两个交变分量之间的相位差在$\pi/2\cdots\pi$的范围内，或者当供入液体的质量（或流路容积）和压力两个交变分量之间的相位差小于$\pi/2$时，在系统内就可能产生自激振荡。这时假定调节器本身在流路长度不大的系统中是稳定的。

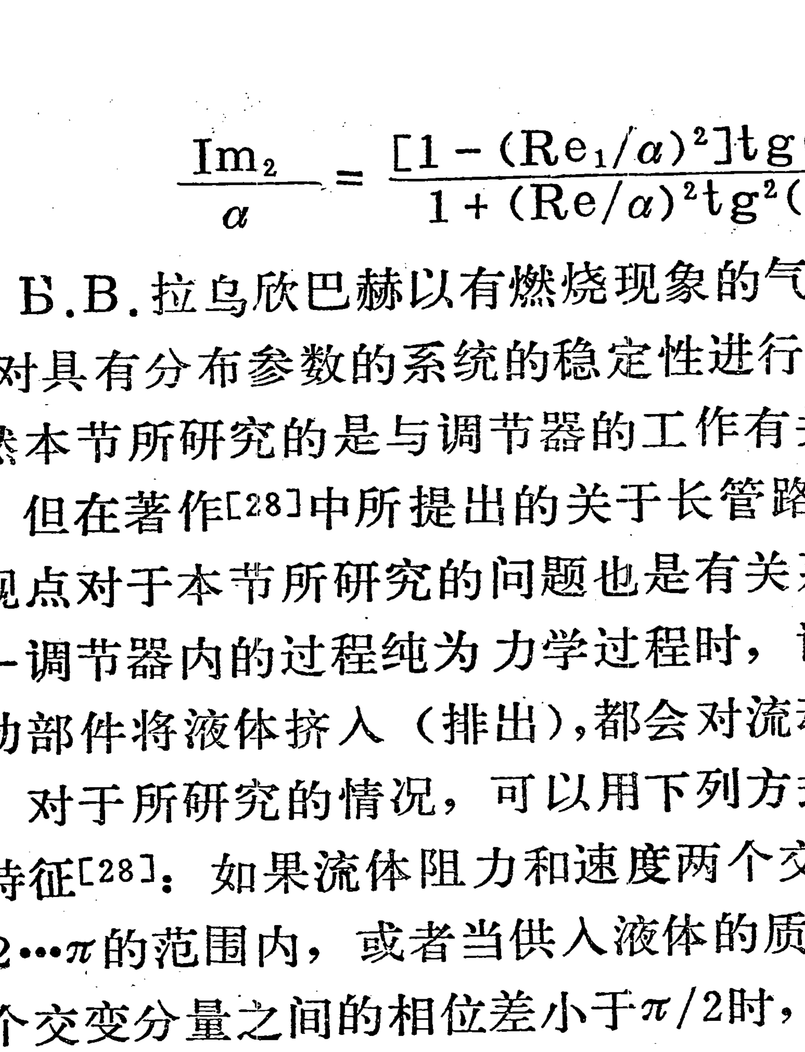



图5.2 以出口折算阻力分量$\mathrm{Re}_2/\alpha$和$\mathrm{Im}_2/\alpha$来描述的“管路—调节器”系统稳定性边界



图5.2列出了以调节器参数——管路出口折算阻力分量$Re_2/\alpha$和$I\mathrm{m}_2/\alpha$来表示的“管路—调节器”系统的稳定性边界。对各种入口阻力值$Re_1/\alpha$，按(5.3.3)和(5.3.4)式进行了计算。流路的声学开端($Re_1/\alpha=0$)的情况很好地符合前面所表示的条件，即不稳定区域位于速度(流量)和压力振荡间的相位差为$\pi/2\cdots\pi$的范围内，也就是位于$\mathrm{Re}_2/\alpha-\mathrm{Im}_2/\alpha$平面的左半平面。当调节器后压力为常值时，压降交变分量就等于调节器前压力交变分量。

当流路入口的压力损失增大，即$|\mathrm{Re}_2/\alpha|>0$时，稳定区变小。这时，当$\mathrm{Re}_1/\alpha$在$-0.1\cdots-1$范围内变化时，稳定区逐渐增大，而不稳定区(以圆的形式表示)变小，在$\mathrm{Re}_1/\alpha=-1$(匹配载荷)时缩为一个点。$|\mathrm{Re}_1/\alpha|$继续增大时，重新出现不稳定区。“管路—调节器”系统稳定性边界的变化过程与振荡燃烧中类似曲线的变化过程[28]很相象。

为了由边界阻力分量$\mathrm{Re}_2/\alpha$，$\mathrm{Im}_1/\alpha$转换到更能表示调节器特性的时间常数和放大系数，现采用流路出口处流阻的线性化关系式，认为在调节器后面还设置有建立起压头的孔板以避免气蚀。如果假设系统的流出压力保持常值，则上述关系式具有如下形式(参阅第二章)

$$\delta\bar{p}_2=(2\Delta p_\mathrm{p}/p_2+2\Delta p_\mathrm{g}/p_2)\delta\bar{G}_\mathrm{p}-(2\Delta p_\mathrm{p}/p_2)\delta\bar{F}_\mathrm{p} \qquad (5.3.5)$$

式中 $\delta\bar{p}_2$——流路出口(调节器入口)压力变化幅值；

$\delta\bar{G}_\mathrm{p}$，$\delta\bar{F}_\mathrm{p}$——调节器流量及流通截面积变化的幅值；

$\Delta p_\mathrm{p}$、$\Delta p_\mathrm{д}$——调节器及调节器后孔板的平均压降；

$p_2$——流路出口平均压力。

对于调节器，流通截面积与流量之间由(5.2.18)式相联系。将周期特解$\delta F_\mathrm{p}=\delta\bar{F}_\mathrm{p}\exp(i\omega t)$等代入该式，并假定$\tau_{\mathrm{иг}}=\delta F_\mathrm{н}=0$，可将(5.3.5)式变为

$$\delta\bar{p}_2=(\mathrm{Re}_2+i\mathrm{Im}_2)\delta\bar{G}_\mathrm{p}$$

$$= [2\Delta p_p/p_2 + 2\Delta p_д/p_2 - (2\Delta p_p/p_2)W_p(\omega)]\delta\bar{G}_p \quad (5.3.6)$$

式中 $W_p(\omega) = \delta\bar{F}_p/\delta\bar{G}_p = A_p(\omega) + iB_p(\omega)$——调节器的频率传递函数；

$$A_p = -K_p(1-T_2^2\omega^2)/[(1-T_2^2\omega^2)^2 + (T_1\omega)^2]$$

$$B_p = K_pT_1\omega/[(1-T_2^2\omega^2)^2 + (T_1\omega)^2]$$

将（5.3.6）式得出的$Re_2$和$Im_2$值代入稳定性边界方程（5.3.3）和（5.3.4），并对（$T_1$、$T_2$和$K_p$三个参数中的）二个调节器参数解这些方程，可求得以调节器参数表示的“管路——调节器”系统的稳定性边界的表示式。



# 第六章 建立液体火箭发动机数学模型的方法

## 6.1 基本变量

用于火箭技术的液体火箭发动机有各式各样的系统方案：有采用一台燃气发生器和一台涡轮泵、无补燃（燃气发生器的燃气排入大气）或补燃的方案（按燃烧室喷注器头部类型来看又可称作液-液和气-液方案）；有采用两台同类（即富氧或富燃）燃气发生器和两台涡轮泵、补燃或无补燃的方案；有采用两台不同类型的燃气发生器、两台涡轮泵，并由富氧燃气和富燃料燃气补燃的方案（气-气方案）；有采用挤压（气瓶）式供应系统的方案。有一些方案还可按推力室的数量、燃气发生器的类型（单组元、双组元燃气发生器）、预压泵（在主涡轮泵前建起所需的压力值）的类型和数量等等加以区分。

由于发动机可能采用的系统方案范围很广，为其建立数学模型时，最方便的是利用发动机的通用系统方案。用这种系统方案（见图1.1）便可建立起发动机各种典型组件的数学模型，用这些模型可很容易地组合成整个发动机的模型。若要建立比图1.1所示的系统方案更为复杂（如有两个气-气型燃气发生器）的发动机数学模型，则必须增加变量的数量。若方案中的组件只是简单地重复，如多管发动机或有两台燃气发生器的发动机，则对于图1.1上未包含的组件还应引入一些方程，而这些方程同以下引用的方

程的不同之处只在变量和系数的下标上。

现采用以下无量纲(相对)参数变化量作为通用系统方案的发动机低频数学模型中的变量(见图1.1)：

$\delta G_{\text{о.к}1}$—通过燃气发生器的氧化剂流量；

$\delta G_{\text{о.к}3}$—通过燃烧室的氧化剂流量；

$\delta G_{\text{г}1}$—通过燃气发生器的燃料流量；

$\delta G_{\text{г}3}$—通过燃烧室的烧料流量；

$\delta p_{\text{гг}}$—燃气发生器内压力；

$\delta p_{\text{газ}}$—燃气导管内压力；

$\delta p_{\text{к}}$—燃烧室内压力；

$\delta n$—涡轮泵转速；

$\delta T_{\text{гг}}$—燃气发生器头部附近的燃气温度；

$\delta T_{\text{газ}}$—燃气导管入口的燃气温度。

除特别说明的情况外，在其它一切情况下，换算为无量纲形式时，参数变化量都是相对其名义值而言。

若发动机系统方案内有两台燃气发生器，则$\delta G_{\text{о.к}1}$、$\delta G_{\text{г}1}$、$\delta p_{\text{гг}1}$——第一台燃气发生器流量与压力的变化量，而对于第二台则应引入变量——$\delta G_{\text{о.к}2}$、$\delta G_{\text{г}2}$、$\delta p_{\text{гг}2}$。发动机系统方案内有几台预压泵、若干台燃烧室以及其它组件时，不论是对于组件本身，还是对于把这些组件同发动机其它流路和组件联接起来的流路，都应引入补充方程和相应的新的变量。补充组件同发动机通用系统方案中已有组件两者之间的关系应用引进了新变量的已有组件方程中的补充项加以描述。

除了描述发动机内部参数的变量外，方程中还有表征控制机构(节流阀)和外部条件影响的无量纲参数变化量，外部条件是发动机入口推进剂各组元的压力：$\delta F_{\text{о.к}1}$、$\delta F_{\text{г}1}$——燃气发生器组元流路上各节流阀的流通截面积；$\delta F_{\text{о.к}3}$、$\delta F_{\text{г}3}$——燃烧室的相应参数；$\delta p_{\text{ок.вх}}$，$\delta p_{\text{г.вх}}$——发动机入口氧化剂和燃料的压力。



若燃气发生器是两台，则在第二台燃气发生器组元流路上可能会出现控制作用的变化量$\delta F_{\text{о.к}2}$和$\delta F_{\text{г}2}$。

## 6.2 液路模型

第二章提出了液路线性数学模型的几个方案，它们都是用来描述强迫振荡情况下液体参数变化情况的。根据液路长度、组元的声速和所采用的频率范围，可采用考虑参数分布性(即声学效应)的模型；不考虑参数分布性，但考虑液路内液体的可压缩性和惯性的模型，而最终还可以采用最简单和最方便的模型——只考虑液体惯性的模型。在后一情况下，可以把含有多段导管、局部流阻、泵等的任一流路支路看作可用一个方程来描述的单个元件。

公式(2.1.39)、(2.1.41)、(2.1.42)、(2.1.44)便是液路数学模型的示例，其中考虑了液体的惯性和粘度(局部流阻损失)。例如在用富氧燃气补燃的发动机中，对于用辅助泵给燃气发生器(第一个燃气发生器)供应燃料的液路，方程(2.1.44)取以下形式：

$$\left(2-\frac{\Delta p_{\text{г.н}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\bar{G}_{\text{г}1}\psi_{\text{сг}}-\frac{\Delta p_{\text{г.н.д}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 2}}\psi_{\text{Gг.д}}\right)\delta G_{\text{г}1}$$

$$+\left(\tau_{\text{г}1}\frac{\Delta p_{\text{г.н}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\bar{G}_{\text{г}1}\tau_{\text{г.н}}+\frac{\Delta p_{\text{г.н.д}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\tau_{\text{г.н.д}}\right)\frac{\mathrm{d}\delta G_{\text{г}1}}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{\Delta p_{\text{г.н}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\bar{G}_{\text{г}3}\psi_{\text{сг}}\delta G_{\text{г.з}}+\tau_{\text{г.н}}\frac{\Delta p_{\text{г.н}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}G_{\text{г}3}\frac{\mathrm{d}\delta G_{\text{г}3}}{\mathrm{d}t}$$

$$-\left(\frac{\Delta p_{\text{г.н}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\psi_{\text{пг}}+\frac{\Delta p_{\text{г.н.д}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\psi_{\text{пг.д}}\right)\delta n$$

$$-\left(\tau_{\text{гп}}\frac{\Delta p_{\text{г.н}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}+\tau_{\text{гпд}}\frac{\Delta p_{\text{г.н.д}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\right)\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}t}+\frac{p_{\text{гг}}}{\Delta p_{\text{г}\Sigma 1}}\delta p_{\text{гг}}$$

$$-2\frac{\Delta p_{\Gamma.p1}}{\Delta p_{1\Sigma 1}}\delta(\mu F)_{\Gamma 1}-\frac{p_{\Gamma.вх}}{\Delta p_{\Gamma\Sigma 1}}\delta p_{\Gamma.вх}=0 \qquad (6.2.1)$$

式中 $\Delta p_{\Gamma.н}$、$\Delta p_{\Gamma.н.д}$——主泵和辅助泵建立的压头；$\psi_{G\Gamma}$、$\psi_{G\Gamma.д}$、$\psi_{n\Gamma}$、$\psi_{n\Gamma.д}$——燃料主泵和辅助泵压头特性曲线对应于流量及转速的无量纲斜率；$\bar{G}_{\Gamma 1}$、$\bar{G}_{\Gamma 3}$——进入燃气发生器和燃烧室的燃料流量比率；$\Delta p_{\Gamma\Sigma 1}$、$\Delta p_{\Gamma.P1}$——整个燃料流路和燃气发生器调节装置的压差；$\tau_{\Gamma 1}$——考虑了惯性的液路的液体时间常数；$\tau_{\Gamma n}$、$\tau_{\Gamma.nд}$、$\tau_{\Gamma.н}$、$\tau_{\Gamma.н.д}$——主泵和辅助泵过流部分液体的时间常数，且这些常数都考虑了牵连运动（下标《$n$》）和相对运动（下标《$H$》）中的惯性；$p_{\Gamma\Gamma}$、$p_{\Gamma.вх}$——燃气发生器内和燃料泵入口的压力。

对于所有其它的液路——燃气发生器氧化剂液路、燃烧室燃料液路、给预压泵装置的涡轮供应液态组元的液路等等——也应建立类似的方程。当采用简化的非稳态流模型时，液路方程的数量应等于液态组元流量独立变化量的数量。

若一条或数条液路不能满足条件 $L_{\Sigma i}\ll\lambda_i$（式中$L_{\Sigma i}$——第$i$条液路的总长；$\lambda_i$——第$i$条液路中的声波长度）时，则不能利用简化的非稳态流模型。除惯性外，还必须考虑液体的可压缩性。第二章内给出了非稳态流数学模型的两个方案，该模型内既考虑了惯性，又考虑了可压缩性。在第一方案中，这一点是靠用振荡元件方程对液路分段描述的办法来实现的，而在这些方程的系数内便考虑了各液路分段液体的惯性和可压缩性。在第二方案中，把每段液路看作是一个带分布参数的元件，即认为惯性和可压缩性是沿该段液路全长均匀分布的。因为在这两种情况下，液路被分为许多分段（通常在两局部流阻间），在第一方案情况下，应解算常微分方程组，而在第二方案情况下，则应解算偏微分方程组。尽管在一般情况下第二方案要复杂一些，然而对它加以着重研究是很有意义的，因为它比较通用，而且在频率范围上又不受多大



的限制。

用特性线法确定过渡过程参数时（见第2.5.2节），偏微分方程组可简化为可用有限差分法解算的常微分方程组。在有强迫振荡的情况下，对每个流路分段以及该流路中的局部流阻、泵、调节器、阻尼装置，如第二章所示，最方便的是用四端网络方程进行描述。矩阵方程(2.8.15)和(2.8.20)可描述流路中振荡的传播情况而不考虑边界条件，该边界条件由流路两端元件（组件）的种类确定。例如，对于燃气发生器的燃料流路，入口条件是由涡轮泵的一台泵（或多台泵）建立的，出口条件则由燃气发生器喷嘴建立。如第二章对于各单个流路分段那样，对于整个第$i$流路保存了边界条件(2.3.5)和(2.3.6)的一般表达形式，而只改变了下标并用以下流量变化量代替速度变化量幅值：

对于第$i$流路入口（$\bar{x}_i=0$）

$$\delta\bar{p}_i(0)=\psi_{i1}\delta\bar{G}_i(0)+\sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij1}\delta\bar{y}_{j1} \qquad (6.2.2)$$

对于第$i$流路出口（$\bar{x}_i=1$）

$$\delta\bar{p}_i(1)=\psi_{i2}\delta\bar{G}_i(1)+\sum_{k=1}^{m}\gamma_{ik2}\delta\bar{y}_{k2} \qquad (6.2.3)$$

式中 $\delta\bar{p}_i(0)$、$\delta\bar{p}_i(1)$、$\delta\bar{G}_i(0)$、$\delta\bar{G}_i(1)$——第$i$流路入口及出口压力和流量无量纲变化幅值；

$\delta\bar{y}_{j1}$、$\delta\bar{y}_{k2}$——第$i$流路边界上干扰（控制）参数无量纲变化幅值；

$\psi_{i1}$、$\psi_{i2}$、$\gamma_{ij1}$、$\gamma_{ik2}$——边界阻力和外部干扰量放大系数；

$r$、$m$——流路进口和出口干扰量的数目。

对第$i$流路入口处的离心泵，根据关系式(2.1.31)，边界条件(6.2.2)中的参数决定于关系式$\psi_{i1}=(\psi_{Gi}-i\omega\tau_{Hi})\Delta p_{Hi}/p_i(0)$；$\gamma_{i11}=(\psi_{ni}+i\omega\tau_{ni})\Delta p_{Hi}/p_i(0)$——用于转速变化量$\delta_n$；$\gamma_{i21}=p_{вхi}/p_i(0)$——用于泵前压力变化量$\delta\bar{p}_{вхi}$。

对于第$i$流路出口的局部阻力，根据关系式(2.3.2)，在边界条件(6.2.3)中

$$\psi_{i2}=2[p_i(1)-p_{\Gamma\Gamma}]/p_i(1);\ \gamma_{i12}=p_{\Gamma\Gamma}/p_i(1) \tag{6.2.4}$$

以前采用了以下代号：$p_i(0)$、$p_i(1)$——流路入口和出口压力(泵后和喷嘴前)；$p_{Bxi}$、$p_{\Gamma\Gamma}$——泵前和燃气发生器内的压力；$\psi_{ai}$、$\psi_{ni}$、$\tau_{Hi}$、$\tau_{ni}$——第$i$流路进口泵的压头特性曲线斜率和时间常数。

建立流路数学模型时，使用了各分段按关系式(2.8.15)建立的四端网络矩阵的连乘运算，在该关系式中进口与出口参数为流路入口与出口压力和速度的变化幅值。为计算边界条件(6.2.2)和(6.2.3)，应将其化为在公式(2.8.15)中便于利用的形式，即化为矩阵形式，为简化起见，假设流路每端只有一个干扰在起作用：

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(0)\\ \delta\bar{G}_i(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{i1BX} & \psi_{iBX}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{iBX}\\ \delta\bar{G}_i(0)\end{bmatrix}=\mathbf{B}_{iBX}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{iBX}\\ \delta\bar{G}_i(0)\end{bmatrix} \tag{6.2.5}$$

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(1)\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{i2BЫX} & \psi_{iBЫX}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{iBЫX}\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix}=\mathbf{A}_{iBЫX}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{iBЫX}\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix} \tag{6.2.6}$$

若有几个干扰起作用，则按线性系统叠加原则，其解式将等于对各单个干扰求解的和。

此处为保留流路各元件在公式(2.8.15)中的编号，像过去一样，对于第$i$流路的边界元件使用了下标 BX 和BЫX。将关系式(6.2.5)和(6.2.6)代入关系式(2.8.15)的左边和右边，再将该关系式中流路单个元件四端网络矩阵标号由$i$改变为$ij$(此处 $i$——流路号；$j$——第$i$流路的分段号)，考虑到$\delta\bar{G}_i=\delta\bar{u}_i$，经过变换即可求出

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{iBX}\\ \delta\bar{G}_i(0)\end{bmatrix}=\mathbf{A}_{\Sigma i}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{iBЫX}\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix} \tag{6.2.7}$$



式中 $\mathbf{A}_{\Sigma i}=\mathbf{B}_{BXi}^{-1}\mathbf{A}_{Tpi}\mathbf{A}_{BЫXi}$——考虑到诸边界元件情况的沿第$i$流路的干扰传输的矩阵；

$\mathbf{A}_{Tpi}$——第$i$流路的总矩阵。

将方程(6.2.7)逐行分别写出并加以变换，即可得将第$i$流路进出口流量变化幅值$\delta\bar{G}_i(0)$和$\delta\bar{G}_i(1)$同该液路进出口诸干扰量联系起来的两个关系式

$$\delta\bar{G}_i(0)=\frac{A_{\Sigma i-22}}{A_{\Sigma i-12}}\delta\bar{y}_{iBX}+\left(A_{\Sigma i-21}-\frac{A_{\Sigma i-11}A_{\Sigma i-22}}{A_{\Sigma i-12}}\right)\delta\bar{y}_{iBЫX} \tag{6.2.8}$$

$$\delta\bar{G}_i(1)=\frac{1}{A_{\Sigma i-12}}\delta\bar{y}_{iBX}-\frac{A_{\Sigma i-11}}{A_{\Sigma i-12}}\delta\bar{y}_{iBЫX} \tag{6.2.9}$$

此处下标中短横后的数字表示四端网络矩阵的行号和列号。

为确定流路各端压力变化幅值，可认为$j=k=1$，将公式(6.2.8)代入边界条件(6.2.2)，将公式(6.2.9)代入边界条件(6.2.3)即可求出

$$\delta\bar{p}_i(0)=(\gamma_{i1BX}+\psi_{iBX}A_{\Sigma i-22}/A_{\Sigma i-12})\delta\bar{y}_{iBX}+\psi_{iBЫX}(A_{\Sigma i-21}-A_{\Sigma i-11}A_{\Sigma i-22}/A_{\Sigma i-12})\delta\bar{y}_{iBЫX} \tag{6.2.10}$$

$$\delta p_i(1)=(\psi_{iBX}/A_{\Sigma i-12})\delta\bar{y}_{iBX}+(\gamma_{i2BЫX}-\psi_{iBЫX}A_{\Sigma i-11}/A_{\Sigma i-12})\delta\bar{y}_{iBЫX} \tag{6.2.11}$$

利用方程(6.2.8)～(6.2.11)可确定作为复杂系统元件的流路的流量和压力的变化幅值。特别是，若第$i$流路后有燃气发生器，则可按关系式(6.2.4)将$\delta\bar{y}_{iBЫX}=\delta\bar{p}_{\Gamma\Gamma}$；$\psi_{iBЫX}=2[p_i(1)-p_{\Gamma\Gamma}]/p_i(1)$；$\gamma_{i1BЫX}=p_{\Gamma\Gamma}/p_i(1)$等等代入公式(6.2.8)～(6.2.11)。

若液路有分支，且该液路的所有端部都给出了(6.2.2)和(6.2.3)式类型的边界条件，则这些端部压力和流量的变化量可

用近似于对于一条流路描述过的方法求出。在此情况下，可对于有分支的总流路、对分支后的单个流路和对分支本身写出边界条件。对于总流路进口($i=1$)矩阵形式的边界条件类似于关系式(6.2.5)，即

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_1(0)\\ \delta\bar{G}_1(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{11\text{вх}} & \psi_{1\text{вх}}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{1\text{вх}}\\ \delta\bar{G}_1(0)\end{bmatrix}=\mathbf{B}_{\text{вх}1}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{1\text{вх}}\\ \delta\bar{G}_1(0)\end{bmatrix} \tag{6.2.12}$$

而对于分支后的各流路端部($i=2、3\cdots$)

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(1)\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{i2\text{вых}} & \psi_{i\text{вых}}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{i\text{вых}}\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix}=\mathbf{A}_{\text{вых}i}\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{i\text{вых}}\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix} \tag{6.2.13}$$

将方程(6.2.12)和(6.2.13)左边的矢量代入每一流路方程(2.8.15)，求出

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{1\text{вх}}\\ \delta\bar{G}_1(0)\end{bmatrix}=\mathbf{B}^{-1}_{\text{вх}1}\mathbf{A}_{\text{Тр}1}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_1(1)\\ \delta\bar{G}_1(1)\end{bmatrix}=\mathbf{A}_{\Sigma 1}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_1(1)\\ \delta\bar{G}_1(1)\end{bmatrix} \tag{6.2.14}$$

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{y}_{i\text{вых}}\\ \delta\bar{G}_i(1)\end{bmatrix}=(\mathbf{A}_{\text{Тр}i}\mathbf{A}_{\text{вых}})^{-1}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(0)\\ \delta\bar{G}_i(0)\end{bmatrix}=\mathbf{B}_{\Sigma i}\begin{bmatrix}\delta\bar{p}_i(0)\\ \delta\bar{G}_i(0)\end{bmatrix} \tag{6.2.15}$$

式中 $\mathbf{A}_{\text{Тр}1}$、$\mathbf{A}_{\text{Тр}i}$——第一条总流路和第$i$流路的总矩阵；

$\mathbf{B}_{\Sigma i}=(\mathbf{A}_{\text{Тр}i}\mathbf{A}_{\text{вых}i})^{-1}$；$\mathbf{A}_{\Sigma 1}=\mathbf{A}^{-1}_{\text{вх}1}\mathbf{A}_{\text{Тр}1}$。

将关系式(6.2.14)和(6.2.15)中的第一个方程分离出来

$$\delta\bar{y}_{1\text{вх}}=\mathbf{A}_{\Sigma 1-11}\delta\bar{p}_1(1)+\mathbf{A}_{\Sigma 1-12}\delta\bar{G}_1(1); \tag{6.2.16}$$

$$\delta\bar{y}_{i\text{вых}}=\mathbf{B}_{\Sigma i-11}\delta\bar{p}_i(0)+\mathbf{B}_{\Sigma i-12}\delta\bar{G}_i(0). \tag{6.2.17}$$



对$\delta\bar{G}_i(0)$解方程(6.2.17)，再将该变化量代入类似于分支方程的流量平衡方程$\delta\bar{G}_1(1)=\sum_{i=2}^{m}(G_1/G)\delta\bar{G}_i(0)$，得

$$\delta\bar{G}_1(1)=\sum_{i=2}^{m}\frac{G_i}{G}\left[\frac{1}{B_{\Sigma i-12}}\delta\bar{y}_{i\text{вых}}-\frac{\mathbf{B}_{\Sigma i-11}}{\mathbf{B}_{\Sigma i-12}}\delta\bar{p}_i(0)\right] \tag{6.2.18}$$

将关系式(6.2.18)代入方程(6.2.16)，考虑到分支压力相等的一般条件$\delta\bar{p}(1)=\delta\bar{p}_i(0)$，即可求出把分支压力变化幅值$\delta\bar{p}_1(1)$同干扰量联系起来的关系式

$$\delta\bar{p}_1(1)=\frac{\delta\bar{y}_{1\text{вх}}-A_{\Sigma 1-12}\sum_{i=2}^{m}[G_i/(GB_{\Sigma i-12})]\delta\bar{y}_{i\text{вых}}}{A_{\Sigma 1-11}-A_{\Sigma 1-12}\sum_{i=2}^{m}[G_i/(GB_{\Sigma i-12})]} \tag{6.2.19}$$

总流路出口处的分支进口流量变化幅值$\delta\bar{G}_1(1)$可按公式(6.2.18)求出，这时该公式中要代入由关系式(6.2.19)确定的分支压力变化幅值$\delta\bar{p}_i(0)=\delta\bar{p}_1(1)$。由矩阵关系式(6.2.14)第二个方程可得

$$\delta\bar{G}_1(0)=\mathbf{A}_{\Sigma 1-21}\delta\bar{p}_1(1)+\mathbf{A}_{\Sigma 1-22}\delta\bar{G}_1(1) \tag{6.2.20}$$

借助于关系式(6.2.20)，通过已知的$\delta\bar{p}_1(1)$和$\delta\bar{G}_1(1)$变化幅值便可求出流路入口流量变化量$\delta\bar{G}_1(0)$。分支后的各流路出口截面流量与压力的变化幅值可利用方程(6.2.17)：

$$\delta\bar{G}_i(1)=\frac{1}{\mathbf{B}_{\Sigma i-12}}\delta\bar{y}_{i\text{вых}}-\frac{\mathbf{B}_{\Sigma i-11}}{\mathbf{B}_{\Sigma i-12}}\delta\bar{p}_i(0)$$

和以下边界条件(6.2.15)求出：

$$\delta\bar{p}_i(1)=\gamma_{i1\text{вых}}\delta\bar{y}_{i\text{вых}}+\psi_{i\text{вых}}\delta\bar{G}_i(1).$$

所得关系式可将流路各压力和流量变化幅值同外部干扰量幅

值联系起来。在该情况下可作为外部干扰的有气路(燃气发生器、燃烧室)压力偏差、分支压力偏差，控制元件流通截面积的改变等等。

## 6.3 气路模型

对于绝热过程和瞬时完全混合过程，液体火箭发动机(燃气发生器、燃烧室)各气路分段的方程已列于第三章。为将这些方程引入发动机模型，只需对各参数和系数的变化量标注好相应的下标。例如，按图1.1上各位置的编号考虑到下标的改变，对于绝热过程下燃气发生器的方程(3.2.8)和(3.2.9)(如果可以将该燃气发生器看作是由一个分段组成的话)可写作

$$\frac{\tau_1}{\kappa_{\Gamma\Gamma}}\frac{\mathrm{d}\delta p_{\Gamma\Gamma}}{\mathrm{d}t}+(1+\varepsilon_{\mathrm{T}})\delta p_{\Gamma\Gamma}-\left(\psi_{\Gamma\Gamma}+\frac{K_{m\Gamma\Gamma}}{K_{m\Gamma\Gamma}+1}\right)$$

$$\times\delta G_{\mathrm{ок1}}(t-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})+\left(\psi_{\Gamma\Gamma}-\frac{1}{K_{m\Gamma\Gamma}+1}\right)\delta G_{\Gamma 1}(t-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})$$

$$+\frac{1}{2}\psi_{\Gamma\Gamma}[\delta G_{\mathrm{ок1}}(t-\tau_1-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})-\delta G_{\Gamma 1}(t-\tau_1-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})]$$

$$+\frac{\kappa_{\Gamma\Gamma}-1}{2\kappa_{\Gamma\Gamma}}[\delta p_{\Gamma\Gamma}-\delta p_{\Gamma\Gamma}(t-\tau_1)]-\varepsilon_{\mathrm{T}}\delta p_{\Gamma\mathrm{a}3}=0; \tag{6.3.1}$$

$$\delta T_{\mathrm{T}}-\psi_{\Gamma\Gamma}[\delta G_{\mathrm{ок1}}(t-\tau_1-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})-\delta G_{\Gamma 1}(t-\tau_1-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})]$$

$$-\frac{\kappa_{\Gamma\Gamma}-1}{\kappa_{\Gamma\Gamma}}[\delta p_{\Gamma\Gamma}-\delta p_{\Gamma\Gamma}(t-\tau_1)]=0, \tag{6.3.2}$$

式中 $\tau_1$、$\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma}$——液态组元在燃气发生器中停留时间和转化为气体的时间；$\psi_{\Gamma\Gamma}$——燃气发生器内燃气温度与组元混合比关系曲



线的无量纲斜率；$\varepsilon_{\mathrm{T}}$——涡轮流量特性曲线斜率；$\kappa_{\Gamma\Gamma}$——燃气发生器燃气绝热指数；$\delta T_{\mathrm{T}}$——涡轮入口温度变化量。

可以写出绝热过程下燃气导管、燃烧室的类似方程，还可以写出瞬时完全混合过程下所有这些组件的方程。

列入方程(6.3.1)的有同一种组元的流量变化量，但它们有不同的延迟期，这使建立发动机总模型复杂起来。为简化起见，现对温度变化量方程加以改变。不在气路出口，而在入口求出该温度的变化。现写出

$$\delta T_{\Gamma\Gamma}-\psi_{\Gamma\Gamma}[\delta G_{\mathrm{ок1}}(t-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})-\delta G_{\Gamma 1}(t-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})]=0 \tag{6.3.3}$$

借助关系式(6.3.3)将温度变化量引入方程(6.3.1)，得

$$\frac{\tau_1}{\kappa_{\Gamma\Gamma}}\frac{\mathrm{d}\delta p_{\Gamma\Gamma}}{\mathrm{d}t}+(1+\varepsilon_{\mathrm{T}})\delta p_{\Gamma\Gamma}-\delta T_{\Gamma\Gamma}+\frac{1}{2}\delta T_{\Gamma\Gamma}(t-\tau_1)$$

$$-\frac{K_{m\Gamma\Gamma}}{K_{m\Gamma\Gamma}+1}\delta G_{\mathrm{ок1}}\times(t-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})-\frac{1}{K_{m\Gamma\Gamma}+1}$$

$$\times\delta G_{\Gamma 1}(t-\tau_{\Gamma\Gamma\Gamma})+\frac{\kappa_{\Gamma\Gamma}-1}{2\kappa_{\Gamma\Gamma}}[\delta p_{\Gamma\Gamma}-\delta p_{\Gamma\Gamma}(t-\tau_1)]$$

$$-\varepsilon_{\mathrm{T}}\delta p_{\Gamma\mathrm{a}3}=0 \tag{6.3.4}$$

若以前使用过的条件 $L_{\Sigma 1}\ll\lambda_1$ 对于各单个气路分段或对于整个气路不能成立，则(6.3.1)～(6.3.4)方程这一类型的、具有集中参数的气路数学模型便不能利用，而需要转为具有分布参数的气路数学模型。对于足够复杂的发动机各气路，需将其分为许多分段，建立数学模型最方便的方法可以认为是矩阵法[4,6,7]或使用信号流图的拓扑法[6]。

现对频率范围内建立气路数学模型的矩阵法作一详述[6]。通过计算可以得出粘性气体一维非等温流的声学特性。在所列公式内把温度变化量用作变量。在绝热流动的条件下，用熵的变化量

作为变量较为方便。在第三章中非等温流气路(即熵波气路)声学特性是用六端网络方程(3.6.15)和(3.6.16)描述的，而同变换成(3.6.9)式的熵的变化幅值有关的温度变化幅值是作为变量进入该六端网络方程的：

$$\delta\bar{s} = \delta\bar{T} - [(\kappa-1)/\kappa]\delta\bar{p} \qquad (6.3.5)$$

对于第$i$气路分段利用关系式(3.6.15)和(6.3.5)可得六端网络方程的新的表示形式

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_i(0)\\ \delta\bar{p}_i(0)\\ \delta\bar{s}_i(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i+H_i & (F_i-H_i)/(\kappa Ma_i) & 0\\ \kappa Ma_i(F_i+H_i) & F_i+H_i & 0\\ 0 & 0 & \exp[i\bar{\omega}/(Ma_i)]\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\delta\bar{u}_i(1)\\ \delta\bar{p}_i(1)\\ \delta\bar{s}_i(1)\end{bmatrix} = \mathbf{A}_i[\delta\bar{u}_i(1)\delta\bar{p}_i(1)\delta\bar{s}_i(1)]^T \qquad (6.3.6)$$

式中 $F_i = 0.5\exp[i\bar{\omega}_i/(1+Ma_i)]$；$H_i = 0.5\exp[-i\bar{\omega}_i/(1-Ma_i)]$；$\bar{\omega}_i = \omega L_i/a_i$；$Ma_i = u_i/a_i$；$L_i$、$a_i$、$u_i$——气路分段的长度、该分段内气体的声速和速度；$T$——矩阵置换符号；$\mathbf{A}$——六端网络矩阵。

方程(6.3.6)可描述圆柱形管道分段内声波和熵波的传播过程，而不考虑因粘度、导热性和扩散而引起的这些波的耗散。变截面流路可分为许多分段，其中每一分段都可认为是圆柱形，而且因为在推导方程(6.3.6)时，曾假设气体是非粘性的，所以必要时，摩擦损失可用各分段边界上集中的局部阻力来模拟。

这样一来，没有分支的气路便可用一组最简单的元件——圆口柱形分段和局部阻力——来模拟°气路分段应这样来划分，使得第$i$分段出口处气流参数的偏差等于下一分段(第$(i+1)$分段)进处同一参数的偏差。为要确定由$n$个分段组成的全气路的矩阵，



可采用(2.8.16)公式这一类型的矩阵连乘的公式。必须把气路尽头的元件也包括在这些分段中去。这些元件的方程可写作六端网络的形式，而在这些网络中应将边界条件考虑进去(见6.2节)。在此情况下得出的矩阵方程组成一个封闭的代数方程组，可描述气路的频率特性。若气路有分支，则利用矩阵代数参考资料在频率范围内建立该气路的数学模型是不复杂的。

气体沿气路过流部分的参数稳定值，在考虑摩擦损失的情况下，可借助气动函数来确定[1]。可将由一分段到另一分段的过渡截面上每个$j$分段的压力损失集中起来，并将该损失用损失系数$\xi_j$来表征。系数$\xi_j$用变截面气路初始截面处迎面气流速度头的百分率进行测量。对于$j$分段气路——两圆柱形分段之间的局部阻力(通常具有不同的截面积)可写出以下平衡方程：

连续方程

$$\rho_j(0)u_j(0)F_j(0) = \rho_j(1)u_j(1)F_j(1) \qquad (6.3.7)$$

冲量方程

$$p_j^*(0) = p_j^*(1) + \xi_j\rho_H u_H^2/2 \qquad (6.3.8)$$

能量方程(忽略节流效应)

$$T_j^*(0) = T_j^*(1) \qquad (6.3.9)$$

式中 0和1——圆柱形分段进出口坐标；$\rho_j$、$u_j$、$p_j^*$、$T_j^*$——第$j$分段上气体的密度、速度、滞止压力和滞止温度；$F_j$——第$j$分段气路的截面积；$\rho_H$、$u_H$——变截面气路分段起点处气体的密度和速度(对于局部阻力，通常用入口处的速度头损失来标定)；$\xi_j$——损失系数。

将方程(6.3.7)线性化，并考虑到已线性化的、将气体密度变化量同其压力和熵的变化量联系起来的热力学关系式$\delta\bar{\rho} = (1/\kappa)\times\delta\bar{p} - \delta\bar{s}$，得

$$\delta\bar{u}_j(0) + (1/\kappa)\delta\bar{p}_j(0) - \delta\bar{s}_j(0) = \delta\bar{u}_j(1) + (1/\kappa)\delta\bar{p}_j(1) - \delta\bar{s}_j(1) \qquad (6.3.10)$$

线性化方程(6.3.8)时，必须考虑到存在着系数$\xi_j$同变流通截

面的分段起始端气流马赫数$\bar{M}a_H$联系起来的关系式，该关系式经线性化后有以下形式：

$$\delta\xi_j = \chi_j \delta\bar{M}a_H \qquad (6.3.11)$$

式中 $\chi_j = (\bar{M}a_H/\xi_j)(\partial\xi_j/\partial\bar{M}a_H)$；$\delta\xi_j$、$\delta\bar{M}a_H$——分段入口阻力系数和马赫数的变化幅值。

马赫数变化量同其它参数的关系由以下方程表示：

$$\delta\bar{M}a = \delta\bar{u} - \frac{\kappa-1}{2\kappa}\delta\bar{p} - \frac{1}{2}\delta\bar{s} \qquad (6.3.12)$$

该方程通过将关系式$Ma = u/a; a = \sqrt{\kappa RT}$线性化得到，式中$a$——声速。

方程(6.3.8)含有滞止压力$p^*$，该压力通过静压$p$和马赫数$Ma$现时值表示[1]：

$$p^* = p\left(1 + \frac{\kappa-1}{2}Ma^2\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \qquad (6.3.13)$$

将(6.3.13)式线性化，而后将(6.3.12)式代入该式，得

$$\delta\bar{p}^* = \kappa\gamma\delta\bar{u} + [1-\gamma(\kappa-1)/\kappa]\delta\bar{p} - (\kappa\gamma/2)\delta\bar{s} \qquad (6.3.14)$$

式中 $\delta\bar{p}^*$——总压的无量纲变化幅值；

$$\gamma = Ma^2/[1+(\kappa-1)Ma^2/2]$$

最后，考虑关系式(6.3.10)～(6.3.12)和(6.3.14)，再将(6.3.8)式线性化，得

$$\begin{aligned}&\kappa\gamma_{j1}\delta\bar{u}_j(0) + [1-\gamma_{j1}(\kappa-1)/\kappa]\delta\bar{p}_j(0) - (\kappa\gamma_{j1}/2)\delta\bar{s}_j(0)\\&= (p^*_{j2}/p^*_{j1})\{\kappa\gamma_{j2}\delta\bar{u}_j(1) + [1-\gamma_{j2}(\kappa-1)/\kappa]\delta\bar{p}_{j(1)}\\&\quad - (\kappa\gamma_{j2}/2)\delta\bar{s}_j(1)\} + [(p^*_{j1}-p^*_{j2})/p^*_{j1}]\{(2+\chi_{j1})\delta\bar{u}_H\\&\quad + [1-(\kappa-1)(2+\chi_{j1})/(2\kappa)]\delta\bar{p}_H - 0,5(2+\chi_{j1})\delta\bar{s}_H\}\end{aligned} \qquad (6.3.15)$$

式中 $\gamma_{j1} = Ma^2_{j1}/[1+(\kappa-1)Ma^2_{j1}/\kappa]$；$\gamma_{j2} = Ma^2_{j2}/[1+(\kappa-1)Ma^2_{j2}/\kappa]$；$\delta\bar{p}_H$、$\delta\bar{u}_H$、$\delta\bar{s}_H$——变流通截面积气路分段起始端参数无量纲变化幅值；带下标“j1”和“j2”的量值同第$j$流路分段



进出口气流(局部阻力)参数有关。

以无量纲温度变化幅值$\delta T^*_j(0) = \delta T^*(1)$形式表示的线性化能量方程(6.3.9)可进行变换，这时需使用以下气动关系[1]：

$$T^* = T[1+(\kappa-1)Ma^2/\kappa]$$

该关系式经过线性化后有以下形式：

$$\delta T^* = \delta T + (\kappa-1)\gamma\delta Ma \qquad (6.3.16)$$

将能量方程代入关系式(6.3.16)，同时利用(6.3.12)式和诸热力学关系式，可求出线性化能量方程，此方程内有以前引入的局部阻力入口（下标$j1$）和出口（下标“$j2$”）气流参数变化幅值

$$\begin{aligned}&(\kappa-1)\gamma_{j1}\delta\bar{u}_j(0) + [(\kappa-1)/\kappa][1-(\kappa-1)\gamma_{j1}/2]\delta\bar{p}_j(0)\\&+ [1-(\kappa-1)\gamma_{j1}/2]\delta\bar{s}_j(0) = (\kappa-1)\gamma_{j2}\delta\bar{u}_j(1)\\&+ [(\kappa-1)/\kappa][1-(\kappa-1)\gamma_{j2}/2]\delta\bar{p}_j(1)\\&+ [1-(\kappa-1)\gamma_{j2}/2]\delta\bar{s}_j(1)\end{aligned} \qquad (6.3.17)$$

用解析的办法相对于入口参数$\delta\bar{u}_j(0)$、$\delta\bar{p}_j(0)$、$\delta\bar{s}_j(0)$变化幅值解连续方程(6.3.10)、冲量方程(6.3.15)和能量方程(6.3.17)是困难的，因这些参数容量很大。由于所有气路分段的总压损失是用该分段入口气体速度头百分率表示的，因而(6.3.15)式含有变截面积的分段入口气流参数变化量，考虑到这些情况，该运算最好是用数值法来完成。用数值法解出方程组(6.3.10)、(6.3.15)和(6.3.17)，可得到一组线性方程，而这些方程的矩阵表示有以下形式：

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_j(0)\\ \delta\bar{p}_j(0)\\ \delta\bar{s}_j(0)\end{bmatrix} = \mathbf{A}_j\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_j(1)\\ \delta\bar{p}_j(1)\\ \delta\bar{s}_j(1)\end{bmatrix} + \mathbf{D}_j\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_H\\ \delta\bar{p}_H\\ \delta\bar{s}_H\end{bmatrix} \qquad (6.3.18)$$

方程(6.3.18)可把气路各圆柱形分段之间的局部阻力当作主动六端网络来描述。还可以引入形式补充方程$\delta\bar{u}_H = \delta\bar{u}_H$；$\delta\bar{p}_H = \delta\bar{p}_H$；$\delta\bar{s}_H = \delta\bar{s}_H$，将(6.3.18)关系式变换为被动十二端网络方

程：

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{u}_j(0) \\ \delta\bar{p}_j(0) \\ \delta\bar{s}_j(0) \\ \delta\bar{u}_H \\ \delta\bar{p}_H \\ \delta\bar{s}_H \end{bmatrix} = A_j^c \begin{bmatrix} \delta\bar{u}_j(1) \\ \delta\bar{p}_j(1) \\ \delta\bar{s}_j(1) \\ \delta\bar{u}_H \\ \delta\bar{p}_H \\ \delta\bar{s}_H \end{bmatrix} \qquad (6.3.19)$$

矩阵$A_j^c$头三行的第一个元素同矩阵$A_j$该三行的对应元素相一致。矩阵$A_j^c$头三行的其它元素同矩阵$D_j$的对应元素相一致。矩阵$A_j^c$第四、第五和第六行沿对角线各元素为1，而其余元素为零。对于由方程(6.3.6)确定的、圆柱形分段的矩阵$A_j$也可简化成这一形式，只是在将该方程化为十二端网络的方程(6.3.19)时，应将单位矩阵代替$D_j$矩阵代入矩阵$A_j^c$。依次连乘所有圆柱形分段和局部阻力的矩阵$A_j^c$，即可求出把气路进出口的速度、压力和熵的幅值联系在一起的气路传递函数。

为要使所得方程组封闭，必须给气路方程加上初始和边界条件。可取表示燃气发生器（液-液方案液体火箭发动机燃烧室）特性的入口条件作为例子，氧化剂和燃料在其中燃烧形成气体。气路分段入口温度取决于氧化剂流量$G_{ок1}$和燃料流量$G_{г1}$的比值：$T_{гг}=f(G_{ок1}/G_{г1})$。一次近似时，转换（燃烧）时间可忽略不计。考虑到理想气体状态方程时，线性化形式的入口流量平衡方程可写作以下形式：

$$\delta\bar{G}_1(0)=\bar{G}_{ок1}\delta\bar{G}_{ок1}+\bar{G}_{г1}\delta\bar{G}_{г1}$$
$$=\delta\bar{u}_1(0)+\delta\bar{p}_1(0)-\delta\bar{T}_1(0) \qquad (6.3.20)$$

式中　$\delta\bar{G}_1(0)$、$\delta\bar{u}_1(0)$、$\delta\bar{p}_1(0)$、$\delta\bar{T}(0)$——气路入口，即第一分段入口处气体参数变化幅值；$\bar{G}_{ок1}=G_{ок1}/(G_{ок1}+G_{г1})$；$\bar{G}_{г1}=G_{г1}/(G_{ок1}+G_{г1})$；$G_{ок1}$、$\delta\bar{G}_{ок1}$、$G_{г1}$、$\delta\bar{G}_{г1}$——燃气发生器入口液体组元流量平均值和变化幅值（上标有“—”的）。



方程(6.3.20)是燃气发生器入口第一边界条件。气体温度变化量同组元流量变化幅值的关系可用以下关系式描述：

$$\delta\bar{T}_1(0)=\psi_{гг}(\delta\bar{G}_{ок1}-\delta\bar{G}_{г1})=\delta\bar{s}_1(0)+\frac{\kappa_{гг}-1}{\kappa_{гг}}\delta\bar{p}_1(0) \qquad (6.3.21)$$

式中　$\delta\bar{s}_1(0)$——燃气发生器入口燃气熵的变化幅值。

将(6.3.21)式代入(6.3.20)式求出燃气发生器入口($\bar{x}=0$)第二边界条件

$$\delta\bar{p}_1(0)+\delta u_1(0)=(\bar{G}_{ок}+\psi_{гг})\delta\bar{G}_{ок1}+(\bar{G}_{г}-\psi_{гг})\delta\bar{G}_{г1} \qquad (6.3.22)$$

为确定气路出口第三边界条件，可假设该处存在一平滑入口的局部阻力，其延伸长度与声波和熵波长度相比不大。亚临界压差下通过该阻力的流量由公式(3.2.5)确定。对于燃气发生器气路第$n$分段端部，该公式加上新符号经线性化后写作以下形式：

$$\delta\bar{G}_n(1)=(1+\varepsilon_г)\delta\bar{p}_n(1)-\varepsilon_т\delta\bar{p}_{газ}-\frac{1}{2}\delta\bar{T}_n(1) \qquad (6.3.23)$$

式中　$\delta\bar{G}_n(1)$、$\delta\bar{p}_n(1)$、$\delta\bar{T}_n(1)$——涡轮前最后一段气路，即第$n$分段气路出口处燃气发生器燃气参数变化幅值；$\varepsilon_т$——涡轮喷嘴流量与压比关系曲线的斜率[见公式(3.2.7)]。

利用线性化连续方程，其中代入了气体状方程$\delta\bar{G}=\delta\bar{p}+\delta\bar{u}-\delta\bar{T}$和(3.6.10)式那样的关系式，可由式(6.3.23)得第$n$气路分段出口($x_n=1$)的边界条件

$$\delta\bar{u}_n(1)=\varepsilon_т\delta\bar{p}_n(1)-\varepsilon_т\delta\bar{p}_{газ}+0{,}5\delta\bar{s}_n(1)+$$
$$+[(\kappa-1)/(2\kappa)]\delta\bar{p}_n(1) \qquad (6.3.24)$$

方程(6.3.23)、(6.3.24)描述的局部阻力可能在气路内。在该情况下，方程(6.3.24)可变换为六端网络方程，对于该方程现忽

略节流效应，取$T(0)=T(1)$。对于作为第$i$分段气路的阻力引入新的代号，利用线性化状态方程$\delta\rho=\delta P-\delta T$和关系式(6.3.21)，得

$$\delta\bar{u}_i(0)=\frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i}\frac{u_{i1}}{u_{i2}}\delta\bar{u}_i(1)+\frac{\kappa-1}{2\kappa(1+\varepsilon_i)}\delta\bar{p}_i(1)$$

$$+\frac{1}{2(1+\varepsilon_i)}\delta\bar{s}_i(1)$$

$$\delta\bar{p}_i(0)=\frac{1}{1+\varepsilon_i}\frac{u_{i1}}{u_{i2}}\delta\bar{u}_i(1)+\left(1-\frac{\kappa-1}{2\kappa(1+\varepsilon_i)}\right)$$

$$\times\delta\bar{p}_i(1)-\frac{1}{2(1+\varepsilon_i)}\delta\bar{s}_i(1) \qquad (6.3.25)$$

$$\delta\bar{s}_i(0)=-\frac{\kappa-1}{\kappa(1+\varepsilon_i)}\frac{u_{i1}}{u_{i2}}\delta\bar{u}_i(1)+\frac{(\kappa-1)^2}{2\kappa^2(1+\varepsilon_i)}$$

$$\times\delta\bar{p}_i(1)+\left(1+\frac{\kappa-1}{2\kappa(1+\varepsilon_i)}\right)\delta\bar{s}_i(1)$$

式中 $u_{i1}$、$u_{i2}$——第$i$分段进出口平均速度；$\varepsilon_i$——第$i$分段关系曲线斜率。

如果气路有分支，该分支应反映到其模型内。现忽略抽气岔道沿气路轴线的长度并认为分岔截面前后的诸段气路为圆柱形（或以多个圆柱形分段代替），气体平均速度不变，气流马赫数不大。根据最后一个假设则可忽略分岔截面的压力损失，并假设气体温度，也意味着其熵，保持不变，即

$$\delta\bar{p}_i(1)=\delta\bar{p}_{i+1}(0);\ \delta\bar{s}_i(1)=\delta s_{i+1}(0) \qquad (6.3.26)$$

分岔截面的第三个关系式是与分岔截面前后气体流量（速度）有关的质量平衡方程

$$G_i=G_{i+1}+G_{отбi}$$

或其线性化形式



$$G_i\delta\bar{G}_i(1)=G_{i+1}\delta\bar{G}_{i+1}(0)+G_{отбi}\delta\bar{G}_{отбi} \qquad (6.3.27)$$

式中 $G_i$、$G_{i+1}$、$G_{отбi}$——分岔截面前后和分岔截面上各流量的平均值；$\delta\bar{G}_i(1)$、$\delta\bar{G}_{i+1}(0)$、$\delta\bar{G}_{отбi}$——这些流量的变化幅值。

分岔截面前后气路的流量由(6.3.20)型关系式同气流其它参数相联系，而分岔截面流量的变化幅值则决定于气路的结构特点。

若从分岔截面引出的不是一条而是多条岔道，则相应地在方程(6.3.27)右边应列入更多的带有各自的系数的分岔流量变化项。方程(6.3.26)和(6.3.27)应列入分支六端网络方程组。用连乘支路各单元的矩阵的方法描述出作为A参数六端网络的气路的所有支路，利用质量平衡方程(6.3.27)可得类似于以前求出的关系式(6.2.18)和(6.2.19)那样的液路方程。这种办法仅适于气体自一条气路流出在分支后进入两条或更多条气路的那样一种方案。如果情况相反（这在液体火箭发动机中很少遇到），即气体自数条气路流出汇集于一条气路，则需要热平衡方程类型的补充关系式，以确定混合后气体的温度和熵。

## 6.4 涡轮泵

当(4.1.13)式类型的涡轮效率线性化关系式为已知，涡轮泵方程(4.3.6)可描述涡轮泵的动态特性。(4.1,13)式可从关系式$\eta_T=f_2(\pi_T,n/\sqrt{T_T})$中得出。也可有以比值$u/c_1$来确定涡轮效率的其它关系式，式中$u$——角速度；$c_1$——气体自涡轮喷嘴喷出的速度。将(4.1.13)和(4.1.14)两式中相同的一些参数变化时的系数作比较可求出这些方程中系数之间的关系：$\psi_n=\psi_{e1}$，$\psi_p=-0.5\beta_T-\psi_{e1}$。若考虑涡轮的反力度以及(4.1.10)和(4.1.8)关系式，并以惯用的基本变量—燃气发生器头部附近温度的变化量〔取$\bar{x}=1$，按(3.6.12)式确定〕来表示涡轮附近温度的变化量，则可求

出带有二级泵的发动机综合方案涡轮泵动态方程的最终形式

$$\left(\tau_{\text{ТНА}}+\frac{N_{\text{ок.н}}}{N_{\text{Т}}}\tau^{(\text{M})}_{\text{окп}}+\frac{N_{\text{г.н}}}{N_{\text{Т}}}\tau^{(\text{M})}_{\text{гп}}+\frac{N_{\text{ок.н.д}}}{N_{\text{Т}}}\right.$$

$$\left.\times\tau^{(\text{M})}_{\text{ок.пд}}+\frac{N_{\text{г.н.д}}}{N_{\text{Т}}}\tau^{(\text{M})}_{\text{гпд}}\right)\frac{\text{d}\delta n}{\text{d}t}=\left(\frac{N_{\text{г.н}}}{N_{\text{Т}}}\psi^{(\text{N})}_{\text{гп}}\right.$$

$$+\frac{N_{\text{ок.н}}}{N_{\text{Т}}}\psi^{(\text{N})}_{\text{окп}}+\frac{N_{\text{ок.н.д}}}{H_{\text{Т}}}\psi^{(\text{N})}_{\text{окпд}}+\frac{N_{\text{г.н.д}}}{N_{\text{Т}}}\psi^{(\text{N})}_{\text{гпд}}+\varepsilon_{\text{Т}}r_1$$

$$\left.-\psi_{\text{c1}}\right)\delta n-\left[\frac{N_{\text{ок.н}}}{N_{\text{Т}}}\cdot\frac{G_{\text{ок1}}}{G_{\text{ок}}}\psi^{(\text{N})}_{G_{\text{ок}}}+\frac{N_{\text{ок.н.д}}}{N_{\text{Т}}}\psi^{(\text{N})}_{G_{\text{ок.д}}}\right]$$

$$\times\delta G_{\text{ок1}}+\left(\frac{N_{\text{ок.н}}}{N_{\text{Т}}}\cdot\frac{G_{\text{ок1}}}{G_{\text{ок}}}\tau^{(\text{M})}_{\text{ок.н}}+\frac{N_{\text{ок.н.д}}}{N_{\text{Т}}}\tau^{(\text{M})}_{\text{ок.н.д}}\right)$$

$$\times\frac{\text{d}\delta G_{\text{ок1}}}{\text{d}t}-\frac{N_{\text{ок.н}}}{N_{\text{Т}}}\cdot\frac{G_{\text{ок3}}}{G_{\text{ок}}}\psi^{(\text{N})}_{G_{\text{ок}}}\delta G_{\text{ок3}}+\frac{N_{\text{ок.н}}}{N_{\text{Т}}}$$

$$\times\frac{G_{\text{ок3}}}{G_{\text{ок}}}\tau^{\text{M}}_{\text{ок.н}}\frac{\text{d}\delta G_{\text{ок3}}}{\text{d}t}-\left(\frac{N_{\text{г.н}}}{N_{\text{Т}}}\cdot\frac{G_{\text{г1}}}{G_{\text{г}}}\psi^{(\text{N})}_{G_{\text{г}}}\right.$$

$$\left.+\frac{N_{\text{г.н.д}}}{N_{\text{Т}}}\psi^{(\text{N})}_{G_{\text{г.д}}}\right)\delta G_{\text{г1}}+\left(\frac{N_{\text{г.н}}}{N_{\text{Т}}}\cdot\frac{G_{\text{г1}}}{G_{\text{г}}}\tau^{(\text{M})}_{\text{г.н}}+\frac{N_{\text{г.н.д}}}{N_{\text{Т}}}\right.$$

$$\left.\times\tau^{(\text{M})}_{\text{г.н.д}}\right)\frac{\text{d}\delta G_{\text{г1}}}{\text{d}t}-\frac{N_{\text{г.н}}}{N_{\text{Т}}}\cdot\frac{G_{\text{г3}}}{G_{\text{г}}}\psi^{(\text{N})}_{G_{\text{г}}}\delta G_{\text{г3}}+\frac{N_{\text{г.н}}}{N_{\text{Т}}}$$

$$\times\frac{G_{\text{г3}}}{G_{\text{г}}}\tau^{(\text{M})}_{\text{г.н}}\frac{\text{d}\delta G_{\text{г3}}}{\text{d}t}+\left[1-\varepsilon_{\text{Т}}\left(r_3-\frac{1}{2}r_1\frac{\kappa_{\text{гг}}-1}{\kappa_{\text{гг}}}-\frac{1}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times r_1\beta_{\text{Т}}-1\right)+\frac{\kappa_{\text{гг}}-1}{2\kappa_{\text{гг}}}(1-\psi_{\text{c1}})+\beta_{\text{Т}}\left(1-\frac{1}{2}\psi_{\text{c1}}\right)\right]\delta p_{\text{гг}}$$

$$-\frac{\kappa_{\text{гг}}-1}{2\kappa_{\text{гг}}}(1-\psi_{\text{c1}}+\varepsilon_{\text{Т}}r_1)\times\delta p_{\text{гг}}(t-\tau_1)$$



$$-\left[\varepsilon_{\text{Т}}\left(r_2+\frac{1}{2}\times\beta_{\text{Т}}r_1\right)+\beta_{\text{Т}}\left(1-\frac{1}{2}\psi_{\text{c1}}\right)\right]\delta p_{\text{газ}}$$

$$+\frac{1}{2}(1-\psi_{\text{c1}}+\varepsilon_{\text{Т}}r_1)\delta T_{\text{гг}}(t-\tau_1)\qquad(6.4.1)$$

式中 $\tau_{\text{ТНА}}=\pi^2J_{\text{п}}{}^2/(900N_{\text{Т}})$，$G_{\text{ок1}}$、$G_{\text{ок3}}$、$G_{\text{г1}}$、$G_{\text{г3}}$——燃气发生器和燃烧室的组元流量平均值；$G_{\text{ок}}=G_{\text{ок1}}+G_{\text{ок3}}$；$G_{\text{г}}=G_{\text{г1}}+G_{\text{г3}}$；$J$——惯性矩；下标“ок.н”、“г.н”、“ок.н.д”和“г.н.д”指氧化剂和燃料主泵和辅助泵；上标(N)和(M)分别指功率和力矩特性。

(6.4.1)方程考虑的是两组元都送入燃烧室的情况。对于只有一个液体组元送入燃烧室的发动机系统方案，则另一组元流量（$G_{\text{ок3}}$或$G_{\text{г3}}$）含有的系数取其等于零。前曾假设涡轮泵转子作为一个整体转动。若涡轮泵有两根轴，其相互之间用弹性轴连接，则可能有轴的扭转振动，这时，涡轮泵的一部分(泵和涡轮)相对其另一部分（其它几个泵）作旋转运动。为考虑扭转振动，涡轮泵可分为两个部件—两个用弹性轴连接起来的刚性轴。为明确起见，假设一根轴上装有氧化剂泵和涡轮，另一根轴上装有两台泵（主泵和辅助泵），再对于其中每一轴写出动量矩方程

$$J_{\text{ок}}\frac{\text{d}\omega_{\text{ск}}}{\text{d}t}=M_{\text{Т}}-M_{\text{ок.н}}-c(\varphi_{\text{ок}}-\varphi_{\text{г}})\qquad(6.4.2)$$

$$J_{\text{г}}\frac{\text{d}\omega_{\text{г}}}{\text{d}t}=c(\varphi_{\text{ок}}-\varphi_{\text{г}})-M_{\text{г.н}}-M_{\text{г.н.д}}\qquad(6.4.3)$$

式中 $J_{\text{ок}}$、$J_{\text{г}}$——氧化剂泵和燃料泵轴上转动部分的惯性矩；$\varphi_{\text{ок}}$、$\varphi_{\text{г}}$——氧化剂泵轴和燃料泵轴的旋转角；$c$——弹性连接轴的弹性系数；$\omega_{\text{ок}}$、$\omega_{\text{г}}$——氧化剂泵和燃料泵转动轴的角速度；$M_{\text{Т}}$、$M_{\text{ок.н}}$、$M_{\text{г.н}}$、$M_{\text{г.н.д}}$——涡轮发出的力矩、氧化剂泵轴力矩、燃料主泵和辅助泵轴的力矩。

考虑到轴的旋转角与转速$n_{\text{о.к}}$和$n_{\text{г}}$之间的关系：

$$n_{\text{о.к}}=\frac{60}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi_{\text{о.к}}}{\mathrm{d}t};\quad n_{\text{г}}=\frac{60}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi_{\text{г}}}{\mathrm{d}t}\qquad(6.4.4)$$

将力矩方程(6.4.2)和(6.4.3)线性化后并变换为参数的无量纲变化量，得

$$\frac{J_{\text{о.к}}n^2\pi^2}{900N_{\text{т}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta n_{\text{о.к}}}{\mathrm{d}t}=\delta N_{\text{т}}-\frac{N_{\text{о.к.н}}}{N_{\text{т}}}\delta N_{\text{о.к.н}}$$

$$-\frac{cn2\pi}{60N_{\text{т}}}(\delta\varphi'_{\text{о.к}}-\delta\varphi'_{\text{г}})-\left(1-\frac{N_{\text{о.к.н}}}{N_{\text{т}}}\right)\delta n_{\text{о.к}}\qquad(6.4.5)$$

$$\frac{J_{\text{г}}n^2\pi^2}{900N_{\text{т}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta n_{\text{г}}}{\mathrm{d}t}=\frac{N_{\text{г.н}}+N_{\text{г.н.д}}}{N_{\text{т}}}\delta n_{\text{г}}+\frac{cn2\pi}{60N_{\text{т}}}$$

$$\times\left(\delta\varphi'_{\text{о.к}}-\delta\varphi'_{\text{г}}\right)-\frac{N_{\text{г.н}}}{N_{\text{т}}}\delta N_{\text{г.н}}-\frac{N_{\text{г.н.д}}}{N_{\text{т}}}\delta N_{\text{г.н.д}}$$

(6.4.6)

式中 $\delta n_{\text{о.к}}$、$\delta n_{\text{г}}$——氧化剂和燃料泵轴转速无量纲变化量；$\delta\varphi'_{\text{о.к}}$、$\delta\varphi'_{\text{г}}$——氧化剂泵轴和燃料泵轴旋转角的有量纲的变化量（对这些旋转角未加规定值是因为没有合适的规定值）。

方程(6.4.5)和(6.4.6)可描述用弹性轴连接的涡轮泵两根轴的扭转振动。求方程(6.4.5)和(6.4.6)中描述涡轮和泵功率变化量各项的公式已列于第四章。

各组件相对于涡轮泵弹性轴是另一种配置方式时，考虑这些组件所产生力矩的项可由一方程转入另一方程。

将关系式(6.4.4)线性化，求出参数之间的关系：

$$\delta n_{\text{о.к}}=\frac{60}{2\pi n}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\varphi'_{\text{о.к}}}{\mathrm{d}t};\quad \delta n_{\text{г}}=\frac{60}{2\pi n}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\varphi'_{\text{г}}}{\mathrm{d}t}$$

(6.4.7)

线性化方程组(6.4.5)～(6.4.7)同$\delta N_{\text{т}}$和$N_{\text{нi}}$的方程一起可确定涡轮泵外部参数（燃气发生器压力与温度变化量、液体组元流量）改变时涡轮泵的频率传递函数。图6.1示出了在作用于弹



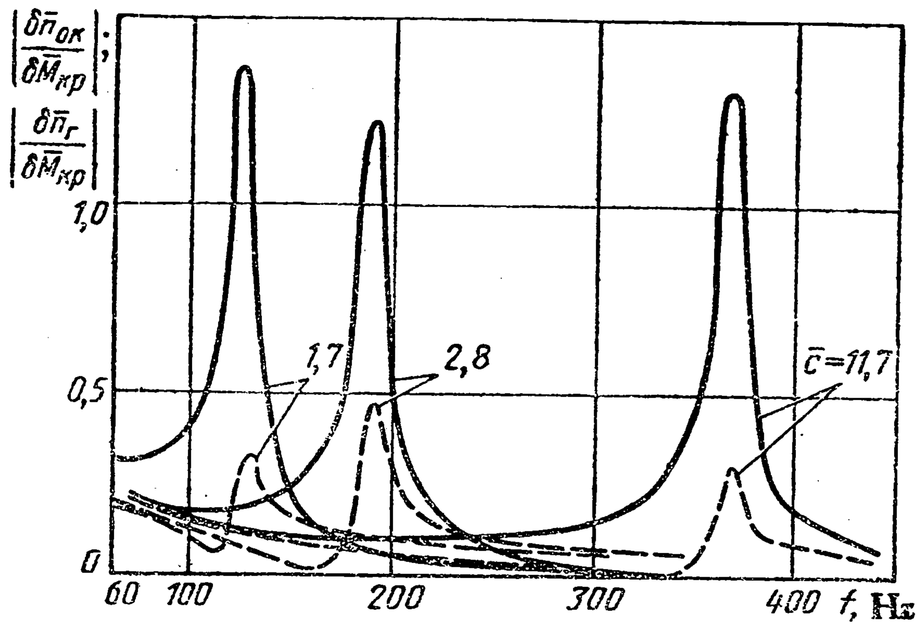



图6.1 有两个弹性轴连接的轴的涡轮泵的幅频特性曲线

——$\delta\bar{n}_{\text{ок}}/\delta\bar{M}_{\text{кр}}$

----$\delta\bar{n}_{\text{г}}/\delta\bar{M}_{\text{кр}}$

性轴的可变外部扭矩 $\delta M_{\text{кр}}$影响下用弹性轴连接两轴的涡轮泵的幅频特性。取$J_{\text{о.к}}=0.01\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_{\text{г}}=0.002\text{kg}\cdot\text{m}^2$和不同的值$\bar{c}=\bar{c}/M_{\text{т}}$。用弹性轴连接的两轴系统在涡轮泵幅频特性上有明显表现出的共振。在共振点附近燃料泵轴回转频率振幅比氧化剂泵轴振幅要小百分之几十。按$f_{\text{рез}}\sim\sqrt{\frac{}{\bar{c}}}$定律，共振频率随弹性轴弹性系数增大而增高。

## 6.5 液体火箭发动机频率传递函数的计算方法

上面论述了建立发动机主要组件（液路、气路、涡轮泵）数学模型的方法，其中有考虑和未考虑声学效应（对液路和气路而言）以及涡轮泵轴扭转振动的情况。用各单个组件模型可建立起发动机的数学模型。无调节系统的发动机通用系统图中(见图1.1)有涡轮泵的四条液路和三条气路。无调节器的发动机简化数学模型（不考虑声学效应和涡轮泵轴的扭转振动）有十个线性微分方程或代数方程。分析有调节器的发动机动态特性时，模型的方程数量会增大。如果把周期特解$\delta x_{\text{i}}=\delta\bar{x}_{\text{i}}\exp(i\omega t)$等代入所有方程（此处$\delta x_{\text{i}}$、$\delta\bar{x}_{\text{i}}$——第$i$个参数变化量和变化范围），则可将频率

范围内的动态方程化为矩阵方程

$$[i\omega\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\exp(-i\omega\tau)]\delta\overline{\mathbf{x}}=\mathbf{d}\delta\overline{\mathbf{y}} \qquad (6.5.1)$$

式中 $\mathbf{a}$——对参数变化量的导数的系数方阵；$\mathbf{b}$——参数变化量的系数的矩阵；$\mathbf{c}$——有滞后项的系数的矩阵；$\tau$——延迟矩阵；$\delta\overline{\mathbf{x}}$——发动机参数变化量的矢量(列)；$\mathbf{d}$——数学模型方程右边部分的各外部干扰作用系数的直角阵；$\delta\overline{\mathbf{y}}$——外部干扰（控制）作用变化量的矢量。

作为发动机外部干扰（控制）作用的是泵入口压力的变化和节流阀流通截面积的变化。通用系统图上按液路数有四个节流阀（见图1.1）。带有传动装置的节流阀是火箭控制系统同执行机构（发动机）之间的连接环节。涡轮泵中某个泵进口的压力振荡（$\delta p_{\text{о.к.вх}}$或$\delta p_{\text{г.вх}}$（见图1.1）是同火箭纵向振动有关连的外部干扰作用。

发动机组件动态方程是这样推导的，即保证方程中的每个变量不多于一种滞后。例如为消除气路模型内一个变量的两种不同的滞后，引入了温度变化量的补充方程。这样，系统的所有方程(6.5.1)都有一个统一的形式。

考虑了周期特解而得到的发动机参数振幅方程(6.5.1)是一些有复数系数的线性代数方程。方程(6.5.1)可把发动机参数稳态变化当作外部谐波干扰来描述，即这些方程可确定发动机的频率特性。在振幅为$\delta\bar{y}_j$的第$j$个干扰的影响下，求发动机第$i$个参数振幅$\delta\bar{x}_i$的解时，利用了关系式

$$\frac{\delta\bar{x}_i}{\delta\bar{y}_j}=\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \qquad (6.5.2)$$

式中 $\Delta$——方程组(6.5.1)的行列式；$\Delta_{ij}$——把$\Delta$行列式第$i$列换为矩阵$\mathbf{d}$的第$j$列而得到的行列式。

第$i$个参数振幅的解可用计算机计算带复数项的行列式的标准程序求出。在解题条件所确定的范围内对于一系列强迫振荡频



率$\omega$求解方程(6.5.2)。通过解方程(6.5.2)可求出发动机频率特性

$$\delta\bar{x}_i/\delta\bar{y}_j=Re_{ij}(\omega)+i\mathbf{I}m_{ij}(\omega)=A_{ij}(\omega)\exp[-i\varphi_{ij}(\omega)] \qquad (6.5.3)$$

式中 $Re(\omega)$、$\mathbf{I}m_{ij}(\omega)$——频率传递函数的实部和虚部；$A_{ij}(\omega)$、$\varphi_{ij}(\omega)$——幅频特性和相频特性。

幅频特性和相频特性是分析发动机低频范围内的动态特性，计算发动机和飞行器的控制系统，分析飞行中火箭纵向稳定性等的原始数据。

在更广的频率范围内计算动态特性并考虑气路和液路中的声学效应和涡轮泵的扭转振动时，可使用类似于前述的方法。发动机各个组件的动态方程经变换后可化为下述形式：

$$\sum_{j=1}^{n}W_{ij}(\omega)\delta\bar{x}_j=d_{ik}\delta\bar{y}_k \qquad (6.5.4)$$

式中 $W_{ij}(\omega)$——第$i$个方程中第$j$个变量的复系数；$d_{ik}$——第$i$个方程中第$k$个外部干扰影响的放大系数；$\delta\bar{x}_j$——第$j$个参数变化范围；$\delta\bar{y}_k$——$k$外部干扰影响变化范围。

为确定系统的频率特性最方便的是利用方程(6.5.4)的矩阵形式

$$\mathbf{W}(\omega)\delta\overline{\mathbf{x}}=\mathbf{d}\delta\overline{\mathbf{y}} \qquad (6.5.5)$$

式中 $\mathbf{W}(\omega)$——发动机各组件方程复系数矩阵。

外部干扰影响变化范围的矢量$\delta\overline{\mathbf{y}}$由流路进出口气体和液体流动参数、涡轮泵两轴参数（在有扭转振动的情况下）等来决定。解方程(6.5.5)同解方程(6.5.1)一样，可借助于关系式(6.5.2)。

# 第七章　液体火箭发动机动态特性和稳定性

## 7.1　发动机低频区线性化数学模型

无调节器的发动机动态特性是分析发动机控制系统稳定性的原始数据。而要计算飞行器纵向稳定性和分析其控制系统的工作，则应使用带调节器的发动机的动态特性。发动机系统方案及其组件参数都对发动机的幅相频率特性有影响。以下将对各种系统方案的发动机的动态特性的特点进行论述。这些系统方案有：富氧燃气发生器、液-液型无补燃方案；气-液型富氧燃气补燃方案和富燃料燃气补燃方案。

为简化起见，现使用无辅助预压泵的、单区燃气发生器的发动机的数学模型，在这种燃气发生器内可忽略涡轮的集气管容积。此外，为简化数学模型，现假设，泵和涡轮的工作点位于泵压头特性曲线和泵及涡轮效率曲线两者的最大值上：

$$\psi_{G_{ок}}=\psi_{G_г}=\psi^{(\eta)}_{G_{ок}}=\psi^{(\eta)}_{G_г}=\psi_{c1}=0;\ \psi_{nок}=\psi_{nг}=2。$$

涡轮工作在临界状态，即$p_{гг}/p_{газ}\approx 2$；$\varepsilon_т=\beta_т=0$；$\varepsilon_ф=5$，涡轮中温度的变化可忽略不计。假设在液-液型系统方案的发动机中，泵建立的压头在流路流阻和调节组件上损失1/3，即$p_{гг}/\Delta p_{ок1}=p_{гг}/\Delta p_{г1}=p_к/\Delta p_{ок3}=p_к/\Delta p_{г3}=2$，而对于气-液型系统方案压头则损失1/5，相应地$p_{гг}/\Delta p_{ок1}=p_{гг}/\Delta p_{г1}=4$，而$p_к/\Delta p_{г3}=0.65$。在此情况下可以认为流路中一半损失摊在调节机构上。



除上述条件外，建立发动机数学模型时还作了以下假设：流经燃气发生器的小流量所决定的功率在涡轮泵内忽略不计，在所有气路方程中舍掉带有系数$(\kappa_г-1)/\kappa_к$和$(\kappa_к-1)\kappa_к$的一些小项(式中$\kappa_г$、$\kappa_к$分别为燃气发生器和燃烧室内的绝热指数)，燃烧室内忽略熵波，取$\psi_к=0$，而对于富氧燃气发生器取$K_{mгг}=20$，$\psi_{гг}=-1$，对于富燃料燃气发生器取$K_{mгг}=1$，$\psi_{гг}=0.5$。单个元件的时间常数选取四舍五入的数。

这样即可将数学模型化为以下足够简单的方程组，可大致描述发动机动态特性的特点。

(1) 对于带富氧燃气发生器无补燃的发动机

$$0.005\mathrm{d}\delta G_{ок1}/\mathrm{d}t+2\delta G_{ок1}+2\delta p_{гг}-6\delta n-\delta F_{ок1}=0;\tag{7.1.1}$$

$$0.01\mathrm{d}\delta G_{ок3}/\mathrm{d}t+2\delta G_{ок3}+2\delta p_к-6\delta n-\delta F_{ок3}=0;\tag{7.1.2}$$

$$0.005\mathrm{d}\delta G_{г1}/\mathrm{d}t+2\delta G_{г1}+2\delta p_{гг}-6\delta n-\delta F_{г1}=0;\tag{7.1.3}$$

$$0.01\mathrm{d}\delta G_{г3}/\mathrm{d}t+2\delta G_{г3}+2\delta p_к-6\delta n-\delta F_{г3}=0;\tag{7.1.4}$$

$$0.01\mathrm{d}\delta p_{гг}/\mathrm{d}t+\delta p_{гг}-\delta T_{гг}-0.95\delta G_{ок1}(t-0,003)-0.05\delta G_{г1}(t-0.003)+0.5\delta T_{гг}(t-0.012)=0;\tag{7.1.5}$$

$$0.002\mathrm{d}\delta p_к/\mathrm{d}t+\delta p_к-0.7\delta G_{ок3}(t-0.001)-0.3\delta G_{г3}(t-0.001)=0;\tag{7.1.6}$$

$$\delta T_{гг}+\delta G_{ок1}(t-0.003)-\delta G_{г1}(t-0.003)=0;\tag{7.1.7}$$

$$0.2\mathrm{d}\delta n/\mathrm{d}t+0.5\delta G_{\text{ок3}}+0.5\delta G_{\text{г3}}-\delta p_{\text{гг}}+2\delta n$$
$$-0.5\delta T_{\text{гг}}(t-0.012)=0 \tag{7.1.8}$$

(2) 对于以富氧燃气补燃的发动机[保留燃气发生器的(7.1.5)和(7.1.7)方程]

$$0.01\mathrm{d}\delta G_{\text{ок1}}/\mathrm{d}t+2\delta G_{\text{ок1}}+4\delta p_{\text{гг}}-10\delta n-\delta F_{\text{ок1}}=0; \tag{7.1.9}$$

$$0.005\mathrm{d}\delta G_{\text{г1}}/\mathrm{d}t+2\delta G_{\text{г1}}+4\delta p_{\text{гг}}-10\delta n-\delta F_{\text{г1}}=0; \tag{7.1.10}$$

$$0.01\mathrm{d}\delta G_{\text{г3}}/\mathrm{d}t+2\delta G_{\text{г3}}+0.65\delta p_{\text{к}}-3.3\delta n-\delta F_{\text{г3}}=0; \tag{7.1.11}$$

$$0.01\mathrm{d}\delta p_{\text{га3}}/\mathrm{d}t-\delta p_{\text{гг}}+6\delta p_{\text{га3}}-5\delta p_{\text{к}}-\delta T_{\text{га3}}$$
$$+0.5\delta T_{\text{гг}}(t-0.012)+0.5\delta T_{\text{га3}}(t-0.012)=0; \tag{7.1.12}$$

$$0.002\mathrm{d}\delta p_{\text{к}}/\mathrm{d}t-4\delta p_{\text{га3}}+4\delta p_{\text{к}}-0.3\delta G_{\text{г3}}(t-0,001)$$
$$+0.35\delta T_{\text{га3}}(t-0.012)=0; \tag{7.1.13}$$

$$\delta T_{\text{га3}}=\delta T_{\text{гг}}(t-0.012); \tag{7.1.14}$$

$$0.03\mathrm{d}\delta n/\mathrm{d}t+0.5\delta G_{\text{ок1}}+0.5\delta G_{\text{г3}}-\delta p_{\text{гг}}+2\delta n$$
$$-0.5\delta T_{\text{гг}}(t-0.012)=0 \tag{7.1.15}$$

(3) 对于以富燃料燃气补燃的发动机[保留燃气发生器流路方程(7.1.9)和(7.1.10)]

$$0.01\mathrm{d}\delta G_{\text{ок3}}/\mathrm{d}t+2\delta G_{\text{ок3}}+0.65\delta p_{\text{к}}-3.3\delta n-\delta F_{\text{ок3}}=0; \tag{7.1.16}$$

$$0.003\mathrm{d}\delta p_{\text{гг}}/\mathrm{d}t+\delta p_{\text{гг}}-\delta T_{\text{гг}}-0.5\delta G_{\text{ок1}}(t-0.003)$$
$$-0.5\delta G_{\text{г1}}(t-0.003)+0.5\delta T_{\text{гг}}(t-0.004)=0; \tag{7.1.17}$$

$$0.01\mathrm{d}\delta p_{\text{га3}}/\mathrm{d}t-\delta p_{\text{гг}}+6\delta p_{\text{га3}}-5\delta p_{\text{к}}-\delta T_{\text{га3}}$$
$$+0.5\delta T_{\text{гг}}(t-0.004)+0.5\delta T_{\text{га3}}(t-0.012)=0; \tag{7.1.18}$$

$$0.002\mathrm{d}\delta p_{\text{к}}/\mathrm{d}t-4\delta p_{\text{га3}}+4\delta p_{\text{к}}-0.8\delta G_{\text{г3}}(t-0.001)$$



$$+0,35\delta T_{\text{га3}}(t-0,012)=0; \tag{7.1.19}$$

$$\delta T_{\text{гг}}-0,5\delta G_{\text{ок1}}(t-0,003)+0,5\delta G_{\text{г1}}(t-0,003)=0; \tag{7.1.20}$$

$$\delta T_{\text{га3}}-\delta T_{\text{гг}}(t-0,004)=0; \tag{7.1.21}$$

$$0,06\mathrm{d}\delta n/\mathrm{d}t+0,7\delta G_{\text{г1}}+0,3\delta G_{\text{ок3}}-\delta p_{\text{гг}}+2\delta n$$
$$-0,5\delta T_{\text{гг}}(t-0.004)=0. \tag{7.1.22}$$

计算幅相频率特性时，或分别计算幅频特性和相频特性时，可使用公式(6.5.2)和(6.5.3)。对于数学模型诸方程先要将$\delta x_{\text{i}}=\delta\bar{x}_{\text{i}}\exp(i\omega t)$类型的关系式代入这些方程以求出周期特解，上式中$\delta x_{\text{i}}$、$\delta\bar{x}_{\text{i}}$——第$i$个参数的变化量和变化幅值。分析带调节器的发动机的动态特性时，对上述发动机元件诸方程应增加调节器的方程，该方程写作以下形式：

$$T_2^2\mathrm{d}^2\delta F_{\text{p}}/\mathrm{d}t^2+T_1\mathrm{d}\delta F_{\text{p}}/\mathrm{d}t+\delta F_{\text{p}}=-k_{\text{p}}\delta x_{\text{p}}, \tag{7.1.23}$$

式中 $T_2$、$T_1$、$K_{\text{p}}$——惯性时间常数、阻尼时间常数和调节器放大系数；$\delta F_{\text{p}}$——调节器节流装置流通截面积变化量；$\delta x_{\text{p}}$——被调参数变化量。

## 7.2 无调节器的发动机在低频区的动态特性的特点

7.1节所述的发动机数学模型用于确定发动机的动态特性(频率特性)或过渡过程参数。以下将研究无调节器、带富氧燃气发生器、无补燃和有补燃的发动机频率特性的特点。计算频率特性时，应先将每一个第$i$参数的周期特解$\delta x_{\text{i}}=\delta\bar{x}_{\text{i}}\exp i\omega t$代入数学模型诸方程，而后利用(6.5.2)式进行计算。

图7.1示出了无调节器、无补燃的发动机的幅频特性曲线(用字母$A$表示)和相频特性曲线。引人注意的是，对于干扰引入点(燃气发生器及其流路)来说，位于发动机系统涡轮泵前的元件的

幅频特性曲线明显地不同于涡轮泵转速的幅频特性曲线，也明显地不同于位于涡轮泵后(燃烧室)的诸元件的幅频特性曲线。燃气发生器的幅频特性，当频率在很宽的范围内变化时，很少变化。而当频率增大时，涡轮泵和燃烧室的参数变化幅值会急剧缩小，呈现出涡轮泵恰似低频滤波器的特性。

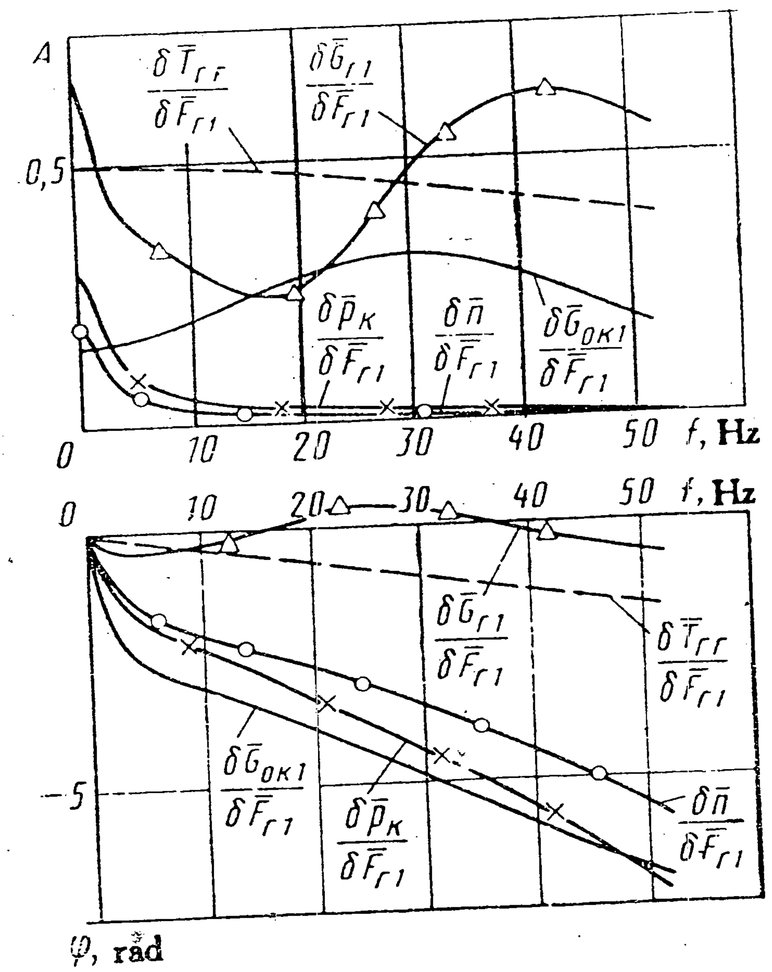



图7.1 在燃气发生器燃料流路中以节流阀进行干扰时无调节器和无补燃发动机的幅频特性曲线和相频特性曲线

对于补燃发动机所有参数的幅频特性(图7.2)，除涡轮泵转速外，都随频率发生变化。因此补燃发动机对于由控制机构到燃烧室和到其他组件的信号具有很宽的通过频带。两种发动机方案的相移(见图7.1和图7.2)对于主要参数($\delta\bar{G}_{r1}$和$\delta\bar{T}_{rr}$除外)来说，在近50Hz频率的范围内都可达到大于360°的值。

通过改变无补燃发动机(见图7.1)和补燃发动机(见图7.2)燃气发生器燃料流路节流阀流通截面积进行干扰时，对于流经燃气发生器的燃料流量变化量和燃气发生器内的温度变化量来说会有最大静态放大系数($f=0$)。这样，在借助燃气发生器燃料流路的调节器调节发动机时，便可收到改变燃气发生器燃气温度的根本



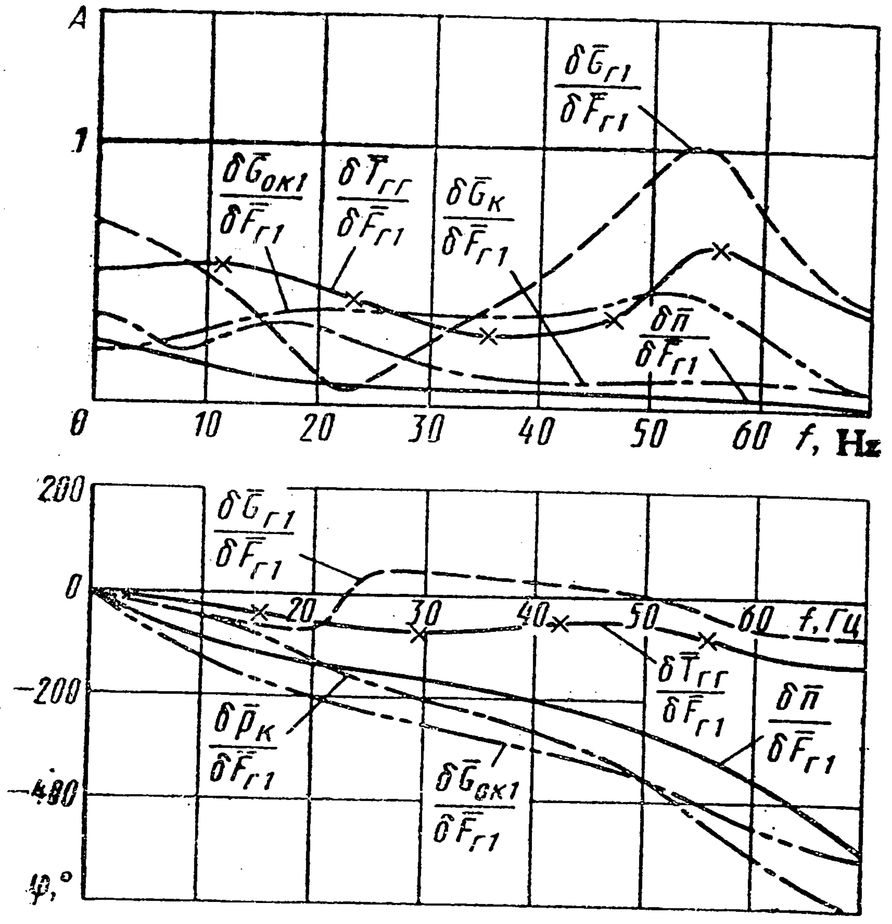



图7.2 在燃气发生器燃料流路中以节流阀进行干扰时富氧燃气补燃发动机的幅频特性曲线和相频特性曲线

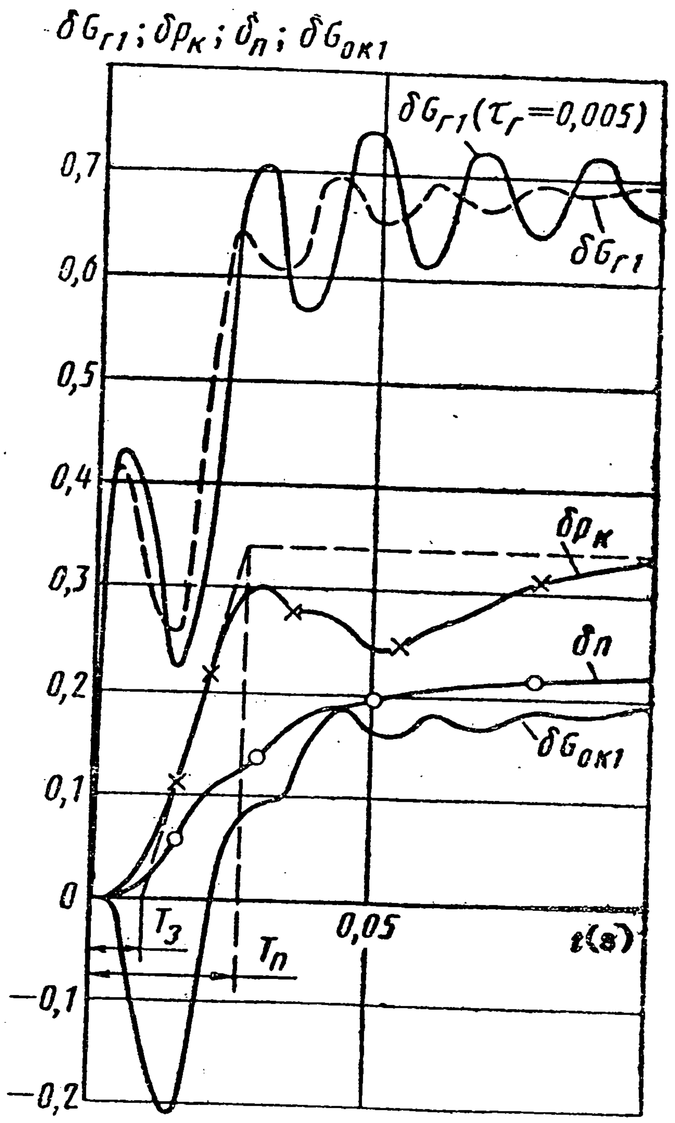



图7.3 富氧燃气补燃发动机过渡过程的曲线

效果。如计算表明，这种温度调节是最有效的。

在富氧燃气发生器燃料流路内装发动机工况调节器之所以是合理的，是因为与流经其它管路的组元流量相比，通过燃气发生器的燃料流量要小得多，相应地调节器的尺寸和质量也就比较小。根据其它控制通路计算发动机频率特性表明，这些通路的放大系数要比燃气发生器燃料通路的放大系数小百分之几十。

图7.3示出了富氧补燃发动机诸参数过渡过程曲线。用燃烧室压力变化量$\delta p_K$曲线来评估过渡过程特征时间，即时滞$T_3$和过渡到新工况的特征时间$T_П$，$T_{П}$则由过渡过程曲线切线(虚线)的交

点决定。对$\delta p_к$曲线来说$T_з \approx 0.01$s，而$T_п \approx 0.03$s，发动机燃烧室压力过渡过程总特征时间将近0.1s。$\delta p_к$过渡过程曲线具有相当复杂的特征。

参数$\delta G_{ок1}$开始时向负值方向的变化比较急剧，只是在过了约0.02s，该参数才变为正值。在所有曲线上都可看到有频率约50Hz的小幅度振荡。计算分析表明，该频率(以及图7.2某些曲线的相应谐振)同燃气发生器工作过程稳定性有关，而该分析是相当粗略地用液体组元转化为燃烧产物的时间$\tau_г$来模拟的。对于图7.3所示曲线（$\delta G_{г1}$一条曲线除外）取$\tau_г = 0.003$s。$\tau_г$增大到0.005s时，幅频特性曲线谐振像过渡过程曲线振幅(见曲线$\delta G_{г1}$)一样会急剧上升。由于有关工作过程稳定性问题不是分析的对象，而上面提及的频率又处在模型适用范围的边界上，故第七章计算时均取$\tau_г = 0.003$s。

## 7.3 带液压调节器的发动机调节系统的稳定性

上面得到的无调节器的发动机动态特性是用于分析调节系统稳定性的原始数据。调节系统包括调节对象(液体火箭发动机)和调节器。分析调节系统稳定性时，假设调节对象(发动机)和调节器各自都是稳定的。之所以产生不稳定性是因为引入调节器后发动机内出现了新的耦合。在描述调节器性能的参数某些组合下，见公式(7.1.23)，发动机-调节器系统会失去稳定性。在此情况下，不能说在参数的这些组合下调节器是不好的，只能说该调节器不适于该台具体的发动机。

为使发动机-调节器系统稳定必须改变其参数或结构。原则上改变发动机或调节器都可以。然而通常都是走花费更少的途径，即改变调节器参数或调节系统结构(例如改变反馈)。对像发动机



如此复杂的、用有滞后的自变数的微分方程描述的对象进行稳定性分析，最方便的是采用$D$-划分法[5]。该方法明显地优于其它稳定性分析法，因为它不仅可回答该具体系统是否稳定的问题，还可以确定对系统参数作这些改变能否使系统稳定的问题。

可利用发动机数学模型对其稳定性进行分析，此时须将周期特解$\delta F_р = \delta \bar{F}_р \exp(i\omega t)$、$\delta x_р = \delta \bar{x}_р \exp(i\omega t)$等等代入数学模型：

$$\delta \bar{x}_р / \delta \bar{F}_р = W_д(\omega) = \mathrm{Re}_д(\omega) + i\mathrm{Im}_д(\omega), \qquad (7.3.1)$$

式中 $W_д(\omega)$——发动机频率传递函数；$\mathrm{Re}_д(\omega)$、$\mathrm{Im}_д(\omega)$——频率传递函数的实部和虚部。

代入周期特解后，调节器方程(7.1.23)可写作

$$(1 - \omega^2 T_2^2 + i\omega T_1)\delta \bar{F}_р = -k_р \delta \bar{x}_р \qquad (7.3.2)$$

有时将(7.3.2)式各项乘以$\nu = 1/k_р$后得出的另一写式会更为方便

$$(\nu - \omega^2 \theta_2^2 + i\omega\theta_1)\delta \bar{F}_р = -\delta \bar{x}_р \qquad (7.3.3)$$

式中 $\nu = 1/k_р$——调节器差率；$\theta_1 = T_1/k_р$、$\theta_2 = T_2\sqrt{k_р}$——调节器时间常数。

带调节器的发动机是一封闭的动态系统。为得到其特征方程，要将方程(7.3.2)代入(7.3.1)式，变换后，考虑到$\delta \bar{F}_р \neq 0$，求得特征方程

$$1 - \omega^2 T_2^2 + k_р Re_д(\omega) + i[\omega T_1 + k_р \mathrm{Im}_д(\omega)] = 0 \qquad (7.3.4)$$

或对方程(7.3.1)和(7.3.3)作类似运算得

$$\nu - \omega^2 \theta_2^2 + Re_д(\omega) + i(\omega\theta_1 + \mathrm{Im}_д(\omega) = 0. \qquad (7.3.5)$$

使方程(7.3.4)和(7.3.5)中的实部和虚部等于零，可得以调节器参数表示的、用于建立发动机-调节器系统稳定性边界关系式的各种方案：

$$k_p = -(1-\omega^2 T_2^2)/\mathrm{Re}_д(\omega);\ T_1 = -k_p \mathrm{Im}_д(\omega)/\omega; \tag{7.3.6}$$

$$\theta_2 = \sqrt{\nu + \mathrm{Re}_д(\omega)}/\omega;\ \theta_1 = -\mathrm{Im}_д(\omega)/\omega. \tag{7.3.7}$$

借助(7.3.6)式或(7.3.7)式建立的稳定性边界将调节器参数平面分为若干区，这些区有一定数量的特征方程根(共轭根)，这些根有正实部。为要确定应在哪一个方向上越过稳定性边界以便正实部的根数增加两个，在边界上必须打上剖面线[5]。稳定性边界剖面线方向决定于代数方程组行列式的符号，而这些代数方程组则是使特征方程(7.3.4)或(7.3.5)实部和虚部等于零而得到的。

按(7.3.6)式利用$K_p$-$T_1$参数建立稳定性边界时，方程组行列式等于$\Delta = -\omega \mathrm{Re}_д(\omega)$。按文献[5]的规则，当$\Delta>0$(即当$\mathrm{Re}_д(\omega)<0$)时，若沿边界向$\omega$增大方向延伸稳定边界剖面线打在左边，此时在坐标系中$T_1$为横坐标，$K_p$则为纵坐标。当$\Delta<0$(当$\mathrm{Re}_д(\omega)>0$)时，边界剖面线打在右边。可能是稳定性区的那一区应自曲线打剖面线的那一边求取。坐标系中当自非剖面线一边进入剖面线一边时，正实部的根(共轭根)数减少两个。参数空间内其正实部的根数为最小的那一区可能是稳定性区。$D$-划分法不能单值地回答该区是否是稳定区的问题。为要最终解决此问题，必须利用某一准则或该区某一点的稳定性标志(例如乃氏稳定性准则)。若该点上系统是稳定的，则被标出的区便是稳定性区。

对于按(7.3.7)式建立的以$(\theta_1-\theta_2)$参数表示的稳定性边界行列式$\Delta=\omega^3$总是大于零。相应地$(\theta_2-\theta_1)$(此处$\theta_2$为纵坐标，$\theta_1$为横坐标)参数平面上稳定性边界(当沿边界向频率$\omega$增大方向延伸时)剖面线总是打在左边。

利用无调节器的发动机幅相频率特性曲线和稳定性边界的公式(7.3.6)，可对调节系统稳定性进行定性分析。的确，根据(7.



3.6)式当$T_2=0$时(无惯性调节器)，稳定性区对应于幅相频率特性曲线中$\mathrm{Re}_д(\omega)<0$和$\mathrm{Im}_д(\omega)<0$的那一部分。若被调参数幅相频率特性曲线通过该区，则稳定性边界可用$k_p-T_1$参数建立。

从物理上看，这一现象可解释为，封闭系统内可能产生振荡，其条件是该系统可将信号放大得足够大并出现180°的相移。若$T_2=0$，即调节器活动部分的质量小到可以忽略不计，则根据方程(7.3.2)当信号通过调节器时，可能产生不大于90°的相移。为激发发动机振荡还应建立不小于90°的补充相移，即幅相频率特性曲线应通过$\mathrm{Re}_д(\omega)<0$和$\mathrm{Im}_д(\omega)<0$的那一象限(所有这些都与$k_p>0$时的带正差率的调节器有关)。若活动部分的质量对调节器动态特性曲线有明显影响且达到$\omega^2T_2^2>1$，则调节器本身即可保证相移大于90°，且对于该频率范围稳定性边界应对应于位于$\mathrm{Re}_д(\omega)>0$和$\mathrm{Im}_д(\omega)<0$且相移小于90°的那一象限内的发动机幅相频率特性曲线段。

被调参数幅相频率特性曲线$\mathrm{Re}_д(\omega)>0$、$\mathrm{Im}_д(\omega)<0$的那一部分会反映在按(7.3.7)式确定的、用$\theta_2-\theta_1$参数表示的稳定性边界上(此时差率$\nu\approx0$)。若$\nu$足够大，则落入$\mathrm{Re}_д(\omega)<0$和$\mathrm{Im}_д(\omega)>0$象限内的发动机幅相频率特性曲线部分必然会反映到调节器参数空间内，即反映到诸稳定性区的平面内。

上述特征可使我们能够按幅相频率特性曲线的类型来确定在调节器参数相应平面内可否得到稳定性边界，而如果可得到这些边界，则可预先报出这些边界的频率范围。

若被调参数幅相频率特性曲线开始于(当$\omega=0$时)实数轴的负数部，或同样对于被调参数相频特性曲线开始于相移$\varphi=-180°$处，则这意味着发动机静态放大系数为负值。相应地在调节系统内调节器放大系数的符号应为负号，以便保留负反馈。放大系数符号的变化可导致方程(7.3.2)和(7.3.3)右边符号的变化。对于已改变了符号的调节器诸方程，即对于在被调参数方面有负静态

放大系数的发动机方程，稳定性边界公式(7.3.6)和(7.3.7)也有变化，其形式如下：

$$k_p=(1-\omega^2T_2^2)/\mathrm{Re}_д(\omega);\ T_1=k_p\mathrm{Im}_д/\omega; \qquad (7.3.8)$$

$$\theta_2=\sqrt{\nu-\mathrm{Re}_д(\omega)}/\omega;\ \theta_1=\mathrm{Im}_д(\omega)/\omega \qquad (7.3.9)$$

在此情况下，对应于在$k_p>0$和$T_1>0$象限内通过的稳定性边界为通过$\mathrm{Re}_д(\omega)>0$和$\mathrm{Im}_д(\omega)>0$象限的发动机幅相频率特性曲线部分，而对应于用参数$\theta_1>0$和$\theta_2>0$表示的稳定性边界则是通过$\mathrm{Re}_д(\omega)<0$和$\mathrm{Im}_д(\omega)>0$象限的幅相频率特性曲线部分。

按上述方法计算出的发动机幅相频率特性曲线是建立发动机-调节器系统稳定性边界的原始数据。图7.4所示为用燃烧室压力调节器参数($k_p-T_1$)表示的无补燃发动机稳定性边界(液-液系统方案)。发动机幅相频率特性曲线是按公式(7.1.1)～(7.1.8)计算的，稳定性边界是按关系式(7.3.6)确定的。在稳定区一侧稳定性边界上打了剖面线并示出了系统失去稳定性的那些频率。

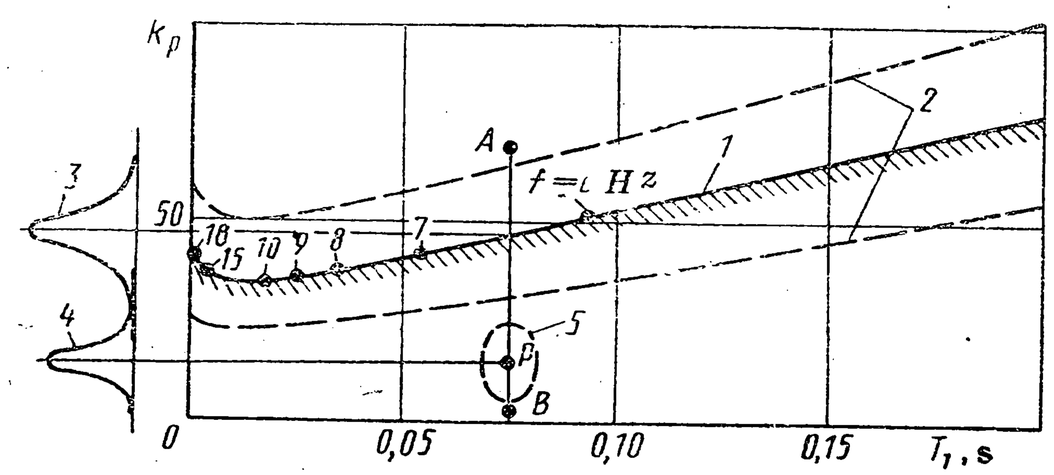



图7.4 用燃烧室压力调节器参数表示的无补燃发动机稳定性边界

对示于图7.4的稳定性边界的分析表明，稳定性条件对燃烧室压力调节器的放大系数$k_p$有很大限制，在此条件下，当$T_1$增大时，$k_p$的容许值才会增大。稳定性边界相对于某一额定的、计算的发动机。事实上由于单个组件特性的自然散布，每台发动机都有其自身的固有特性，也意味着有其固有的频率特性和固有的稳定性



边界。因此，实际上每一型号发动机的稳定性边界便是某一平均曲线1，而许多单个发动机的曲线便组成稳定性边界散布区，其宽度取决于发动机诸组件参数的公差。可以把平均计算曲线1看作数学期望值曲线(即最可能的稳定性边界)。散布区边界2决定于发动机动态特性分散度。

图7.4左侧给出了曲线3，它是稳定性边界同给出$T_1$的直线$AB$相交的概率曲线。稳定性边界散布区的存在表明，选取调节器参数(计算点$P$)时，必须留有某一稳定性余量，即该点应位于距计算曲线1某一距离的位置上。此时应估计到，调节器自身的参数会有一定的散布，即带有概率性。调节器参数散布可定性地用曲线4来描述，该曲线可确定调节器具有放大系数给定值的概率。曲线3和4的交点可确定发动机-调节器系统失去稳定性的概率。为减小该概率应将调节器计算点$P$自稳定性边界处引开，即增大稳定性余量或减小调节器特性的散布区5。

图7.5示出了富氧燃气补燃发动机用燃烧室压力调节器参数表示的稳定性边界。与图7.4无补燃发动机曲线1作对比可以看出，从稳定性条件出发补燃发动机放大系数方面的限制更为苛刻——$k_p$的允许值要小百分之几十。既便是对于无补燃发动机，考虑到必要的稳定性余量，$k_p$的允许值也不大(大约为10～20)，因而不可能得到高精度的调节系统。对于补燃发动机这些值还要小，从调节系统精度的观点看这显然是不适宜的。增大$k_p$的允许值唯一可能的途径便是增大$T_1$，由于这会增大发动机过渡过程的时间也常常是不希望的。

为增大补燃发动机的稳定性余量和调节系统精度，通常采用间接参数(例如燃气发生器燃料流量)调节系统。在燃气发生器燃料流量调节器参数($k_p-T_1$)平面内没有稳定性边界，即发动机在这两个参数任何组合下都是稳定的。这可从未达到$-\pi/2$相角的$\delta\bar{G}_{г1}/\delta\bar{F}_{г1}$的相频特性曲线得出。在此情况下，利用(7.3.7)式可建立以参数$\theta_2-\theta_1$表示的燃气发生器燃料流量调节器调节系统

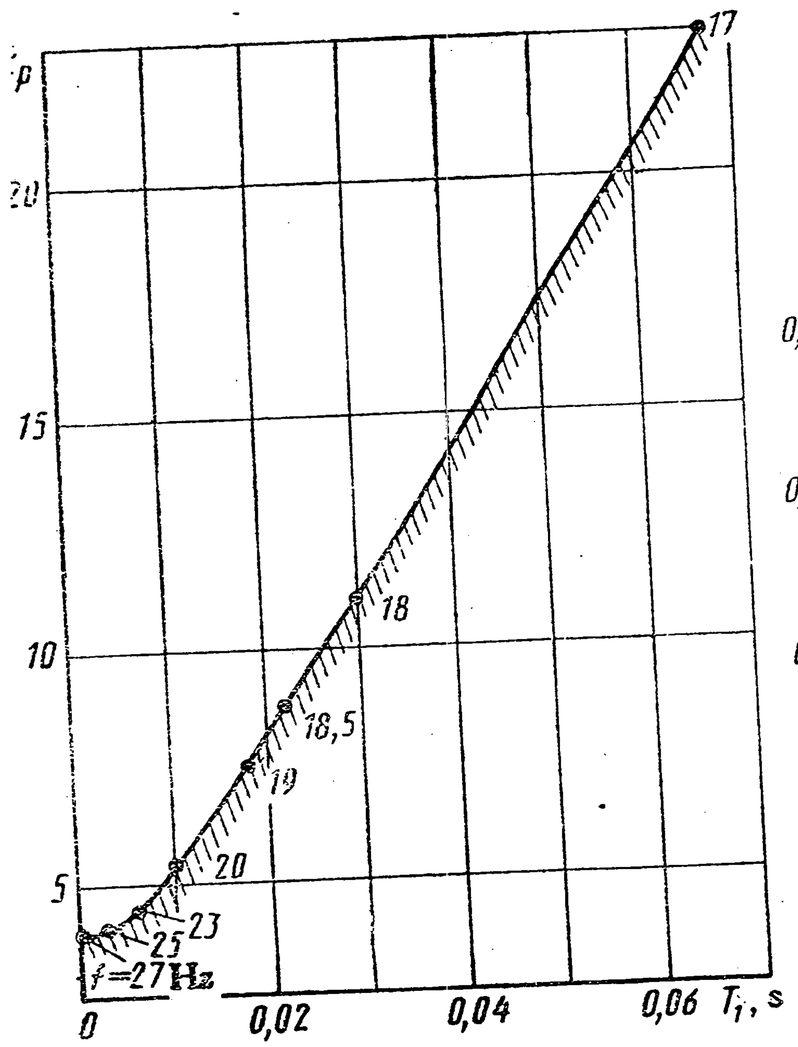



图7.5 用燃烧室压力调节器参数表示的富氧燃气补燃发动机的稳定性边界

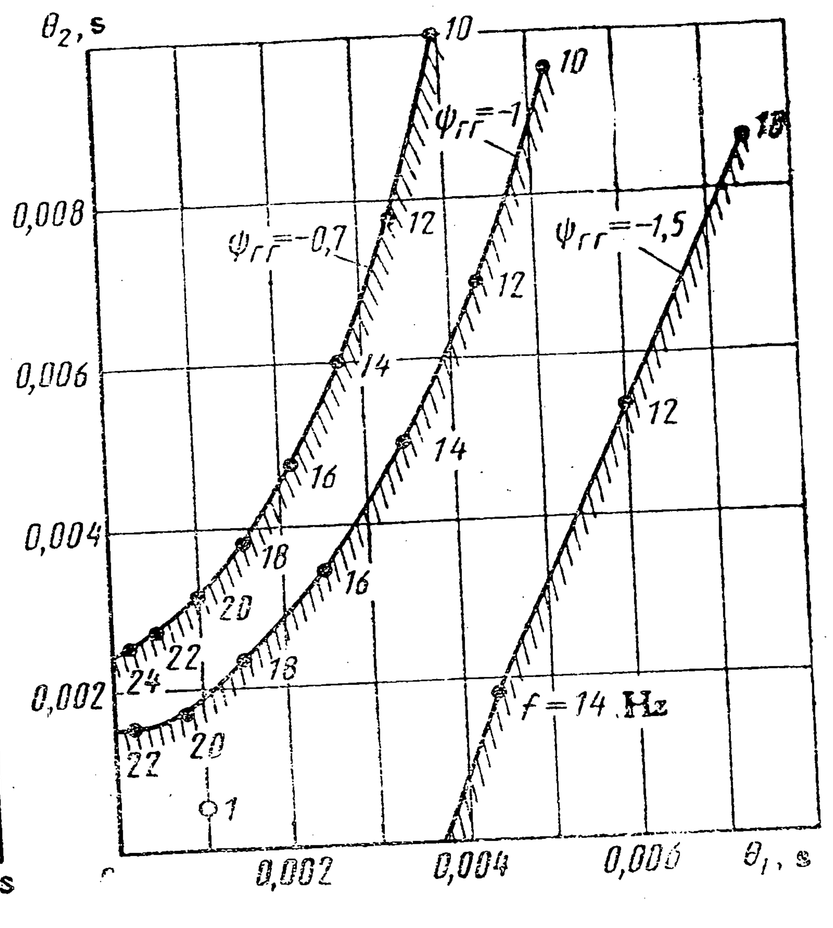



图7.6 用燃气发生器燃料流量调节器的参数($\theta_2-\theta_1$)表示的富氧燃气补燃发动机的稳定性边界

的稳定区。图7.6示出了燃气发生器燃气温度同混合比关系曲线不同斜率$\psi_{rr}$下用燃气发生器燃料流量调节器参数($\theta_2-\theta_1$)表示的富氧燃气补燃发动机的稳定性边界。

稳定区随$\psi_{rr}$(按模数)增大而变窄。因为$\psi_{rr}$首先会影响发动机气路内熵波的幅值,对比图7.6所示的曲线可以看出熵波对调节系统的动态特性和稳定性有很大影响。从对图7.6所示曲线的分析中可以得出这样的结论,即稳定性边界对调节器参数不会施加特殊的限制,必要时可用增大时间常数$\theta_1$的办法使系统稳定。

在另一种发动机方案—富燃料燃气补燃发动机条件下也可以得到类似于上述情况的稳定性边界(图7.7)。在这种情况下,也是调节较小的氧化剂流量,且对调节器参数无特殊限制。



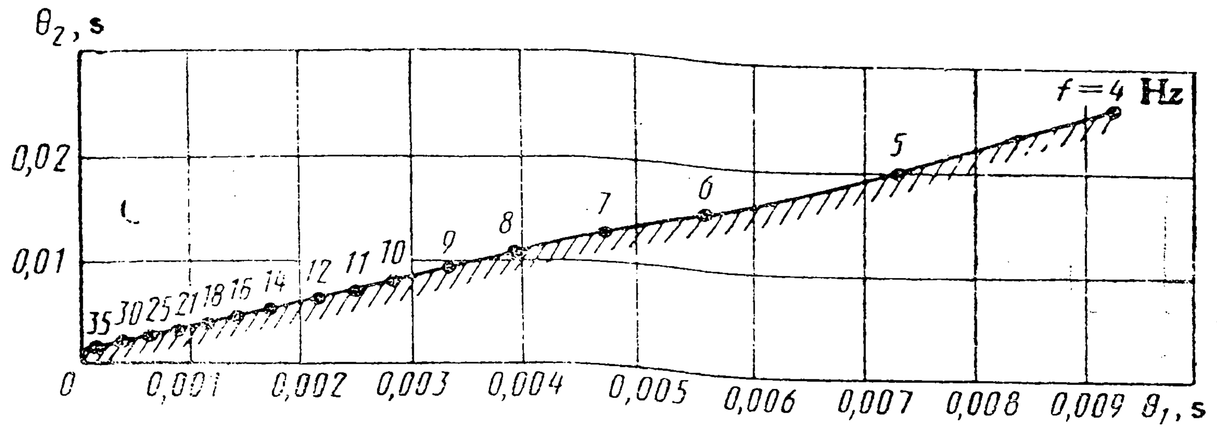



图7.7 用燃气发生器氧化剂流量调节器参数表示的富燃料燃气补燃发动机的稳定性边界

## 7.4 调节系统对发动机动态特性的影响

在发动机系统中采用调节器可破坏一些内部耦合并出现另一些新的耦合。其结果是发动机的静、动态特性都会急剧改变。以下以富氧燃气补燃发动机为例加以研究。该发动机的动态特性用(7.1.9)～(7.1.15)诸方程描述。把对应于图7.6上点1的参数$T_1$和$k_p$($T_2=0$)代入调节器方程(7.1.23),而该图上给出的稳定性边界就是带有燃气发生器燃料流量调节器的那一种发动机的稳定性边界。

对应于调节器两个参数的点1位于距稳定性边界足够远的距离上,即可以说系统具有足够的稳定性余量。然而在所研究的发动机幅频特性曲线上,对于燃烧室压力变化量$\delta p_k$来说,当调节器控制节流阀转角$\delta\varphi_{r1}$改变时(图7.8),会有足够大的、频率为20Hz的谐振。此时稳定性边界上频率为20Hz的点距点1最近(见图7.6),点1则对应于所选调节器的参数。这样一来,一方面,在无调节器的发动机幅频特性曲线上(见图7.2)没有该频率的谐振,另一方面,上面所述的带调节器的发动机稳定性边界上频率为20Hz的点距所选调节器的参数点又是很接近的。

从两个事实的对比中可以得出的结论是,发动机采用流量调

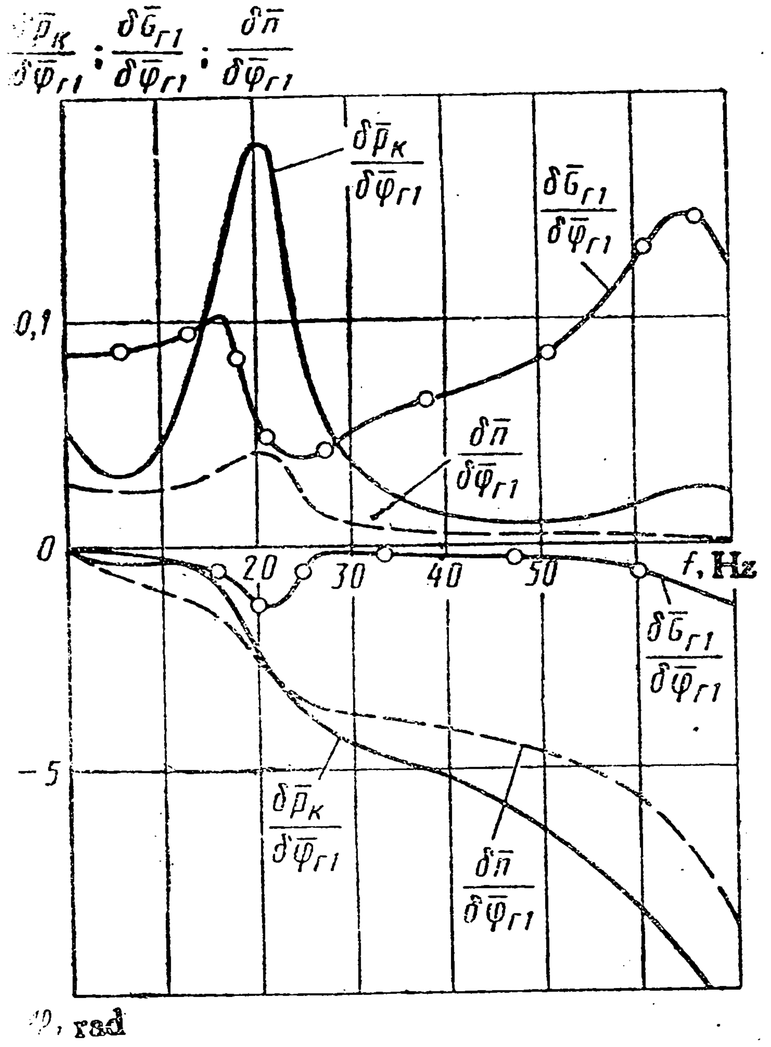



图7.8 富氧燃气补燃发动机的幅频和相频特性曲线

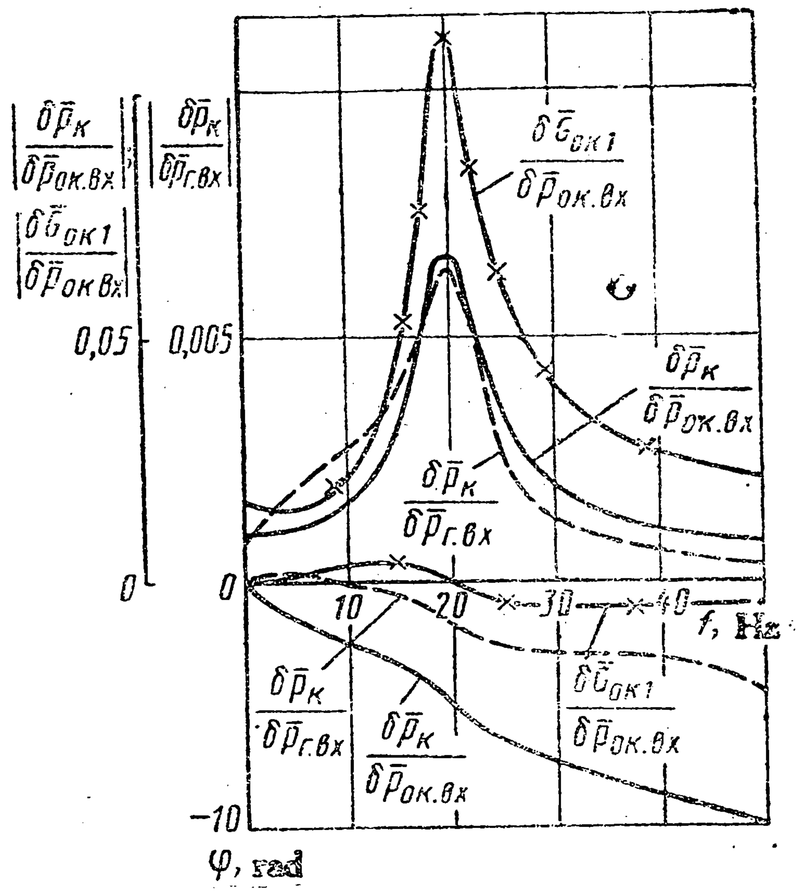



图7.9 富氧燃气补燃发动机纵向稳定性通道的幅频和相频特性曲线

节器是产生谐振的原因，而且如同从幅频特性曲线出现谐振这一事实得出的结论那样，即这种调节器不会保证发动机—调节器系统有很大的稳定性余量。调节控制参数$\delta\varphi_{г1}$时，发动机幅频特性曲线上的谐振可影响到发动机推力控制动态特性，而在过渡过程条件下则表现为参数波动幅度增大。

分析火箭飞行中的纵向稳定性时，氧化剂泵和燃料泵入口压力变化时的$\delta p_к/\delta p_{ок.вх}$和$\delta p_к/\delta p_{г.вх}$方面的发动机幅频特性和相频特性可作为原始数据。图7.9示出了同一富氧燃气补燃发动机的幅频特性曲线和相频特性曲线。在这些频率特性曲线上也会有约20Hz频率的谐振，此时谐振处的幅值同其静态值($f=0$)相比会增大5～6倍，相对于箭体纵向振动来说，这会大大影响稳定性边界的性质。特别是若箭体频率同发动机谐振频率重合时，就会



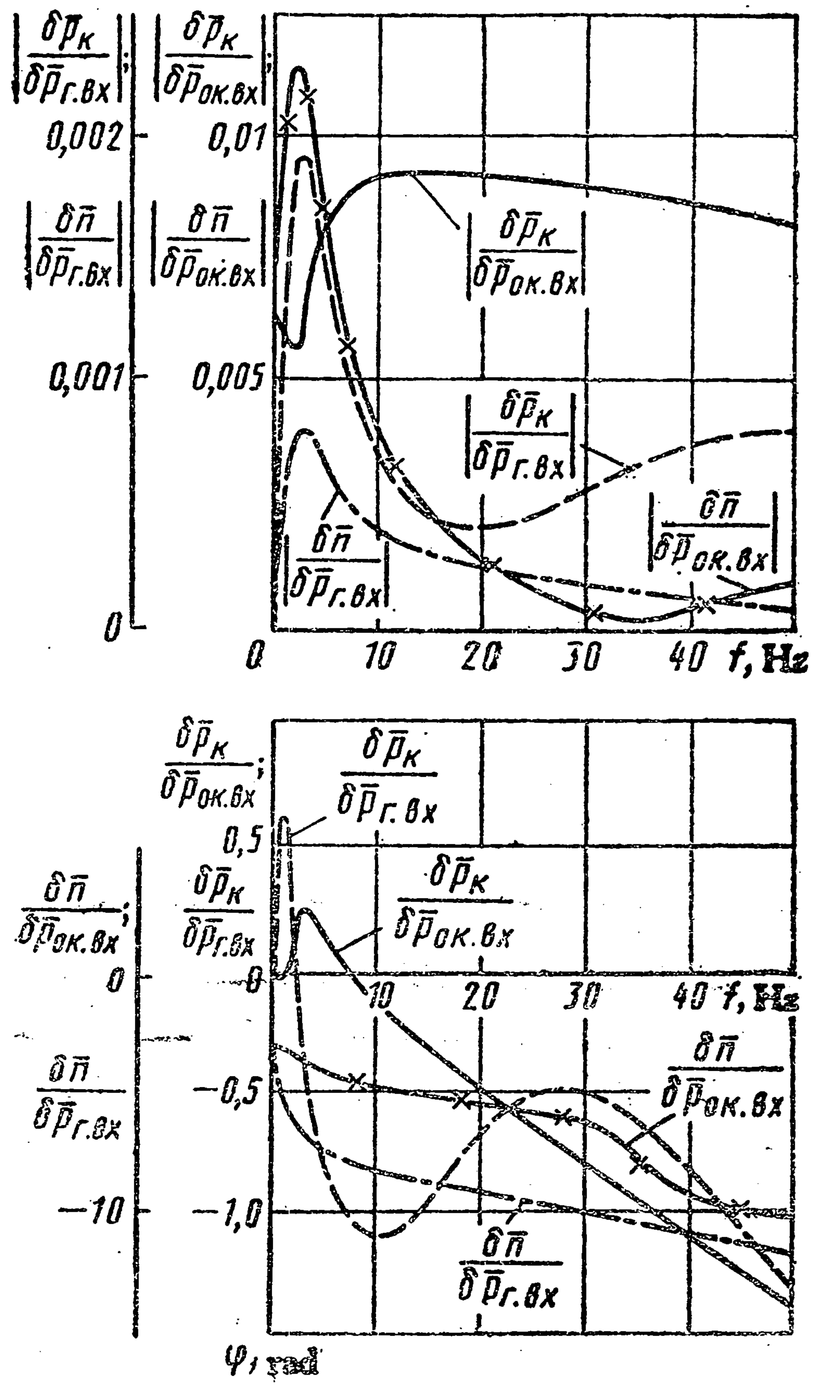



图7.10 无补燃发动机纵向稳定性通道的幅频和相频特性曲线

产生促使火箭在发动机谐振频率下失去纵向稳定性的条件[21]。因此发动机计算出的幅频特性和相频特性的可信程度便具有很大的意义。若对发动机数学计算模型可信程度产生怀疑时(例如由于不知道泵的气蚀动态特性)，则必须对其进行专门的频率试验。

与补燃发动机频率特性不同的是，当氧化剂泵入口有干扰时，无补燃发动机的幅频特性曲线基本上是缓倾的、平滑的(图7.10)，而当燃料泵入口有干扰时，则在很宽的频率范围内是缓倾的，并有明显的低频(约2Hz)谐振，这种低频对于箭体纵向振动的大多数情况来说不是特征性的。无补燃发动机的这种幅频特性

曲线的性质表明，对于这一类型的发动机来说，在其谐振频率下实际上不可能失去纵向稳定性。

为说明无补燃发动机幅频特性曲线的特点，图7.10上除示出了主要的$\delta\bar{p}_к/\delta\bar{p}_{ок\cdot вх}$和$\delta\bar{p}_к/\delta\bar{p}_{г\cdot вх}$的幅频特性曲线和相频特性曲线外还示出了$\delta\bar{n}/\delta\bar{p}_{ок\cdot вх}$和$\delta\bar{n}/\delta\bar{p}_{г\cdot вх}$的幅频特性曲线和相频特性曲线。对这些幅频特性曲线和相频特性曲线的分析表明，当频率足够大时(大于10Hz)，涡轮泵转速实际上因泵入口压力波动而引起的变化很小。相应地信号自泵入口直接沿发动机诸液路进入燃烧室，而这些液路的动态特性在约50Hz的范围内对压力与流量波动之间的关系影响不大。因此发动机在$|\delta\bar{p}_к/\delta\bar{p}_{ок\cdot вх}|$与$|\delta\bar{p}_к/\delta\bar{p}_{г\cdot вх}|$方面的放大系数的变化也不大。

由于计算的频率传递函数对分析发动机自身的调节系统，对计算火箭的纵向稳定性，对分析飞行器的控制系统都有很大的意义，所以将幅相频率特性的计算结果同发动机专门进行的频率试验时所得的试验数据进行对比是非常重要的。图7.11示出了富氧燃气补燃的模型发动机控制信道频率试验的结果。发动机工作时没有调节器，燃气发生器燃料路上曾装了一个专门的脉动器以代替调节器[35]。在该图上还示出了按前述方法对幅频特性和相频特性进行的计算结果。幅频特性曲线$A=|(\delta\bar{p}_к(f)/\delta\bar{F}_{г1})/(\delta\bar{p}_к(o)/\delta\bar{F}_{г1})|$按照传递函数$f=0$时的模量进行了标定。试验结果和按发动机数学模型的计算结果比较一致。实际上相频特性曲线完全符合，幅频特性曲线稍有差别。有差别的原因是发动机诸组件的静特性对幅频特性有重要影响。计算中采用的是这些组件特性的平均值，而不是该具体发动机的实际值，看样子，这也对试验结果和计算结果之间的差别有影响。

幅频和相频特性曲线的特征形态也引人注意—幅频特性曲线在低频时(约4Hz)有最小值，在该频率时的相移变化也最剧烈。



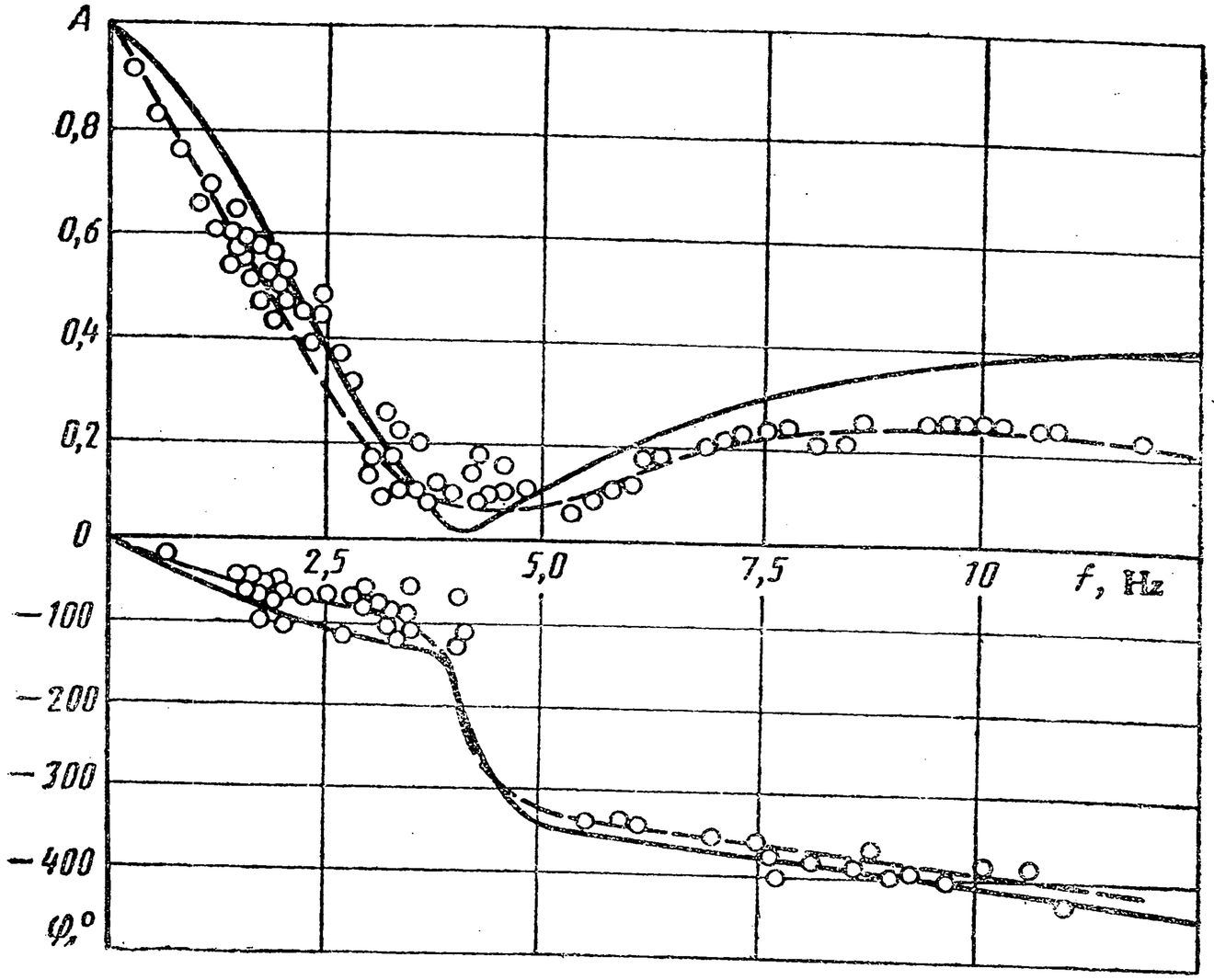



图7.11　无调节器补燃发动机计算的(——)和试验的(———)幅频和相频特性曲线；
○——试验点。

在图7.2所示补燃发动机对参数$\delta\bar{p}_к/\delta\bar{F}_{г1}$的计算幅频特性曲线和相频特性曲线上也可见到类似的特点，只不过不那么特别明显。

图7.12示出了富氧燃气补燃发动机频率试验的结果[35]。调整燃气发生器燃料流量调节器凸轮的转角来对发动机进行调节。对于有调节器的发动机在幅频特性曲线上也可见到$|\delta\bar{p}_к/\delta\varphi_{г1}|$在低频区(约7Hz)显著减小，也可见到相移在该低频区有很大变化。低频区幅频特性曲线上$|\delta\bar{p}_к/\delta\varphi_{г1}|$的减小在图7.8所示的计算的幅频特性曲线上也可见到，只是由于谐振接近，减小得不多。对于无调节器的发动机(见图7.11)紧接着振幅减小之后是振幅增大，但减小之后振幅仅能达到其静态值(当$f=0$时)的20%左右。

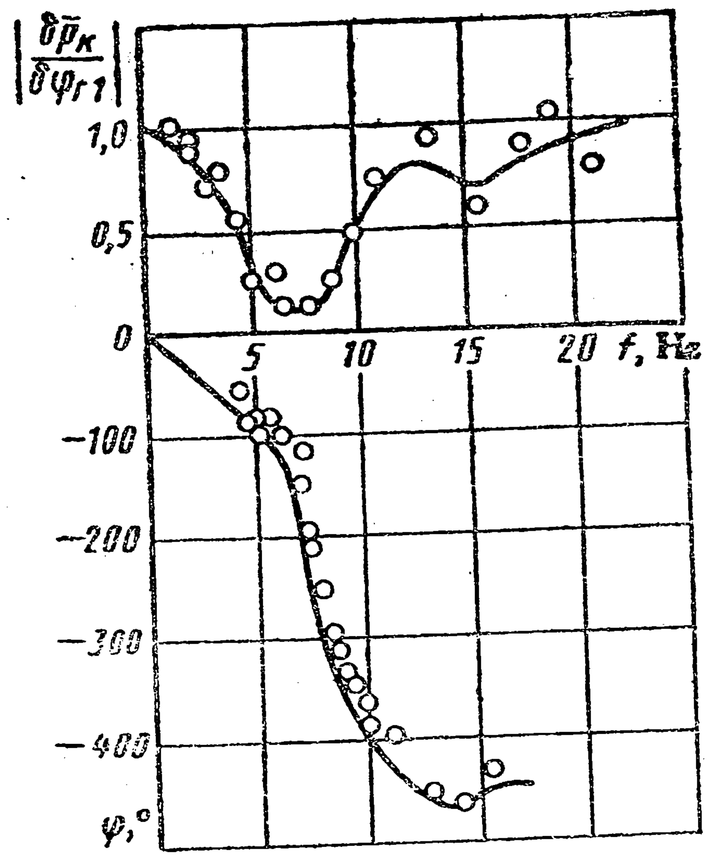



图7.12　调整调节器凸轮转角时补燃发动机的试验的频率特性曲线；
○—试验点。

对于有调节器的发动机(见图7.12)也如理论计算那样(见图7.2和7.8)，中频15～20Hz时的放大系数变得近似于静态放大系数。计算的发动机的幅频特性曲线（示于图7.8）不同于试验的特性曲线（示于图7.2)，后者在约20Hz频率范围内无谐振。这可解释为，由于调节器活动部分阻尼情况良好，调节系统的稳定性余度很大。

## 7.5　发动机回路在中频区的稳定性

除发动机的低频或声频自振同调节系统的工作，以及同燃烧室和燃气发生器中的工作过程有关外，整个发动机可能会失去稳定性，在此情况下，在失去稳定性的振荡回路中包含有发动机的许多组件和部件：涡轮泵、燃气发生器、连接它们的导管等等。熵波的形成和沿气路传播的过程，以及涡轮泵转轴的扭转振动在失去稳定性的回路内在自振的形成中起着决定性的作用。因为这些



自振的频率范围都在发动机液路和气路固有频率和声频（纵向频率)的区域内，所以在分析发动机稳定性时，上述发动机的所有组件和部件都必须看作具有分布参数的元件。以下将把自振本身假定称作“中频振荡”。该术语包含的意思是：这些振荡频率高于一般的低频振荡频率（同燃烧室或燃气发生器的工作过程，同调节系统的工作或同泵的气蚀有关)，并低于燃烧室的高频声振频率。

下面研究富氧燃气补燃发动机(见图1.1)。把液路和气路当作具有分布参数的元件来描述(见6.2节和6.3节)。涡轮泵方程中考虑了转轴的扭转振动。把方程(6.4.5)和(6.4.6)中描述弹性轴弹性的诸项移到右边并将其看作外部干扰作用且用下式表示：

$$\frac{2\pi cn}{60N_т}(\delta\varphi_{ок}-\delta\varphi_г)=\delta M_{кр} \qquad (7.5.1)$$

式中　$\delta W_{кр}$——对涡轮泵转轴扭矩有外部干扰作用的变化量。

为对比两种不同算法，用以下两种数学模型对同一台补燃发动机在约50Hz的频率范围内进行计算。这两种数学模型包括具有集中参数的数学模型(按公式(6.5.1)、(6.5.2))和具有分布参数的数学模型(按关系式(6.5.5))。图7.13示出了同一台无调节器的发动机的幅频特性曲线($A$)。这些曲线是按不同的算法在把$\delta M_{кр}$用作干扰作用的情况下计算出来的。对比这些幅频特性曲线可以看出，两种方法(不考虑和考虑声学效应)给出的结果在25Hz以内是接近的，而在25Hz到50Hz范围内量上的差别增大了一些。然而这些差别对于一次近似的分析是完全允许的。从定量上看，所有这些幅频特性曲线直到50Hz都是相合的。当较高频率时差别增大。

为分析发动机对中频回路振荡的稳定性，也可采用数学模型(6.5.5)，只是应将涡轮的弹性元件(弹性轴)的方程从该数学模型中分出来，并根据该弹性轴的弹性建立稳定性边界。使用单参数$D$-划分法[5]对弹性轴的弹性系数解方程(7.5.1)：

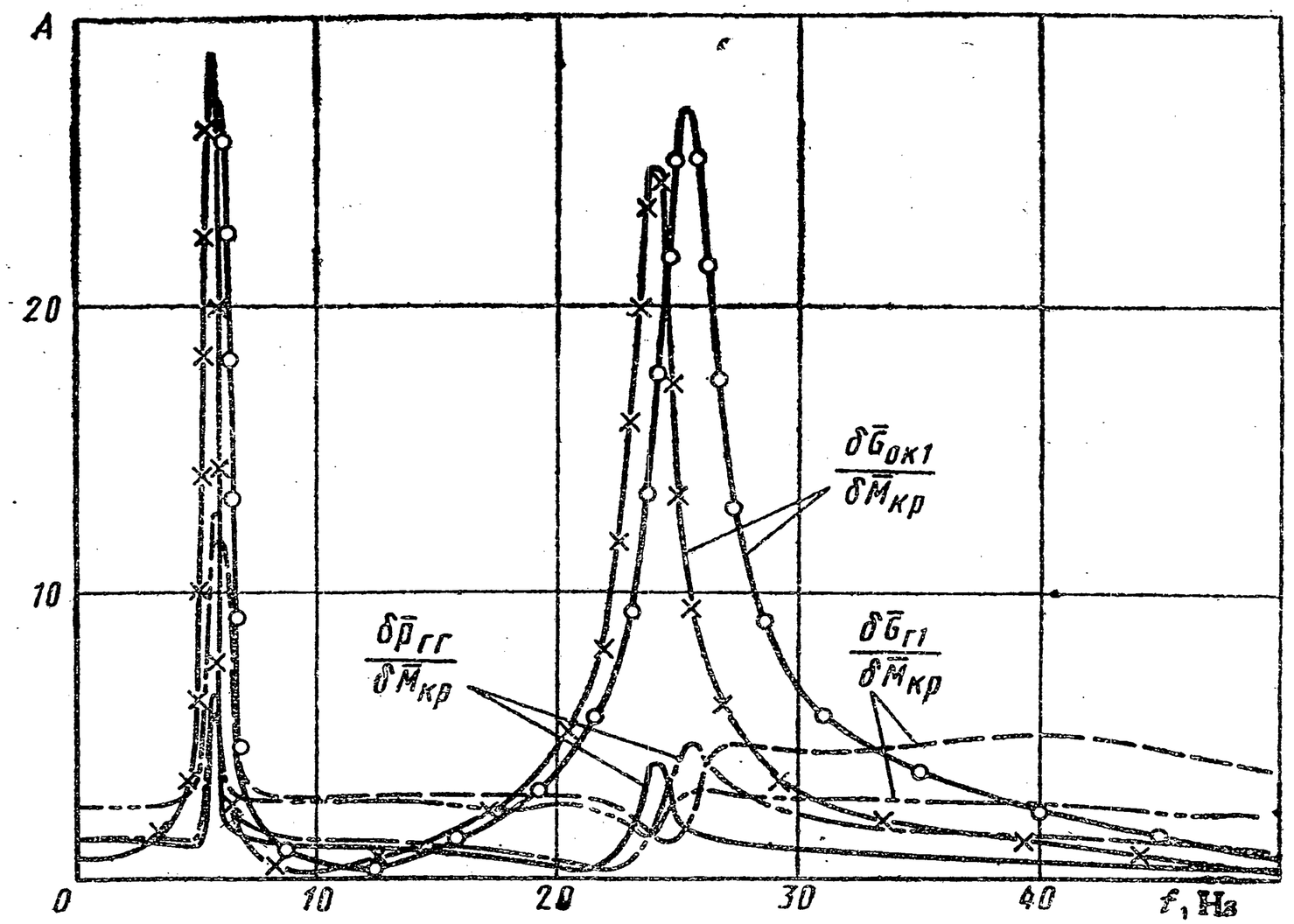



图7.13 液路和气路中考虑(—×—，—，—··—)或不考虑(—○—，---，—·—)声学效应时发动机计算的幅频特性曲线

$$c = c_{в}(\omega) + ic_{м}(\omega) = \frac{M_{кр}}{\delta\varphi_{ок}/\delta\bar{M}_{кр} - \delta\varphi_{г}/\delta\bar{M}_{кр}} \tag{7.5.2}$$

式中 $M_{кр} = 60N_{т}/(2\pi n)$——涡轮泵转轴扭矩；$c_{в}(\omega)$和$c_{м}(\omega)$——弹性轴弹性系数的实分量和虚分量（以下为方便起见写作$c_{в}$和$c_{м}$）；$\delta\varphi_{ок}/\delta\bar{M}_{кр}$、$\delta\varphi_{г}/\delta\bar{M}_{кр}$——在$\delta M_{кр}$干扰下按涡轮泵氧化剂和燃料泵转轴旋转角变化的涡轮泵内无弹性轴的发动机频率特性。

最方便的是利用弹性轴的无量纲弹性系数$\bar{c} = c/M_{кр}$。在此情况下，方程(7.5.2)取以下形式：



$$\bar{c} = \bar{c}_{в}(\omega) + i\bar{c}_{м}(\omega) = \frac{1}{\delta\varphi_{ок}/\delta\bar{M}_{кр} - \delta\varphi_{г}/\delta\bar{M}_{кр}} \tag{7.5.3}$$

利用公式(6.5.5)时，要把发动机所有组件和部件的方程当作具有分布参数元件的方程，包括涡轮泵两个部件的方程(6.4.5)和(6.4.6)和两个约束方程(6.4.4)都代入该公式，求出包含在关系式(7.5.3)中的频率传递函数$\delta\varphi_{ок}/\delta\bar{M}_{кр}$和$\delta\varphi_{г}/\delta\bar{M}_{кр}$。根据关系式(7.5.1)把引入涡轮泵两个部件方程(6.4.5)、(6.4.6)的转轴扭矩变化量$\delta\bar{M}_{кр}$当作外部干扰。

从关系式(7.5.3)中求出弹性轴无量纲弹性系数$\bar{c}$的实分量$\bar{c}_{в}$和虚分量$c_{м}$。在$f = 50 \sim 400$Hz范围内计算$\bar{c}_{в}$和$\bar{c}_{м}$时，可以用$D$-划分法确定$\bar{c}$的一套参数平面内的系统稳定性。因为弹性轴的弹性系数是一实数，所对应于该数稳定性边界的那些点将位于$D$-划分曲线同实轴的交叉处，稳定性边界剖面线在频率增大方向的左侧。相应地自剖面线一边被$D$-划分曲线隔断的实轴的诸段将代表弹性系数$\bar{c}$可能的稳定性区。在某些范围内改变发动机的某一结构参数或状态参数可求出稳定性区的变化情况。这样可确定两实参数(弹性轴无量纲弹性系数$\bar{c}$和选出的其它参数)平面内的稳定性边界。

对计算数据的初步分析表明，发动机对于回路自振方面的稳定性很大程度上决定于燃气发生器中的熵波幅值。因此按燃气发生器燃气的无量纲温度曲线斜率$\psi_{гг} = (k_{mгг}/T_{гг})(\partial T_{гг}/\partial k_{mгг})$和涡轮泵内弹性轴的无量纲弹性系数$\bar{c}$建立的稳定性边界显得更为直观。

图7.14示出了用参数$\psi_{гг} - \bar{c}$表示的富氧燃气补燃发动机（见图1.1)的稳定性边界。边界剖面线指向稳定区一边。为排除燃气发生器内工作过程的影响，假设燃气发生器内液体组元转化为燃烧产物的时间$\tau_{г} = 0$。

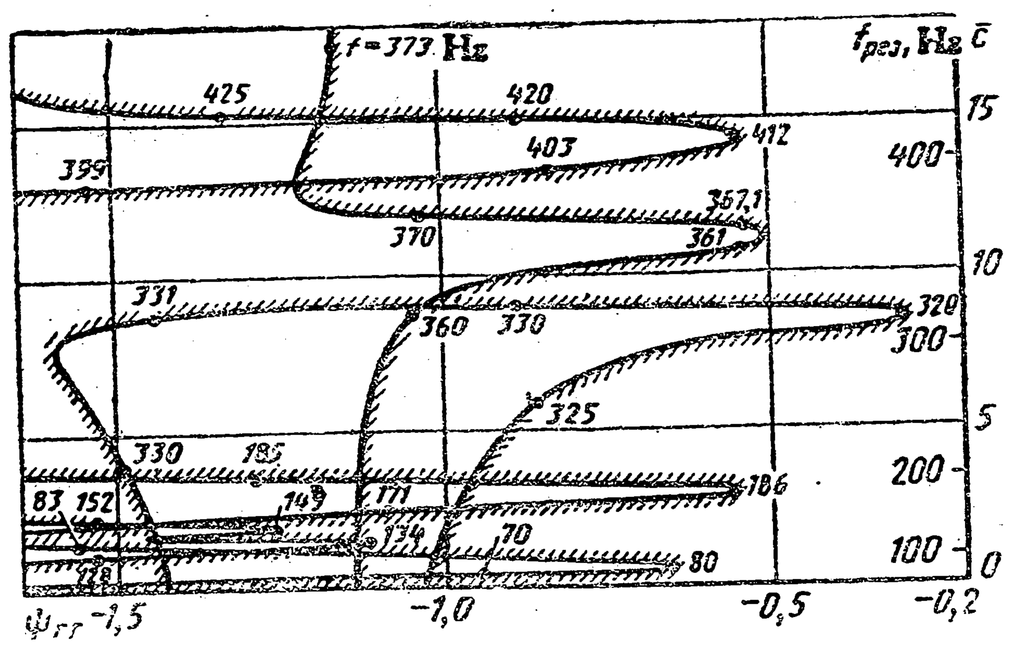



图7.14　考虑液路和气路中声学效应和涡轮泵内扭转振动时发动机的稳定性边界

这些稳定性边界的特征对于含具有分布参数元件的系统来说是典型的，一相对窄的稳定区和不稳定区互相交替（“锯齿”状）。每一“齿”的顶点都与弹性轴无量纲弹性系数$\bar{c}$的一定值相重合，而在每个转轴给定的惯性矩条件下，同样也有扭转振动自己的谐振频率$f_{рез}$同$\bar{c}$的一定值相对应。对于两根弹性连接的转轴$f_{рез}$可按以下公式计算：

$$f_{рез}=\sqrt{(J_{ок}+J_{г})c/(J_{ок}J_{г})}/(2\pi)$$

式中　$J_{ок}$、$J_{г}$——氧化剂泵和燃料泵转轴的惯性矩。

在图7.14上$f_{рез}$和$\bar{c}$都标注在同一轴线上，因为它们之间是单值相连的。

涡轮泵转轴扭转振动谐振频率和各“齿”顶上的频率实际上是重合的。由此可得出的结论是，当回路中各单个元件的特征频率同涡轮泵转轴扭转振动的固有频率重合时，系统稳定性的余量就会大大减小。在系数$\psi_{гг}$某些值的情况下，例如$\psi_{гг}=-1.15$，稳定性边界变为一条垂直线。这意味着，在该情况下不稳定性不是由涡轮泵转轴的扭转振动决定的，而是在转轴任一弹性系数的情况下都可能产生。然而当成为一条垂直线的稳定性边界的特征



频率同涡轮泵扭转振动的固有频率相重合时，该边界就会变形并产生不稳定性“齿”。在此情况下系统稳定性余量会降低。

为要识别稳定性边界上出现某些“锯齿”的原因，可以不对整个发动机，而对其一些个别回路的稳定性进行分析。这种分析有助于制定排除回路振荡的措施，如改变发动机结构元件的参数或采用专门的减振装置—阻尼器等。

## 7.6　过流流路内有熵波时的过程稳定性

前已证明，在一定条件下一些单个回路，以及这些回路同整个发动机一起都可能失去稳定性，在此情况下，在所研究的机理中熵波及涡轮泵转轴的扭转振动（当涡轮泵内有弹性轴时）起着决定性的作用。现研究发动机气路内产生低频振荡或出现谐振的另一机理，而决定该机理的是熵波引起的效应对气路内进行的过程的影响。

考虑了熵波和声学效应的气体动力特性在强迫振动下可用矩阵方程(3.6.15)描述。利用线性热力关系$\delta\bar{T}=\delta\bar{s}-(\varkappa-1)\delta\bar{p}/\varkappa$将温度变化幅值$\delta\bar{T}(0)$和$\delta\bar{T}(1)$换为熵的变化幅值。最终可求得六极网络方程的另一形式

$$\begin{aligned}\delta\bar{u}(0)&=y_{11}\delta\bar{p}(0)+y_{12}\delta\bar{p}(1);\\ \delta\bar{u}(1)&=y_{21}\delta\bar{p}(0)+y_{22}\delta\bar{p}(1);\\ \delta\bar{s}(1)&=y_{33}\delta\bar{s}(0),\end{aligned}\qquad(7.6.1)$$

式中 $y_{11}=\dfrac{\exp[i\bar{\omega}/(1-Ma)]+\exp[-i\bar{\omega}/(1+Ma)]}{a\{\exp[i\bar{\omega}/(1-Ma)]-\exp[-i\bar{\omega}/(1+Ma)]\}}$；

$y_{12}=-2/a\{\exp[i\bar{\omega}/(1-Ma)]-\exp[-i\bar{\omega}/(1+Ma)]\}$；

$y_{21}=\dfrac{2\exp[i\bar{\omega}(1-Ma)-i\bar{\omega}/(1+Ma)]}{a\{\exp[i\bar{\omega}/(1-Ma)]-\exp[-i\bar{\omega}/(1+Ma)]\}}$；

$y_{22}=-y_{11}$；$y_{33}=\exp(-i\bar{\omega}/Ma)$；$\delta\bar{s}(0)$；$\delta\bar{s}(1)$

是流路进口（$\bar{x}=0$）和出口（$\bar{x}=1$）处熵的无量纲诸变化量的幅值

(化为无量纲形式时，与其他变化量不同，认为熵的变化量是比热容$c_p$)；$Ma$为马赫数。

对于液路不用速度变化量而用流量变化量则更为方便，此时可利用流量同气体其他参数的关系$G=puF/(RT)$，其中$G$为气体流量，$F$为流路流通截面积。利用该关系可以写出

$$\delta\bar{G}=\delta\bar{p}+\delta\bar{u}-\delta\bar{T}=(1/\kappa)\delta\bar{p}+\delta\bar{u}-\delta\bar{s} \qquad (7.6.2)$$

由方程(7.6.1)和(7.6.2)求出

$$\begin{aligned}&\delta\bar{G}(0)=Y_{11}\delta\bar{p}(0)+Y_{12}\delta\bar{p}(1)+Y_{13}\delta\bar{s}(0);\\&\delta\bar{G}(1)=Y_{21}\delta\bar{p}(0)+Y_{22}\delta\bar{p}(1)+Y_{23}\delta\bar{s}(1);\\&\delta\bar{s}(1)=y_{33}\delta\bar{s}(0),\end{aligned} \qquad (7.6.3)$$

式中 $Y_{11}=y_{11}+1/\kappa$；$Y_{12}=y_{12}$；$Y_{21}=y_{21}$；

$Y_{22}=y_{22}+1/\kappa$；$Y_{13}=Y_{23}=-1$.

下面讲一下边界条件。为简化以下的运算，假定进入气路(燃气发生器、燃烧室)的有两种液体组元——氧化剂和燃料，且燃料流量是稳定的，即$G_\Gamma=\text{const}$，$\delta G_\Gamma=0$。如前，可将氧化剂流量变化量同燃烧产物温度变化量的关系式写作线性形式

$$\delta\bar{T}(0)=\psi_\Gamma\delta\bar{G}_{ок}, \qquad (7.6.4)$$

式中 $\psi_\Gamma=\dfrac{(G_{ок}/G_\Gamma)}{T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial(G_{ок}/G_\Gamma)}$——燃烧产物无量纲温度关系曲线的斜率；$\delta\bar{G}_{ок}$——流路进口处氧化剂流量无量纲变化幅值。

利用(7.6.4)关系式和$\delta\bar{s}$、$\delta\bar{p}$与$\delta\bar{T}$之间的热力关系可求出流路入口处熵的变化幅值—第一个边界条件

$$\delta\bar{s}(0)=\psi_\Gamma\delta\bar{G}_{ок}-[(\kappa-1)/\kappa]\delta\bar{p}(0). \qquad (7.6.5)$$

第二个边界条件是一明显的关系式

$$\delta\bar{G}(0)=[G_{ок}/(G_{ок}+G_\Gamma)]\delta\bar{G}_{ок},$$

该关系式在不考虑转化时间$\tau_\Gamma=0$的条件下由进口流量平衡方程得出。第三个边界条件是出口连续方程，具有线性形式，在超临



界压差下可写成(见第三章)以下形式：

$$\delta\bar{G}(1)=Y_H\delta\bar{p}(1)-\delta\bar{s}(1) \qquad (7.6.6)$$

式中 $Y_H=(\kappa+1)/(2\kappa)$。

利用关系式(7.6.3)～(7.6.6)和$\delta\bar{G}_{ок}$与$\delta\bar{G}(0)$之间的关系可求出这样的关系式，利用它可确定有熵波的流路中气柱的频率特性

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\bar{p}(1)}{\delta\bar{G}_{ок}}\\&=\frac{[Y_{21}+(\kappa-1)y_{33}/(2\kappa)](G_{ок}/(G_{ок}+G_\Gamma)+\psi_\Gamma)}{[Y_{21}+(\kappa-1)y_{33}/(2\kappa)]Y_{12}-(Y_{22}-Y_H)[Y_{11}+(\kappa-1)/\kappa]}\\&\rightarrow\frac{-[Y_{11}+(\kappa-1)/\kappa]y_{33}\psi_\Gamma/2}{[Y_{21}+(\kappa-1)y_{33}/(2\kappa)]Y_{12}-(Y_{22}-Y_H)[Y_{11}+(\kappa-1)/\kappa]}\end{aligned} \qquad (7.6.7)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\bar{p}(0)}{\delta\bar{G}_{ок}}\\&=\frac{y_{33}\psi_\Gamma Y_{12}/2-(Y_{22}-Y_H)[G_{ок}/(G_{ок}+G_\Gamma)+\psi_\Gamma]}{[Y_{21}+(\kappa-1)y_{33}/(2\kappa)]Y_{12}-(Y_{22}-Y_H)[Y_{11}+(\kappa-1)/\kappa]}\end{aligned}$$

量值$\delta\bar{p}(0)/\delta\bar{G}_{ок}$称作流路内气体输入阻力。(7.6.7)式可描述出口有临界喷管的流路内气体的动态特性。为得到一封闭的方程组(7.6.7)，还必须补充燃烧室液体氧化剂供应系统方程。在最简单的情况下，这将是喷嘴(推进剂经其进入燃烧室)的方程。描述通过喷嘴的成滴液流(氧化剂)的线性方程，在忽略液体惯性的条件下，具有以下形式(见第二章)：

$$\delta\bar{G}_{ок}=[\delta\bar{p}_{вх}-\delta\bar{p}(0)]/h_\phi, \qquad (7.6.8)$$

式中 $h_\phi=2\Delta p_\phi/p$；$\Delta p_\phi$——喷嘴平均压降；$\delta\bar{p}_{вх}$——氧化剂喷嘴入口压力变化幅值。

用$\delta\bar{G}_{ок}/h_\phi$除(7.6.8)式后可求出考虑了气柱特性和喷嘴特

性的燃气发生器（燃烧室）的输入阻力

$$Z_{вх}=\delta\bar{p}_{вх}/\delta\bar{G}_{ок}$$
$$=[h_{ф}+\mathrm{Re}(\delta\bar{p}(0)/\delta\bar{G}_{ок})]+i\mathrm{Im}(\delta\bar{p}(0)/\delta\bar{G}_{ок}),\qquad(7.6.9)$$

式中 $Re$、$Im$——复数的实部和虚部。

在有液体过流的守恒系统内谐振频率决定于影响系统的方法。在一种极限的情况下，当给出入口压力振荡时，入口的边界条件在声学上对应于流路的开端，而谐振频率可在$Y_{вх}=\delta\bar{G}_{вх}/\delta\bar{p}_{вх}=\infty$或$Z_{вх}=\delta p_{вх}/\delta G_{вх}=0$的条件下求出，此处$Y_{вх}$——系统的输入导纳；$\delta p_{вх}$、$\delta G_{вх}$——系统入口压力和流量的变化幅值。

在有液体过流的流路型守恒系统内谐振频率取决于影响系统的方法。但是由于能量随流走的液体被带出，有液体过流的流路实际上并不总是守恒系统。当有瞬时施加的干扰起作用时，在这样的系统内就会产生衰减振荡（若系统是稳定的话）。在此情况下，系统的固有频率便成为复合频率。对于有液体过流的非守恒系统，当给出入口压力振荡时(即在声学上是开式边界条件时)，把输入阻力虚部变为零，即

$$\mathrm{Im}(Z_{вх})=0\qquad(7.6.10)$$

条件下的那一频率称作谐振频率，同时输入阻力模数$|Z_{вх}|$取最小值。当衰减不大时，谐振频率接近于固有频率，尽管还不能同其重合。由关系式（7.6.9)可得出，带喷嘴的燃烧室的输入阻力同燃烧室内气柱输入阻力$\delta\bar{p}(0)/\delta\bar{G}_{ок}$的区别仅限于实部上。因此为要确定谐振频率只要研究无喷嘴的燃烧室内的气柱频率特性就够了。

图7.15(a)示出了按公式(7.6.9)当$\psi_{г}=-1$时，输入阻力实部和虚部的计算结果。在无量纲频率$\varpi=\omega L/a=0.25$上，燃烧室内气柱输入阻力虚部变为零。在该频率下阻力的实部最小，即



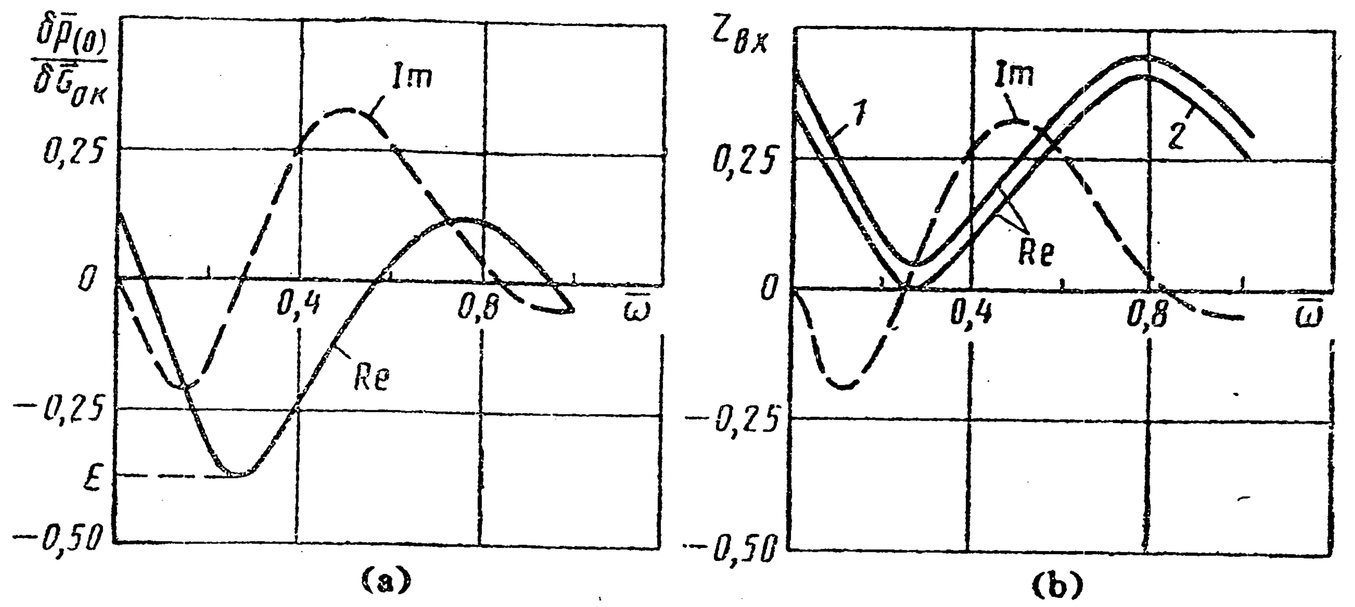



图7.15 输入阻力的变化图

（a）有熵波的流路内气柱的输入阻力；

（b）带喷嘴的燃烧室的输入阻力

从模数看实部具有最大的负值

$$\mathrm{Re}[\delta\bar{p}(0)/\delta\bar{G}_{ок}]=E$$

对于不等温介质流来说，确定振荡能量流的公式很复杂。然而可把所描述的流动，在以燃烧室内气体阻力的形式给定的载荷下，看作是经喷嘴入燃烧室的氧化剂的等温流。在此情况下，则可以利用确定谐振频率的（7.6.10）关系式和通过系统输入阻力的振荡能量流$\delta W_{к}$的公式[28]

$$\delta W_{к}=(1/2)|\delta G_{вх}|^{2}\mathrm{Re}(Z_{вх})\qquad(7.6.11)$$

由（7.6.11）式可以得出，若$\mathrm{Re}(Z_{вх})<0$，则系统是不稳定的，因为在系统内发生了产生振荡能量的过程。由方程(7.6.9)确定的燃烧室输入阻力和燃烧室内气柱的输入阻力两者的区别仅在于实部有大小不同的$h_{ф}$。当在$\varpi=0.25$附近的燃烧室内气柱输入阻力实部取负值时，可能有以下两种情况。若$h_{ф}>|E|$(图7.15(b)，曲线1)在该频率上$\mathrm{Im}(Z_{вх})=0$的条件成立，且$\mathrm{Re}(Z_{вх})$取模数的最小正值，则根据（7.6.10）的条件当燃烧室入口压力振荡时，频率$\varpi=0.25$对于燃烧室来说将是谐振频率，但根据关

系式（7.6.11）系统将是稳定的。当$E<0$，等式$h_\Phi=|E|$成立时（图7.15(b)，曲线2），根据(7.6.9)关系式等式$\mathrm{Re}(Z_{вх})=0$成立，而该等式即可确定系统的稳定性边界。在上述的例子中，当$\psi_\Gamma=-1$时（$h_\Phi=|E|$时），有熵波的燃烧室便位于$\varpi=0.25$附近的稳定性边界上。

这样一来，当熵波有着足够大的幅值时，系统可能在比气柱固有声振频率低得多的频率上失去稳定性。对于燃烧室内的气柱来说，对应于一个声学上的开端（入口）和另一个声学上的闭端（出口）的最小固有声振频率等于$\varpi=\pi/2$，即比频率$\varpi=0.25$几乎高一个数量级。

## 7.7 用电子计算机控制液体火箭发动机

电子计算机在所有的科学和技术领域内，或作为解算复杂的数学算题（包括控制领域内的算题）的计算手段，或作为控制过程、机器、仪器设备的装置都得到了广泛的应用。飞行器的现代控制系统就是建立在电子计算机基础上。因此根据飞行器的控制信道借助电子计算机可对液体火箭发动机进行控制。在该情况下计算机可控制飞行。然而还可利用计算机对发动机进行更低层次的控制，特别是在发动机工作的所有阶段控制其内部过程（监控发射前的准备工作，控制点火、启动、停车等等）。

利用飞行器上的计算机可大大提高控制系统的灵活性，即能够迅速改变其结构或参数。此外，飞行器上计算机的采用还可提高控制系统在精度和可靠性方面的特性，这对现代负荷很重的液体火箭发动机来说尤其重要，而对多次使用的发动机来说则更是如此。

现在来研究一下美国航天飞机用计算机控制液体火箭发动机的例子[37,38,39]。作为航天飞机主动力装置的氢氧发动机各有两



台富燃料燃气发生器和两台涡轮泵（氧化剂泵和燃料泵）。从涡轮排出的气体进入燃烧室。发动机的工作由五台并列的球形阀（节流阀）来控制，这些阀门在控制系统中起到闭锁机构和节流装置的作用。这些阀门有液压传动装置和后备的气动传动装置。它们可调节燃料和氧化剂的主流量，还可调节进入推力室冷却套的组元流量和进入燃气发生器的氧化剂流量。供应液压传动装置的液体和供应备用气动传动装置的气体来自于飞行器系统。

每一液压传动装置都有两个伺服阀。一个伺服阀坏了，后备的一个即开始工作。如果两个伺服阀都坏了，则备用的气动传动装置进入工作。所有传动装置的工作都由计算机控制器控制。为保证高度可靠，控制系统，包括计算机，都有两套或三套重要的电动元件。

电子计算机执行以下功能：

1）保证发动机同飞行器上的诸系统的联系以获取控制指令和电能；

2）对发动机进行发射前的检验测试并向控制飞行器的系统发出发动机作好启动准备的信号；

3）启动时对发动机阀门和点火系统的工作实施监控；

4）吹除时保证诸阀门必要的动作顺序，发动机启动和停车时保证冷却；

5）在所有工作阶段控制发动机推力和推进剂混合比；

6）显示发动机极限工况；

7）发动机分系统有故障时显示故障部件，接通备用部件以保证发动机安全工作；

8）向控制飞行器的系统传送有关发动机性能的数据，以便而后飞行期间技术服务过程中利用这些数据；

9）航天飞机主动力装置液体火箭发动机控制系统的灵活性可用更换计算机程序来达到。改变工序的顺序可用改变某一程序的方法来实现，这样需要的时间最少。

电子计算机控制系统[9,10,32]，即数字控制系统，与类似的一些系统的不同点是，进入计算机和自计算机输出的信号都是数码，且该数码每隔一定的时间间隔就发生变化。在数字系统内信号随时间和按电平而量化（即突变）。在有足够数位的计算机内电平的量化可忽略不计。

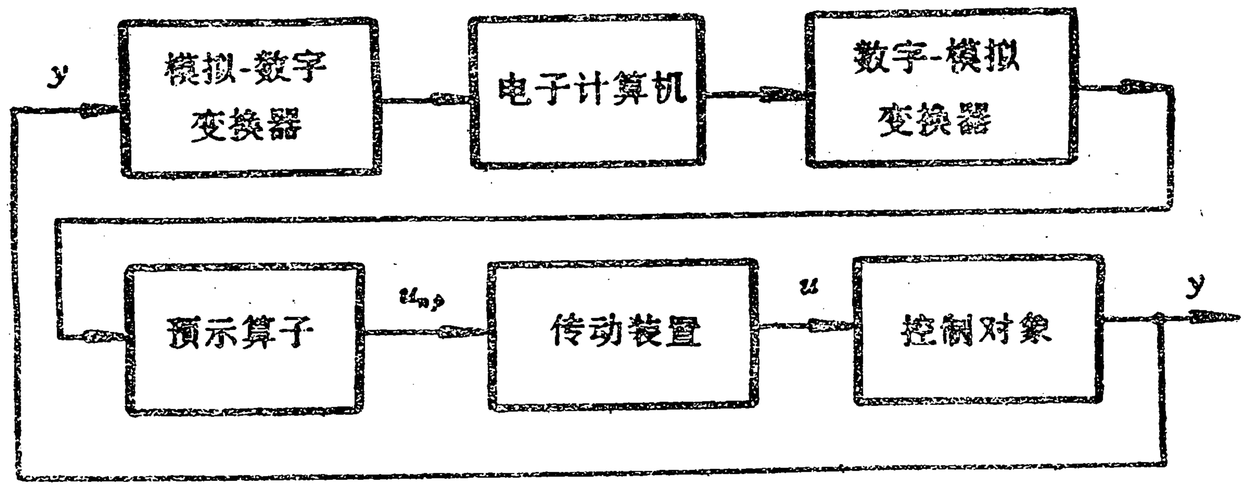



图7.16　电子计算机控制回路原理图

$y$—被控参数；　$u_{np}$—对传动装置的控制输入；

$u$—对控制对象的控制输入。

数字系统的基本特点是把使用数码和信号随时间的量化联系起来。计算机包括在控制对象的总回路中（图7.16）。电子计算机内有数码形式的信号，因此在其输入和输出端需要采用专门的变换器：模拟-数字变换器（АЦП）和数字-模拟变换器（ЦАП）。此外，控制回路内还有传动装置和预示算子。传动装置可以是模拟式的，也可以是数字式的。预示算子随着时间可在量化周期之间产生连续函数。若传动装置是数字式的，则计算机与传动装置之间不需要数字-模拟变换器。经常使用的是零阶预示算子，这类预示算子可把量化周期从开始到其结束期间所得的函数值保存起来。通常借助使用Z-变换器的传递函数或用对数局部特性法对数控系统动特性进行研究[10,32]。

对于最简单的线性近似用带滞后自变数的微分方程描述的液体火箭发动机来说，使用Z-变换和对数局部特性法有困难。因此将利用更为准确的，而对于该情况也是更简单的方法—微分方程



数值积分法。现把由方程(7.1.5)、(7.1.7)、(7.1.9)～(7.1.15)所描述的富氧燃气补燃的发动机线性模型作为计算例子。发动机数学模型内引入了数字调节器控制算法。在此情况下，将只按一条回路来研究控制问题，而且为简化起见，在一次近似中就假设诸初始变换器是最佳的，被测信号无噪声，计算机与系统其余部分之间的信息交换是瞬时进行的，且同量化周期$T_0$永远同步，即每一瞬间$nT_0$计算机都可接收到用于处理的信号，且同时可按上一周期发动机参数的测量数据以算法解的形式发出控制信号。

简化了的比例积分微分（ПИД）-调节器方程有以下形式[10]：

$$u(t)=k_{\text{р}}\left[e(t)+\frac{1}{T_{\text{и}}}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau+T_{\text{д}}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{7.7.1}$$

式中　$k_{\text{р}}$——调节器放大系数；$T_{\text{и}}$——积分常数；$T_{\text{д}}$——微分常数；$u(t)$——对控制对象的控制输入；$e(t)$——控制系统误差（被调参数给定值与测出值之间的差）。

量化周期$T_0$很小时，即当$T_0<\tau_{\text{об}}$时（此处$\tau_{\text{об}}$—对象的时间常数），用一阶差代替导数：

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{e(k)-e(k-1)}{T_0} \tag{7.7.2}$$

并用求和代替积分：

$$\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau=T_0\sum_{i=0}^{k}e(i) \tag{7.7.3}$$

（式中$k$为量化周期号）就可将方程（7.7.1）变为差分方程。

最后在将式（7.7.2）和（7.7.3）代入式（7.7.1）并用总和代替积分后，便可求出方程的非递归算法

$$u(k)=k_{\text{р}}\left\{e(k)+\frac{T_0}{T_{\text{и}}}\sum_{i=1}^{k}e(i)+\frac{T_{\text{д}}}{T_0}[e(k)-e(k-1)]\right\}$$

(7.7.4)

在（7.7.4)算法中为求出总和必须记住所有过去的误差信号值$e(k)$。递归算法的特点是，为要计算控制输入的现行值$u(k)$，只好使用前面的$e(k)$值。因此应从前面的步长表达式中

$$u(k-1)=k_{\text{р}}\left\{e(k-1)+\frac{T_0}{T_{\text{и}}}\sum_{i=0}^{k-1}e(i)+\frac{T_{\text{д}}}{T_0}[e(k-1)-e(k-2)]\right\}$$

减去（7.7.4)式。结果可求出

$$u(k)-u(k-1)=k_{\text{р}}\{e(k)[1+T_0/T_{\text{и}}+T_{\text{д}}/T_0]-e(k-1)\times(1+2T_{\text{д}}/T_0)+e(k-2)T_{\text{д}}/T_0\} \tag{7.7.5}$$

或变换后

$$u(k)=u(k-1)+q_0e(k)+q_1e(k-1)+q_2e(k-2) \tag{7.7.6}$$

式中

$$q_0=k_{\text{р}}(1+T_0/T_{\text{и}}+T_{\text{д}}/T_0);\quad q_1=-k_{\text{р}}(1+2T_{\text{д}}/T_0);$$

$$q_2=k_{\text{р}}T_{\text{д}}/T_0.$$

对比式（7.7.6)算法中的系数$q_1$的结构可以看出，有条件地表征数字调节器方程中的积分分量的无量纲值$T_0/T_{\text{и}}$同表征微分分量的量值$T_{\text{д}}/T_0$一起包含在系数$q_0$中。该系数$q_0$有第$k$个步长的误差。式（7.7.6）算法中的系数没有初始方程（7.7.1）中的诸系数所具有的那种明确的物理意义。

当量化周期是可比量的或大于对象的特征时间常数$T_0\geqslant\tau_{\text{об}}$时，模拟调节器方程（7.7.1)的不连续近似法显得不适用。然而就是在这种情况下也可使用（7.7.6)算法，但需根据对象特性，



特别是根据时间常数$\tau_{\text{об}}$，按照保证优良调节性能的条件选取系数$k_{\text{р}}$、$q_0$、$q_1$和$q_2$。

图7.17示出了用（7.1.5)、(7.1.7)、(7.1.9）～（7.1.15)诸方程描述的无调节器的发动机过渡过程曲线和有流量$\delta G_{\text{г1}}$模拟调节器的发动机过渡过程曲线。对于无调节器的发动机可以分为有时滞$\tau_{\text{з}}\approx0.014$s的和有时间常数$\tau_{\text{об}}\approx0.014$s的两个过渡过程特征段。计算机内的量化周期可在0.01～0.014s范围内选取，即对发动机来说通常$\tau_{\text{об}}\geqslant T_0$。

现来看一下上面讨论过的带有燃气发生器燃料流量调节器的调节系统，但在此情况下调节器是数字式的。在(7.7.6）算法中控制输入为$u=\delta F_{\text{г1}}$，调节误差为$e=\delta G_{\text{г1}}^{\text{з ад}}-\delta G_{\text{г1}}$，此处$\delta_{\text{г1}}^{\text{з ад}}$——根据程序给定的流量值。首先假定，执行机构（传动装置）要在来自计算机的信号到达后立即完成控制输入$\delta F_{\text{г1}}$的所需的改变，即把传动装置看成是无惯性的。

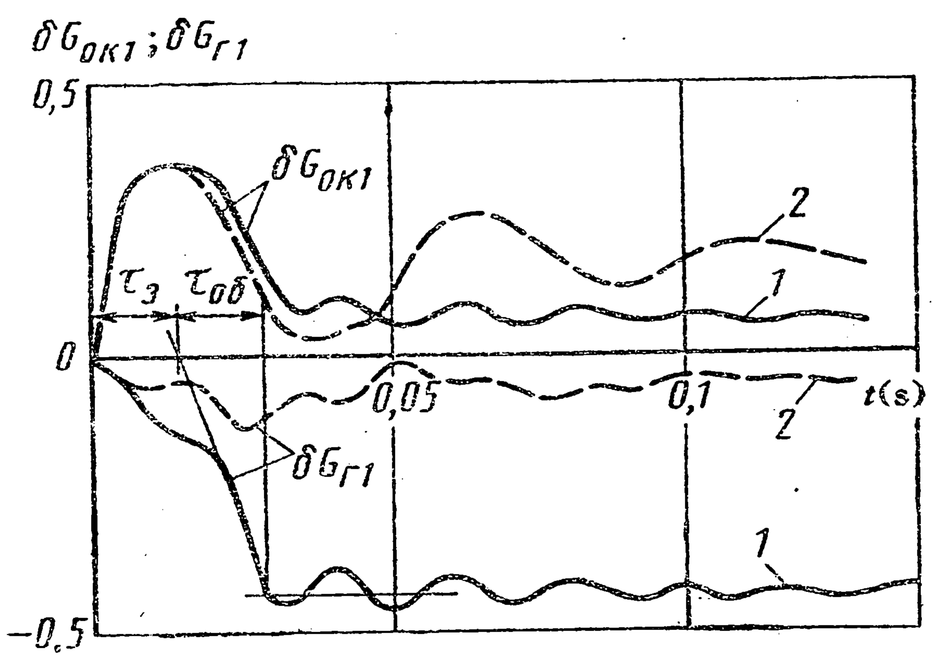



图7.17　发动机的过渡过程曲线
1—无调节器；
2—有模拟调节器。

下面对调节的比例算法、积分算法和比例-积分算法三者之间进行比较。按比例算法工作的数字式比例算法-调节器用从(7.7.4)式得出的方程描述，此时$T_{\text{д}}=0$、$T_{\text{и}}=\infty$、$k_{\text{р}}=q_0$：

$$u(k)=q_0e(k)$$

以发动机流量调节器符号表示时，该方程有以下形式

$$\delta F_{\text{г1}}^{\text{k}} = q_0 \delta G_{\text{г1}}^{\text{k}}, \qquad (7.7.7)$$

式中　$k$—量化周期号。

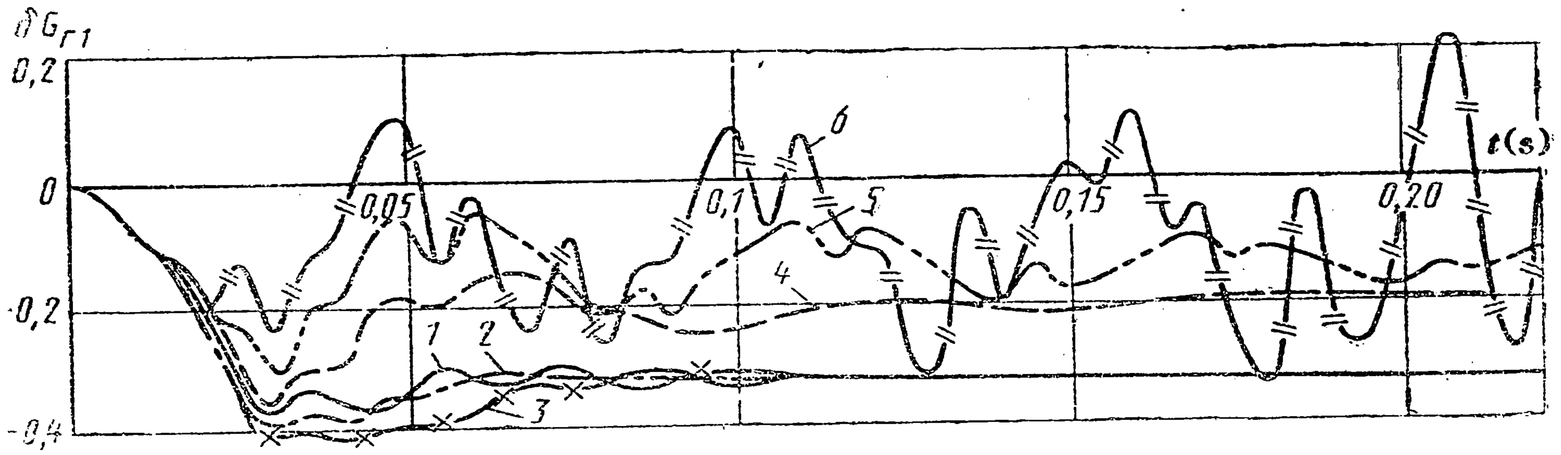



图7.18　有数字式比例算法-调节器的发动机的过渡过程曲线

1——$q_0 = -0.5$，$T_0 = 0.005$s；　2——$q_0 = -0.5$，$T_0 = 0.01$s；

3——$q_0 = -0.5$，$T_0 = 0.02$s；　4——$q_0 = -1.5$，$T_0 = 0.01$s；

5——$q_0 = -3$，$T_0 = 0.01$s；　6——$q_0 = -5$，$T_0 = 0.01$s

系数$q_0$（在该情况下是调节器放大系数）用优化过渡过程质量、调节精度和调节器-发动机系统稳定性的办法进行选取。

图7.18所示的曲线是参数$q_0$和$T_0$各种组合下的有数字式流量$\delta G_{\text{г1}}$调节器和无惯性传动装置的发动机过渡过程曲线。在放大系数小模量$q_0 = -0.5$的情况下（曲线1、2、3），$T_0$在0.005～0.02s范围内的变化对过渡过程特性的影响不大。在这样的$q_0$下能保证过渡过程有良好的质量，但$\delta G_{\text{г1}}$的精度显然不高。$q_0 = -1.5 \sim -3$时，精度可提高，但过渡过程质量下降—可出现被调参数值及这些值的变化的暂时增大，特别是$q_0 = -3$时，增大得尤为明显。放大系数模量继续增大时，系统会失去稳定性。这样一来，由于模量$q_0$受系统稳定性条件的限制，当量化周期足够小$T_0 = 0.01$s且在无惯性传动装置条件下时，数字式流量比例算法-调节器在本例中不能保证适宜的调节精度（对于美国航天飞机液体火箭发动机计算机$T_0 = 0.02$s[37]）。而有液压模拟式调节器的系统，当时间常数$\theta_1 = \theta_2 = 0$（见图7.6）和差率$\nu = 0$时，即其放大系数为无



限大时，则是稳定的。出现差别的原因是，数字式调节器不同于模拟式调节器的根本点是其在执行指令时滞后一个时间$T_0$，该时间接近于发动机的特征时间$\tau_3$和$\tau_{\text{об}}$（见图7.17）。该滞后使系统失去稳定性。

现在来看按积分算法工作的调节器方案。按照(7.7.6)式，此时$k_{\text{p}} = T_{\text{д}} k_{\text{p}} = 0$，$k_{\text{p}} T_0 / T_{\text{и}} = q_0$。其结果是该算法具有$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k)$的形式，或用发动机参数表示时具有以下形式：

$$\delta F_{\text{г1}}^{k} = \delta F_{\text{г1}}^{k-1} + q_0 \delta G_{\text{г1}}^{k} \qquad (7.7.8)$$

图7.19示出了带调节燃气发生器燃料流量的积分算法-调节器的发动机过渡过程的计算结果（曲线1～3）。积分算法-调节器是用方程(7.7.8)描述的，其中$T_0$有各种不同的值，$q_0 = -1$。积分算法-调节器按积分算法工作。将这些曲线同图7.18所示的带比例算法-调节器的发动机的曲线对比可以看出，在保持被调参数（燃料流量）精度方面，积分算法-调节器具有明显的优势。而同时当$T_0 = 0.02$s时燃料流量在$t \approx 0.05$s瞬间的初始偏差实际上仍没有变化，且约等于$-0.4$。这样，积分算法-调节器（也像比例算法-调节器一样）虽然大大提高了精度，但也不能保证过渡过程的良好质量，会出现振荡特性，振荡的频率与$T_0$值有关。

还有一个调节器（比例积分算法-调节器）方案，该调节器按比例-积分算法工作，用以下方程描述：

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1). \qquad (7.7.9)$$

图7.19上除带积分算法-调节器的发动机过渡过程曲线1～3外，还示出了带比例积分算法调节器的发动机曲线4。对比带这两种调节器的发动机曲线，可以看出后者在过渡过程质量方面的优势。

上述的一切计算结果都属于无惯性执行机构（传动装置）的调节系统。现在来研究具有某些特性的传动装置对发动机动态特性的影响。现将具有恒速的传动装置引入调节系统。设燃气发生

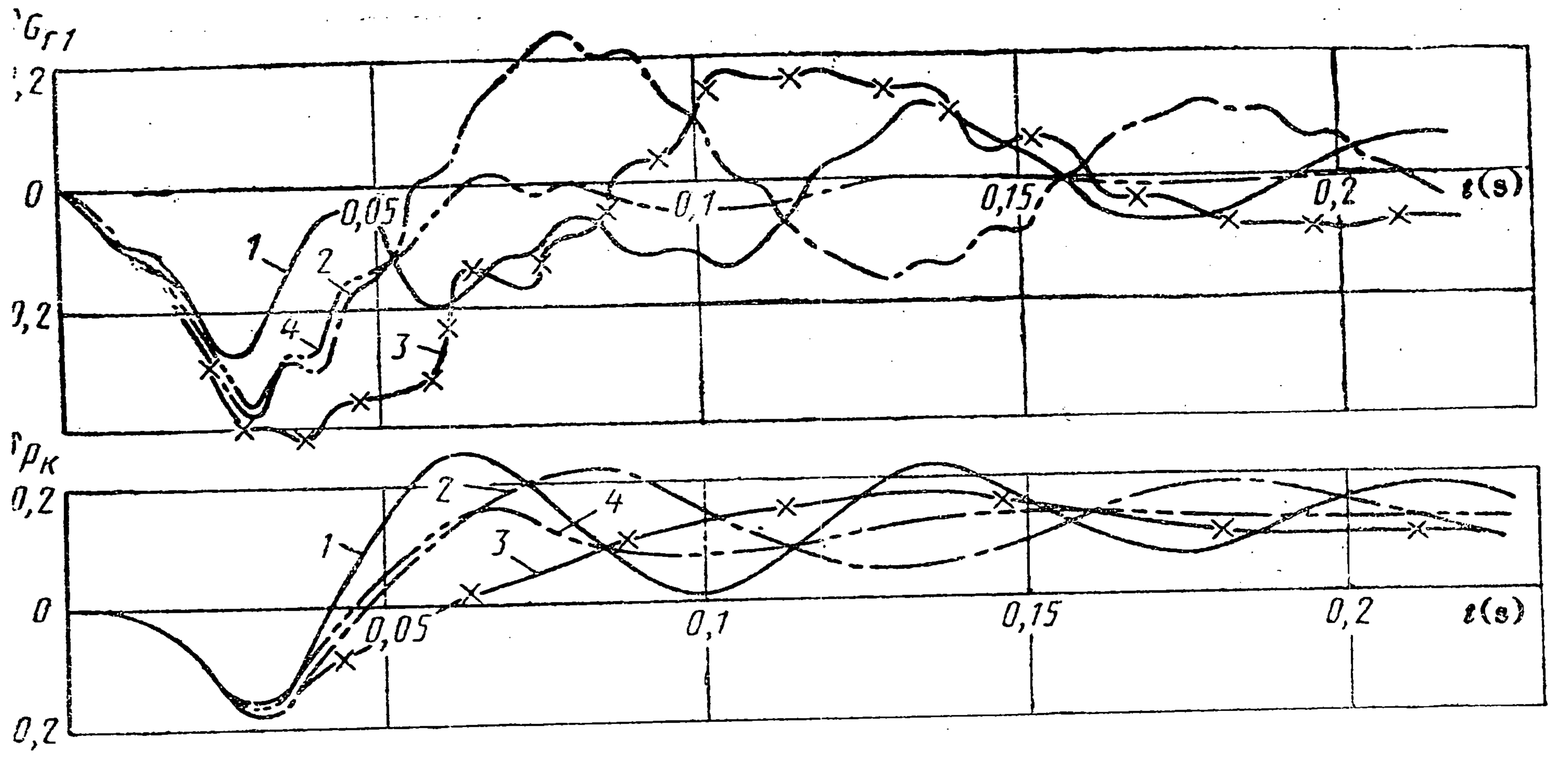



图7.19　带数字调节器的发动机的过渡过程曲线

1、2、3—积分算法-调节器，$q_0=-1$；$T_0=0.005$s，$T_0=0.01$s和$T_0=0.02$s；4—比例积分算法-调节器，$q_0=-1.5$，$q_1=1$。

器燃料路上的节流阀传动装置的速度$v_{пр}=200°/s$作为起始速度。现认为节流阀凸轮最大转动角为200°，且传动装置可保证在1s内将节流阀从一支点转到另一支点。调节系统内引入传动装置时（见图7.16），系统的数学模型会改变，因为此时$u_{пр}\neq u$，会出现新的变量$u_{пр}$—信号。此信号由数字调节器形成并被传送到传动装置进口。对应于发动机用$u=\delta\mu F_p$（同过去一样），$u_{пр}=\delta x_{пр}$来表示，此处$\delta\mu F_p$——对发动机的控制输入，由传动装置形成；$\delta x_{пр}$——对传动装置的控制输入，由数字调节器形成。

在一次近似中可写出以下传动装置方程：

$$\delta\mu F_p^к=\delta\mu F_p^{k-1}-\operatorname{sign}(\delta x_{пр}^к-\delta x_{пр}^{k-1})T_0\bar{v}_{пр} \tag{7.7.10}$$

式中　$\bar{v}_{пр}$——传动装置的速度除以最大转动角（即200°）。此时的$\bar{v}_{пр}$的计量单位为$s^{-1}$，而积$T_0\bar{v}_{пр}$则是无量纲的。

（7.7.10）方程的意义在于，传动装置可根据调节误差的符



号来改变燃料节流阀的通过截面积，而且这种改变在整个周期$T_0$期间是以恒速$\bar{v}_{пр}$进行的。采用以下形式的积分算法：

$$\delta x_{пр}^k=\delta x_{пр}^{k-1}-1{,}0\delta G_{r_2}^k. \tag{7.7.11}$$

在小的传动速度下，所需（按调节误差值）值$\delta x_{пр}$在周期$T_0$期间尚来不及完成。图7.20示出了发动机被调参数过渡过程的计算结果，其传动装置的速度为$\bar{v}_{пр}=1$（即$v_{пр}=200(°)/s$，曲线2）以及$T_0=0.02$s。在该图上还示出了另一条发动机过渡过程曲线1，该发动机也带有用关系式（7.7.11）描述的同样的调节器，但传动装置是无惯性的（在此情况下$\delta x_{пр}^k=\delta\mu F_p^k$）。对比这些曲线可以看出，采用较小速度的传动装置极大地改变了过渡过程的性质——过渡过程的时间大大增加，频率约6Hz的非衰减振荡（自激振荡）代替了频率为10Hz的衰减振荡。

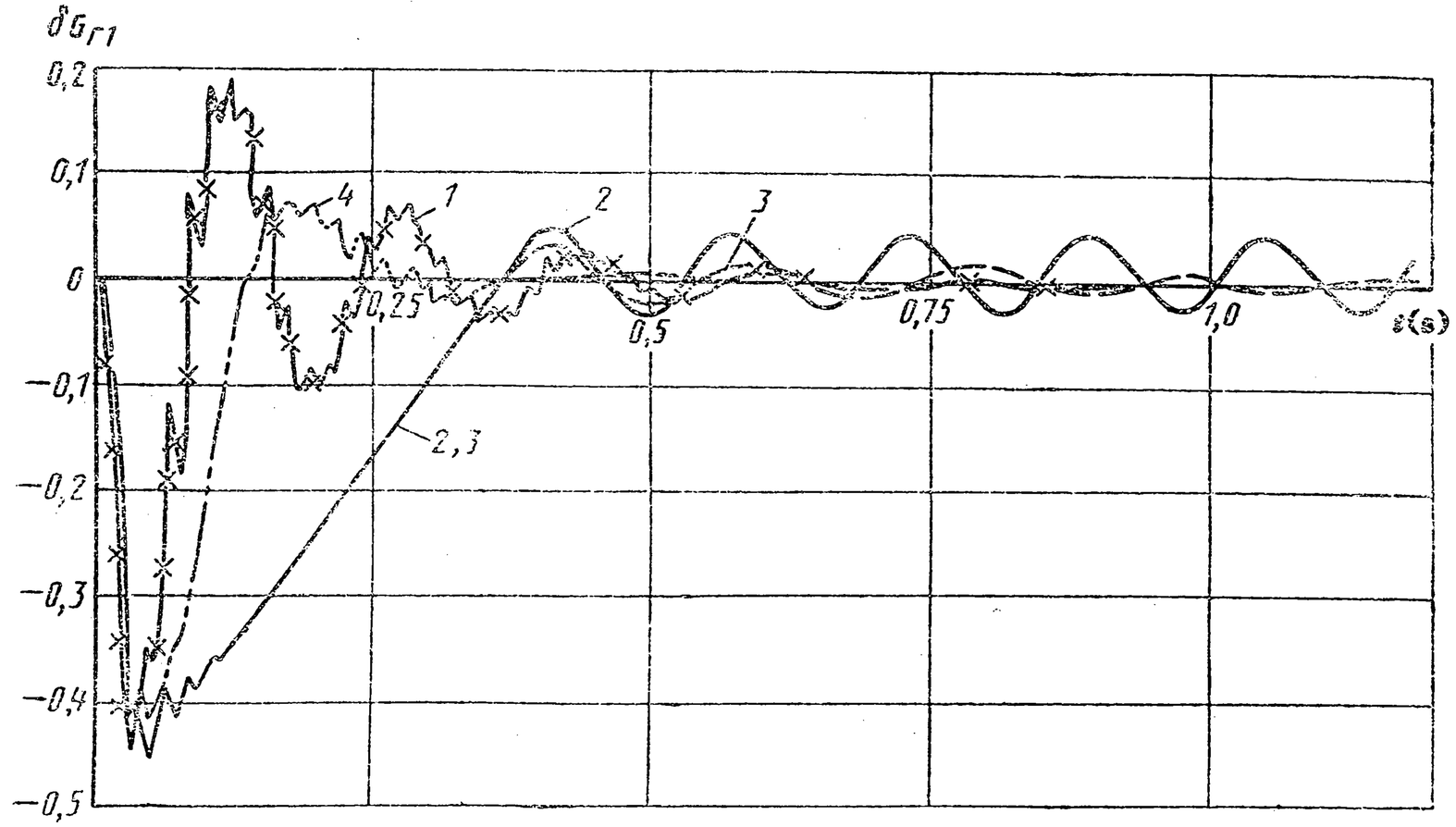



图7.20　在各种传动装置情况下带积分算法——调节器的发动机过渡过程曲线

1——无惯性的传动装置；　2——$v_{пр}=1$；3——有变速的传动装置和$\bar{v}_{пр_{max}}=1$；4—有变速的传动装置和$\bar{v}_{пр_{max}}=5$

为消除振荡必须将上述传动装置换为具有可变有效速度$\bar{v}^{k}_{\text{прэф}}\sim|\delta G^{k}_{\text{г1}}|$的传动装置，而该有效速度在最大值$\bar{v}_{\text{прmax}}=1(v_{\text{прmax}}=200(°)/\text{s})$时与调节误差成正比。采用该传动装置（见图7.20,曲线3)消除了自激振荡,减小了过渡过程情况下$\delta_{\text{Gг1}}$的瞬时增加量，但是过渡过程时间（将近0.5s）太长。如果把传动速度增加到5倍,取$\bar{v}_{\text{прmax}}=5(v_{\text{прmax}}=1000(°)/\text{s})$，则根据计算（见图7.20,曲线4)过渡过程时间约可减小到0.25s。若继续增大$\bar{v}_{\text{прmax}}$，就其性质看，其过渡过程近似于无惯性传动装置的过渡过程（见图7.20，曲线1)。因此，考虑传动装置的特性对发动机调节质量有着根本性的影响。

在所有上述情况下，在所列过渡过程计算结果中，过程开始时参数都短时减小45%。减小的原因是干扰度很大—氧化剂路节流阀通过截面积作100%的瞬间改变。参数$\delta G_{\text{г1}}$短时减小的原因是：数字调节器对被调参数偏差开始反应的时间滞后了两个周期（$T_0=0.02$s时，该滞后时间为0.04s)。而在使用液压（模拟）调节器时（见图7.17),在过渡过程曲线上则见不到这样规模的减小情况，此时调节误差一出现，模拟调节器截面积立即开始改变。因为调节对象（发动机）时间常数$\tau_{\text{об}}=0.014$s，所以燃料流量（像其他许多参数一样）明显地来得及（在$2T_0$时间内）改变。$T_0$愈大，流量的变化愈大（见图7.18)。要说明的是，这只同瞬时施加的干扰有关。这种类型的干扰实际上在发动机内很少遇到。如果干扰在大于$2T_0$的某一时间内继续增大，则这样的参数的急剧改变在过渡过程的条件下是不会有的。

## 7.8 反作用控制系统动态特性

### 7.8.1 分支管路系统频率特性

飞行器的反作用控制系统(PCY)通常是一个有挤压式供应



系统的多管液体火箭发动机。从动力学的观点看，与前面所述各类发动机作比较，这些发动机的基本特点是，这是一个向多个燃烧室供应液体或气体组元的分支管路系统，并可多次，包括周期性地启动燃烧室。发动机流路长,分支多，工况是周期性的，这些会在供应系统内促使产生动力学现象(水击、谐振等等)并使这些系统动态工况计算复杂化。燃烧室过程动态特性前已描述过，本节要研究的是分支供应系统中的动态过程。

由于反作用控制系统有可能在脉冲周期工况下工作，故了解一下发动机反作用控制系统供应系统的谐振特性是有意义的。反作用控制系统的供应系统是一个相当复杂的分支系统，它由不同直径和长度的过流流路分段(通向工作的发动机)和不过流流路分段(通向未工作的发动机)、局部阻力、自动器诸组件等等组成[11]。图7.21(a)示出了树枝型分支液路系统图，并用该系统进行了动态特性试验。流路第$i$分段的长度$L_i$除以流路从入口到出口的最大长度$L_{\max}$，即为$\bar{L}_i=L_i/L_{\max}$。5、11、19诸分段末端设置有局部阻力(节流孔板)，工作液体(水)通过它们流入大气，其它各分段末端则被堵住。

分支液压系统动力特性研究装置上流路各分段的长度$\bar{L}_i$和直径$D_i$(单位以米计)具有以下一些值(图7.21(a))：

$\bar{L}_1=0.076;D_1=0.03;\bar{L}_2=0.163;D_2=0.02;$

$\bar{L}_3=0.365;D_3=0.02;\bar{L}_4=0.16;\ D_4=0.01;$

$\bar{L}_5=0.14;D_5=0.01;\ \bar{L}_6=0.05;\ D_6=0.02;$

$\bar{L}_7=0.15;D_7=0.02;\ \bar{L}_8=0.15;\ D_8=0.03;$

$\bar{L}_9=0.133;D_9=0.02;\bar{L}_{10}=0.04;D_{10}=0.02;$

$\bar{L}_{11}=0.16;D_{11}=0.01;\bar{L}_{12}=0.33;D_{12}=0.01;$

$\bar{L}_{13}=0.22;D_{13}=0.02;\bar{L}_{14}=0.30;D_{14}=0.02;$

$\bar{L}_{15}=0.04;D_{15}=0.02;\bar{L}_{16}=0.10;D_{16}=0.03;$

$\bar{L}_{17}=0.15;D_{17}=0.02;\bar{L}_{18}=0.04;D_{18}=0.02;$

$\bar{L}_{19}=0.1;D_{19}=0.01;\bar{L}_{20}=0.16;D_{20}=0.01;$

$\bar{L}_{21}=0.25;D_{21}=0.02;\bar{L}_{22}=0.27;D_{22}=0.02;$

$\bar{L}_{23}=0.09;D_{23}=0.01.$

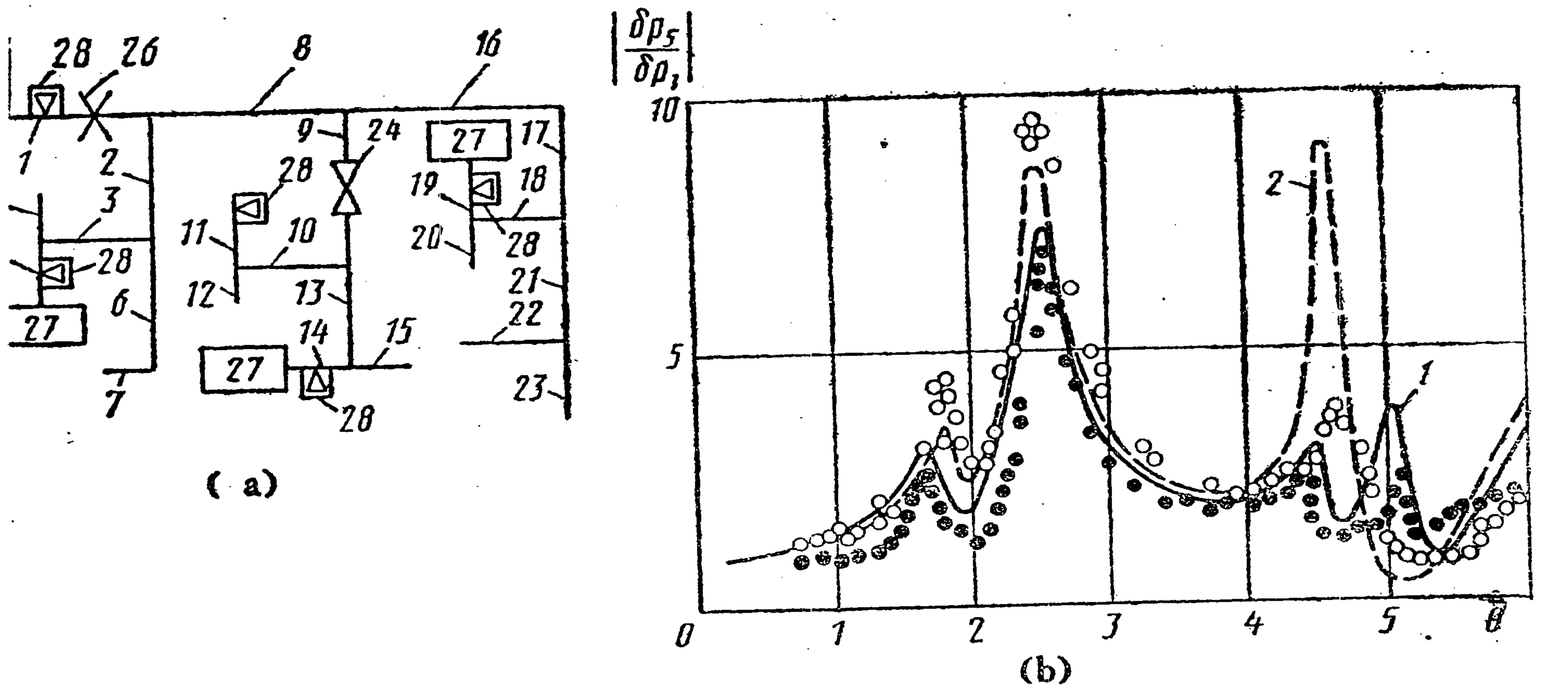



图7.21 分支液压系统

(a)示意图：1～23—管路分段；24—阀；25—容器；

26—局部阻力；27—电磁阀；28—初级压力变换器。

(b)借助于安装在分段5上的初级压力变换器所获得的幅频特性曲线：

·全系统工作时的试验点；

○当阀24关闭时，系统工作的试验点；

1—全系统的理论幅频特性曲线；

2—当阀24关闭时，系统的理论幅频特性曲线。

为确定系统的频率特性，在分段1的入口安装了一个节流脉动器(图上未标出)，它可产生近似于谐振的振荡。在1、5、11和19各分段上安装了小惯性初级压力变换器28。与试验的同时还按第2.9节所述的方法进行了系统的幅频特性计算。计算时使用了脉动非稳态层流模型。图7.21(b)示出了分支液路系统以下两个方案的试验与计算结果：示于图7.21(a)的全系统方案和简化系统方案。为获得此简化方案，关闭了分段9上的阀24(见图7.21(a))以切断部分分支系统。处理试验数据和计算时，把系统的分段5上的压力变化量$\delta p_5$除以系统入口(分段1)压力变化量$\delta p_1$。

由于系统的分段数量大，且有分支，其幅频特性有许多谐



振。对于长度为$L_{max}$、端部有边界条件的直的无分支流路，无量纲固有振荡频率决定于公式$\bar{\theta}_1=\omega_1 L_{max}/a=1.57$；$\bar{\theta}_2=4.71$；$\bar{\theta}_3=7.85$等等，其中$\omega_i$、$\bar{\theta}_i$——流路内液体有量纲和无量纲固有振荡第$i$个频率，$a$——声速。而上述端部边界条件则对应于敞开的入口(已给出压力变化量$\delta p_1$)和声学上封闭的出口(根据第2.5节的数据)。在此情况下，在有壁面摩擦损失的系统内，出口压力变化量幅值对流路入口压力变化幅值之比的最大模量值可达到第一谐振频率的最大值[6,7]。

在复杂的分支系统下，如不对其进行计算，很难确定系统的谐振频率值。由图7.21(b)和7.22所示的幅频特性曲线可得出，在所研究的系统中，在所考察的无量纲频率$0<\bar{\theta}<6$的范围内有谐振频率$\bar{\theta}_1=1.62$；$\bar{\theta}_2=2.5$；$\bar{\theta}_3=4.4$；$\bar{\theta}_4=5.1$。谐振频率$\bar{\theta}_1=1.62$和$\bar{\theta}_3=4.4$在流路所有分段上测量时都会出现。然而系统结构的多分支会导致压力振荡某些谐振频率只对系统的局部才是有特征性的。例如，对于无量纲频率$\bar{\theta}_2=2.5$，只在包含于第一支路(从入口算起)的分段5的末端上才有压力谐振(见图7.21(b)，$|\delta p_5/\delta p_1|$)。所谓支路应理解为水平线(见图7.21(a))以下的系统那些部分。而与此同时在第三支路分段19的末端(见图7.22，$|\delta p_{19}/\delta p_1|$)频率$\bar{\theta}_2=2.5$处无谐振，且压力振荡能级近似于入口处的振荡($\delta p_1$)。

在切断系统第2支路的条件下(但$L_{max}$保持不变)，系统频率特性会有某些变化(见图7.21(b)和7.22，点0，幅频特性曲线2)。第一谐振频率移入更高的频率区($\bar{\theta}_1'=1.8$)，尽管流路长度$L_{max}$没变；第二谐振频率($\bar{\theta}_2'=2.5$)实际上没变，而在系统所有分段上都产生一个频率为$\bar{\theta}_3'=4.65$的谐振来代替频率为$\bar{\theta}_3=4.4$和$\bar{\theta}_4=5.1$的后两个谐振。按2.9节所述方法进行计算的结果接近于在包括前两个谐振的频率范围内进行试验的数据(这对反作用控制系统的实际计算最为重要)。在较高频率区计算结果和试验结果之间有些差别——试验点位于计算点之下。看样子这一差别

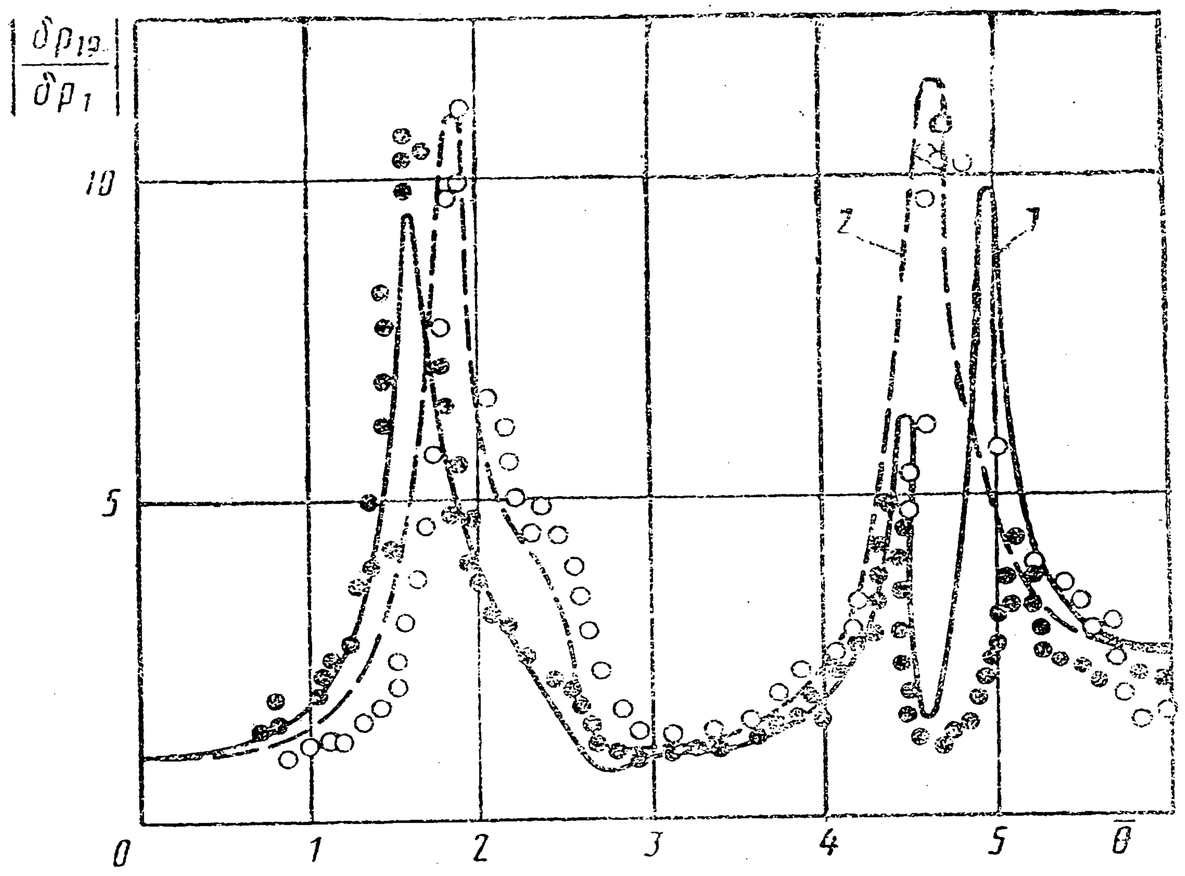



图7.22　借助于安装在第19分段上(见图7.21(a))的初级变换器获得的分支系统(见图7.21(a))的幅频特性曲线

的原因是流路内非稳态摩擦模型在高频情况下不够精确，再就是转弯和分支处液体非稳态流造成的损失是一些未知数(也就是说未加考虑)。这些问题还需进一步研究。

### 7.8.2　分支液路系统内的过渡过程

分支液路系统内过渡过程的研究是在示于图7.21a的装置上进行的。液体(水)自容器25送入被研究的系统。在分段1上设有具有一定压差的局部阻力26。系统内的过渡过程靠快速打开(关闭)分段5和19末端的电磁阀来建立。电磁阀的打开时间约为0.005s，关闭时间约为0.002s。进行试验时，用惯性小的感应式初级压力变换器记录压力$p_i$随时间的变化。变换器的读数记在示波器和磁带机上。

局部阻力压差为$1.3\times10^5$Pa。将综合值$\rho ua/(2\Delta p)$($\rho$——液体密度；$a$——声速；$u$——分段1内的液体速度，$\Delta p$——局部阻



力压差)同1作对比可以看出，局部阻力边界条件(见2.6节)实际上符合声学闭端。将试验结果同计算数据对比时，边界条件值是非常重要的。

理论上描述分支液路系统内非稳态流体动力学过程时(见图7.21(a))，使用了第2.5节导出的具有准稳态壁面摩擦力的管子中的一维流数学模型。用特性线法计算时考虑到，容器25的容积足够大，且靠增压系统可保持该容器内的压力不变。因此取压力恒定条件作为分段1入口处的边界条件。系统的静态液流试验结果表明，各分支处的压力损失不大，即大大地小于局部阻力和电磁阀的压力损失。因此计算时假定分支处无压力损失，并使用了流量平衡方程。

在对通过局部阻力的液流进行计算时，忽略了液体的惯性并使用了准稳态的假设，即计算压力损失时使用了静态液流试验时确定的流量系数$\mu$。还假设电磁阀打开(关闭)时的有效通过截面积$(\mu F)_{э.к}$只随该截面几何面积的改变而发生变化。计算时考虑了液体中的声速同流路直径以及同该流路的壁厚和材料的关系。图7-23示出了所研究系统过渡过程的试验曲线和计算曲线。同一过渡过程的试验曲线和计算曲线都用同一号码表示。曲线1和2表示分段19出口处电磁阀27打开时分段11和19端部的压力变化(见图7.21(a))。计算结果同试验数据一致。

图7.23上的计算曲线3是在改变系统入口边界条件下得到的。这时在计算中假定将容器25直接移至阻力26的后面，并将阻力26撤销。将大容积的容器装在系统入口可在当地建立起另一边界条件—流路声学开端条件，同时得到对应于声学闭端边界条件(有局部阻力时)的曲线1和2(见图7.23)。对比曲线1和3可以看出，尽管复杂分支系统内部只有一个边界条件发生改变，也会在系统内导致过渡过程振荡形状和频率的极大改变。在该情况下，液路系统内振荡频率由90Hz下降到60Hz。在此情况下，电磁阀27(见图7.21(a))打开时产生的第一次压力短时下降与系统入口边

界条件无关，而且下降情况也总是一样的(见图7.23,曲线1和3)，因为在电磁阀打开的那一时间内压力波还来不及到达局部阻力处并且返回来，即来不及对压力改变的特性产生影响。

图7.23上曲线4、5和6描述的是分段5端部另一电磁阀 27(见图7.21(a))打开时系统内的过渡过程。该电磁阀到第一个分支点(分段3、4和5的分支处)的距离大于分段19端部电磁阀27到类似的分支点(分段18、19和20的分支处)的距离，因此曲线4(见图7.23中参数$p_5$)上压力的第一次短时下降大于曲线1(参数$p_{19}$)上的压力下降。图7.23还示出了所研究系统内过渡过程的计算结果(曲线5和6)，其对应的情况是入口(设置局部阻力处)边界条件对应于分段1的声学开端(见图7.21(a))，和上面所说的一样。

入口边界条件改变和分段5上电磁阀打开时，过渡过程的特性也会有极大的改变。像从对比曲线5和6(见图7.23)所得出的那样，在设置初级变换器处(压力$p_5$)开始时会出现频率约100Hz的振荡，该振荡衰减后，就稳定在一阶谐振频率(约60Hz)上。同时在设置初级变换器(压力$p_{19}$)的截面上(该变换器位于距引入干扰处足够远的地方)系统的一阶谐振频率立即变为主要振荡频率。因此，根据引入干扰处和分支系统内压力振荡测量处两者的相互位置便可记录下整个系统的一阶谐振频率，还可记录下对应于系统各部分谐振的更高的频率。

要指出的是，电磁阀27(见图7.21(a))关闭的时间(约0.002 s)小于打开的时间(约0.005s)。此外，电磁阀打开后，声能会自该阀处随同液流一起被带走。其结果是，分段19端部的电磁阀关闭时(见图7.21(a)和图7.24上的曲线1和2)，与该阀门打开时产生的振幅相比(见图7.23上的曲线1和2)，系统内压力振幅有所增大。电磁阀关闭开始的瞬间高频率(约400Hz)便成为系统内主要的振荡频率(见图7.24)，而在该高频率衰减后，振荡便稳定在一阶谐振频率上。其原因是电磁阀关闭得快。将试验曲线同计算结果(曲线1)作比较可以看出，试验中被激发的高频振荡迅速衰减，



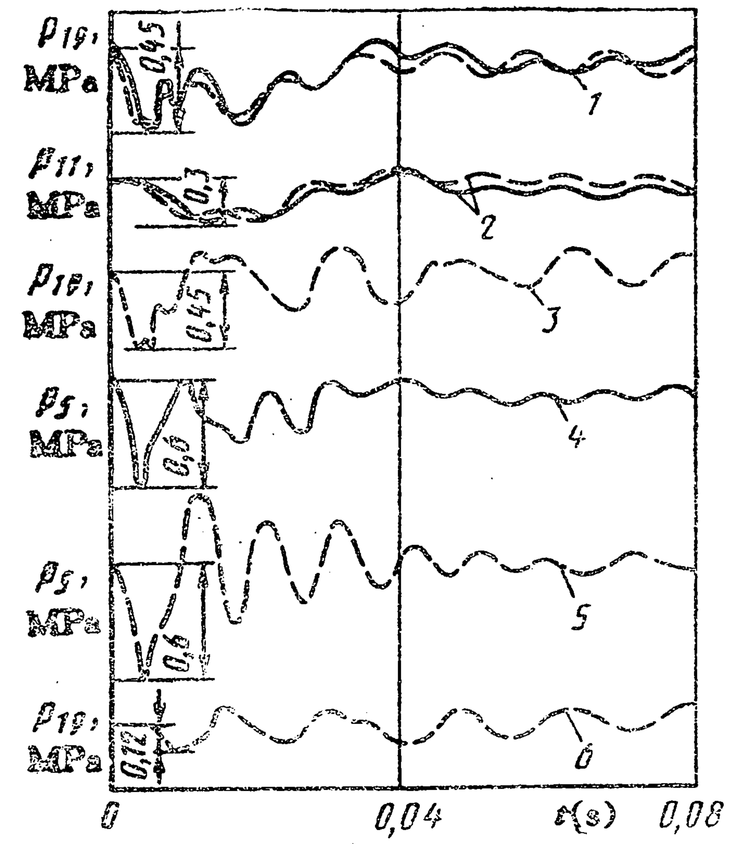



图7.23 系统内过渡过程曲线
——试验曲线 ----计算曲线
1,2,3—分段19末端处(见图7.21(a))电磁阀打开；4,5,6—分段5末端处电磁阀打开。

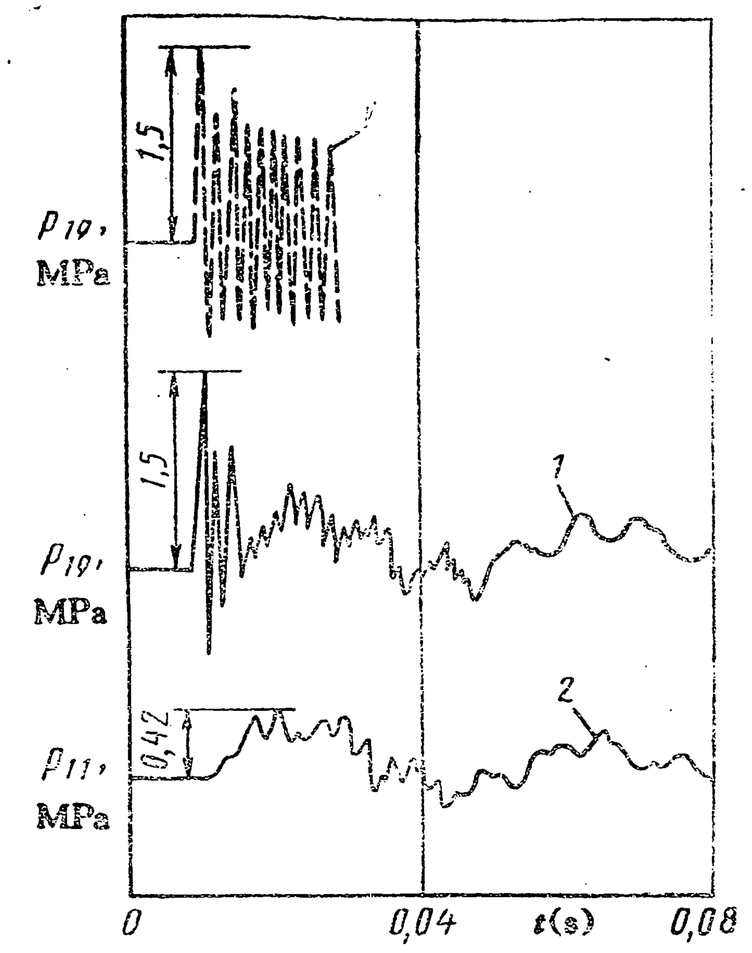



图7.24 分段19末端处(见图7.21(a))电磁阀关闭时系统内过渡过程曲线
——试验曲线；----计算曲线。

而计算时得到的振荡衰减要慢得多。这同系统频率试验的数据(见图7.21和图7.22)是一致的，试验中高频的衰减比计算得出的要快。

计算结果和试验结果表明，利用2.5节所推导的方法可以足够精确地描述反作用控制系统液压供应系统的动态特性。

### 7.8.3 分支管路系统内不等温非稳态气流

在许多情况下，在反作用控制系统中用气体作为工质或作为一种组元。在此情况下各个液体火箭发动机启动和停车过程的特征时间，以及这些发动机的工作循环时间同声扰动沿管路系统传

输的时间通常是可比的。因此在计算流路中非稳态过程时，必须把管路系统当作具有分布参数的系统来研究。为描述圆柱形流路各分段内理想气体一维不等温绝热流可使用连续方程和运动方程(2.2.17)和(2.2.23)、能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(c_v T+u^2/2)]+\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(c_v T+u^2/2+p/\rho)]=0 \tag{7.8.1}$$

和状态方程$p=\rho RT$。

通常用网点法对微分方程组进行数值积分。然而在研究复杂的、分支管路系统内非稳态气流时，使用沿流路长度带定位节点的特征线法则显得更为方便。使用特征线法不会引起与计算稳定性有关的问题，还可使计算机上非稳态气流计算程序的编写得到简化。在本节中沿流路长度带定位节点的特征线法将用于计算分支管路系统中的非稳态不等温气流。

确定特征线方向的方程及非稳态气流在特征线上的关系式有以下形式：

特征线$c_1$(图7.25(a))

$$c_1=(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)_1=u+a \tag{7.8.2}$$

$$\mathrm{d}p+A_1\mathrm{d}u=R_1\mathrm{d}t \tag{7.8.3}$$

特征线$c_2$

$$c_2=(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)_2=u-a \tag{7.8.4}$$

$$\mathrm{d}p+A_2\mathrm{d}u=R_2\mathrm{d}t \tag{7.8.5}$$

特征线$c_3$

$$c_3=(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)_3=u \tag{7.8.6}$$

$$\mathrm{d}p+A_3\mathrm{d}T=R_3\mathrm{d}t \tag{7.8.7}$$

式中

$$a=\sqrt{\kappa RT}\ ;A_1=\kappa p/a;A_2=-\kappa p/a;A_3=-\kappa p/[T(\kappa-1)];$$

$$R_1=B_1\kappa/a+B_2(\kappa-1)\kappa p/a^2;$$



$$R_2=-\kappa B_1/a+B_2(\kappa-1)\kappa p/a^2;$$

$$B_1=-\lambda u|u|\,p/(2D);B_2=-B_1u/p$$

$\kappa$——气体绝热指数；$\lambda$——摩擦阻力系数；$c_1$、$c_2$——声波顺气流和逆气流的传播速度；$c_3$——熵波的传播速度。

与一维非稳态不等温流不同，当扰动以声速(相对于气流)朝气流方向(特征线$c_1$)和逆气流(特征线$c_2$)传播时，在不等温流的情况下，会出现第三个特征线方向(特征线$c_3$)，而熵(温度)扰动便顺该特征方向以气流速度$u$传播。

为解方程(7.8.3)、(7.8.5)和(7.8.7)，在按$x$和$t$选好积分步长($\Delta x$，$\Delta t$)的情况下，可引进矩形网格，将$x$—$t$平面划为带定位节点$i$、$j$的长方形格孔(见图7.25(a))。特征线自上瞬时层$(j+1)$(对于该层气流参数暂时还是未知的)下降到下层$j$(对于该层气体参数是已知的)的长度为$\Delta x$的计算格孔的内点1、2、3上。虽然按时间的积分步长$\Delta t$可能改变，但在保持点1、2和3不超出计算格孔界限这一条件下，这些空间给定点的位置仍保持恒定(积分步长$\Delta x$不随时间改变)。引进预先在空间给定的网格节点可简化方程(7.8.3)、(7.8.5)和(7.8.7)的数值积分，但在计算过程中需要进行内插。

在有限差分中特征线关系式(7.8.3)、(7.8.5)和(7.8.7)有以下形式：

$$\begin{aligned}
p_i^{(j+1)}+A_1u_i^{(j+1)}&=R_1\Delta t+p_1+A_1u_1\\
p_i^{(j+1)}+A_2u_i^{(j+1)}&=R_2\Delta t+p_2+A_2u_2\\
p_i^{(j+1)}+A_3T_i^{(j+1)}&=R_3\Delta t+p_3+A_3T_3
\end{aligned} \tag{7.8.8}$$

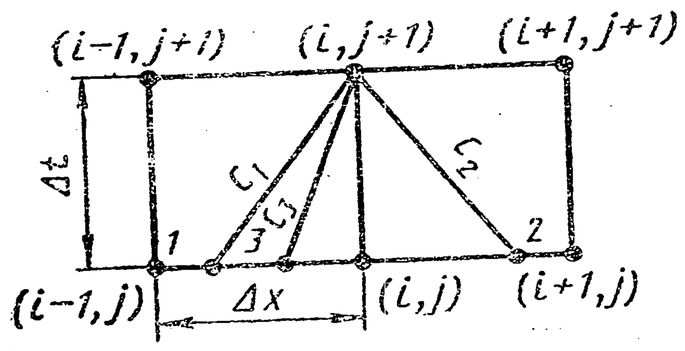
式中 $u_i^{(j+1)}$、$p_i^{(j+1)}$、$T_i^{(j+1)}$—点$(i,\ j+1)$上的速度、压力和温度值。

点1、2和3上的$u_1$、$p_1$、$T_1$、$u_2$、$p_2$、$T_2$、$u_3$、$p_3$、$T_3$等值可用以下线性内插值求出：

$$u_1=u_i^{(j)}+(u_{i-1}^{(j)}-u_i^{(j)})\Delta tc_1/\Delta x$$

$$p_1=p_i^{(j)}+(p_{i-1}^{(j)}-p_i^{(j)})\Delta tc_1/\Delta x$$

$$T_1 = T_i^{(j)} + (T_{i-1}^{(j)} - T_i^{(j)})\Delta t c_1/\Delta x$$
$$u_2 = u_i^{(j)} + (u_i^{(j)} - u_{i+1}^{(j)})\Delta t c_2/\Delta x$$
$$p_2 = p_i^{(j)} + (p_i^{(j)} - p_{i+1}^{(j)})\Delta t c_2/\Delta x$$
$$T_2 = T_i^{(j)} + (T_i^{(j)} - T_{i+1}^{(j)})\Delta t c_2/\Delta x$$
$$u_3 = u_i^{(j)} + (u_{i-1}^{(j)} - u_i^{(j)})\Delta t c_3/\Delta x$$
$$p_3 = p_i^{(j)} + (p_{i-1}^{(j)} - p_i^{(j)})\Delta t c_3/\Delta x$$
$$T_3 \geqslant T_i^{(j)} + (T_{i-1}^{(j)} - T_i^{(j)})\Delta t c_3/\Delta x \qquad (7.8.9)$$




(a)

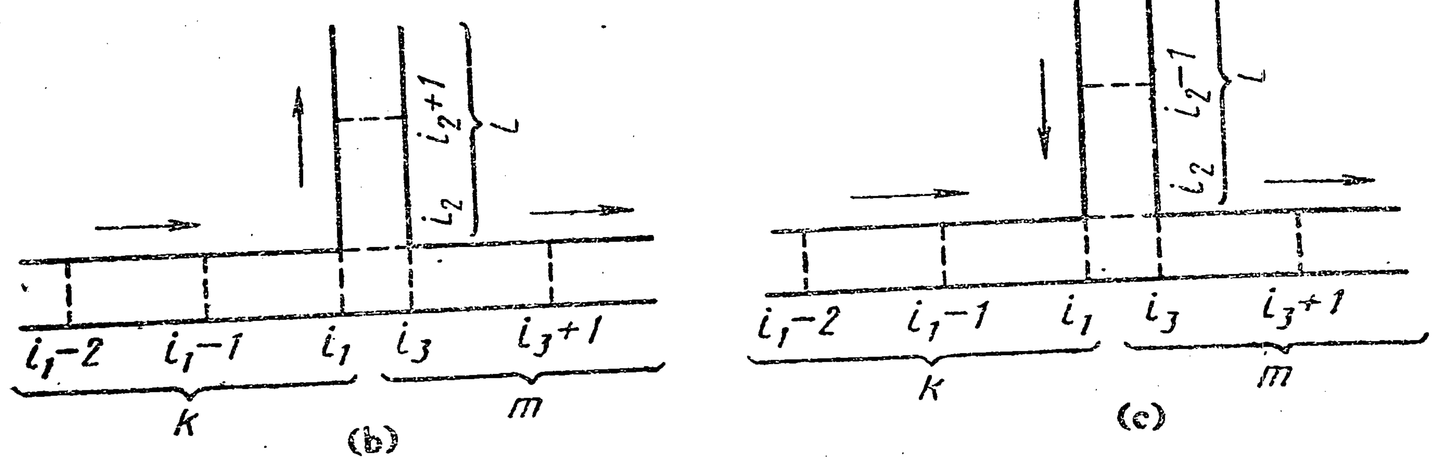



图7.25　流图特征场及一、二类型流路分支简图

(a) 用于计算流路内截面中流动的特征线场；

(b)第一类型流路的分支简图；

(c)第二类型流路的分支简图。

在这些公式中和关系式(7.8.8)中综合参数$A_1$、$R_1$、$c_1$、$A_2$、$R_2$、$c_2$、$A_3$、$R_3$、$c_3$在第一次近似中可由点$(i, j)$上的参数值来确定。在而后的近似中可取这些综合参数等于点$(i, j+1)$和点1、2、3上的参数的算术平均值。在此情况下，在计算过程中点1、2、3的位置可得到确定。

在瞬时层$j$上的气流参数为已知时，借助于公式(7.8.8)和(7.8.9)，可求出瞬时层$(j+1)$上的点$(i, j+1)$上的气体参数：



$$u_i^{(j+1)} = (S_2 - S_1)/(A_2 - A_1)$$
$$p_i^{(j+1)} = (S_1 A_1 - S_2 A_2)/(A_2 - A_1)$$
$$T_i^{(j+1)} = (S_3 - p_i^{(j+1)})/A_3 \qquad (7.8.10)$$

式中

$$S_1 = R_1\Delta t + p_1 + A_1 u_1$$
$$S_2 = R_2\Delta t + p_2 + A_2 T_2$$
$$S_3 = R_3\Delta t + p_3 + A_3 T_3$$

为使计算稳定，必须遵守库兰特(Курант)条件，即$\Delta t \leqslant \Delta x/\max|a+u|$。迭代过程的收敛可按某一参数的收敛来确定，例如按参数$p_i^{(j+1)}$，该参数必须满足条件$|(p_i^{(j+1)})_{n+1} - (p_i^{(j+1)})_n|/(p_i^{(j+1)})_{n+1} < \varepsilon$，此处$\varepsilon$——给定的收敛精度；$(p_i^{(j+1)})_n$、$(p_i^{(j+1)})_{n+1}$——第$n$次和$(n+1)$次近似中参数的值。通常二到三次近似就足够了。

现研究通过分支处的气体流动情况。现将以下两种类型的分支区分开：

第一类型的分支(图7.25(b))—气体沿一个分段$k$进入分支节点，再沿两个分段$m$和$L$流出；

第二类型的分支(图7.25(c))—气体沿两个分段$k$和$L$进入分支节点，而后沿一个分段$m$流出。形式上引入长度为$L = \Delta x$的辅助分段，就可把具有任意数量分段的任一分支看成是上述两类分支的组合。

为确定第一类分支中的气流参数(见图7.25(b))可利用以下诸关系式：

1) 由分段$k$进入分支的(见图7.25(b))特征线$c_1$和$c_2$(见图7.25(a))关系式(上一个计算点为$i_1$)：

$$p_{i_1}^{(j_1+1)} + A_{k1} u_{i_1}^{(j_1+1)} = S_{k1}; p_{i_1}^{(j_1+1)} + A_{k3} T_{i_1}^{(j_1+1)} = S_{k3} \qquad (7.8.11)$$

此处及以后综合参数$A_{k1}$、$S_{k1}$、$A_{k3}$、$S_{k3}$的第一个下标表示分段号，第二个下标表示特征线号。

2）由分段$L$和$m$进入分支节点的特征线$c_2$关系式（上一个计算点为$i_2$和$i_3$）：

$$p_{i_2}^{(j+1)}+A_{l2}=S_{l2};p_{i_3}^{(j+1)}+A_{m2}u_{i_3}^{(j+1)}=S_{m2} \quad (7.8.12)$$

3）根据$Ma^2\ll1$（$Ma$——马赫数）以及分支处无总压损失等这些假设条件得出的关系式：

$$p_{i_1}^{(j+1)}=p_{i_2}^{(j+1)}=p_{i_3}^{(j+1)};T_{i_1}^{(j+1)}=T_{i_2}^{(j+1)}=T_{i_3}^{(j+1)} \quad (7.8.13)$$

4）连续方程

$$u_{i_1}^{(j+1)}F_k=u_{i_2}^{(j+1)}F_l+u_{i_3}^{(j+1)}F_m \quad (7.8.14)$$

式中 $F_k$、$F_l$、$F_m$——各分段的流通截面积。

根据方程(7.8.11)～(7.8.14)可求出第一类型分支处的气流参数关系式

$$p_{i_1}^{(j+1)}=\left(\frac{S_{l2}F_l}{A_{l2}}+\frac{S_{m2}F_m}{A_{m2}}-\frac{S_{k1}F_k}{A_{k1}}\right)\Big/\left(\frac{F_l}{A_{l2}}+\frac{F_m}{F_{m2}}-\frac{F_k}{A_{k1}}\right);$$

$$p_{i_2}^{(j+1)}=p_{i_1}^{(j+1)};p_{i_3}^{(j+1)}=p_{i_1}^{(j+1)};T_{i_1}^{(j+1)}=\frac{S_{k3}-p_{i_1}^{(j+1)}}{A_{k3}};$$

$$T_{i_2}^{(j+1)}=T_{i_1}^{(j+1)};T_{i_3}^{(j+1)}=T_{i_1}^{(j+1)}; \quad (7.8.15)$$

$$u_{i_1}^{j+1}=(S_{k1}-p_{i_1}^{(j+1)})/A_{k1};u_{i_2}^{(j+1)}=(S_{l2}-p_{i_2}^{(j+1)})/A_{l2};$$

$$u_{i_3}^{j+1}=(S_{m2}-p_{i_3}^{(j+1)})/A_{m2}$$

对于第二类型的分支（见图7.25(c)）初始方程有以下形式

$$p_{i_1}^{(j+1)}+A_{k1}u_{i_1}^{(j+1)}=S_{k1};p_{i_1}^{(j+1)}+A_{k3}T_{i_1}^{(j+1)}=S_{k3} \quad (7.8.16)$$

$$p_{i_2}^{(j+1)}+A_{l1}u_{i_2}^{(j+1)}=S_{l1};p_{i_2}^{(j+1)}+A_{l3}T_{i_2}^{(j+1)}=S_{l3} \quad (7.8.17)$$

$$p_{i_3}^{(j+1)}+A_{m2}u_{i_3}^{(j+1)}=S_{m2} \quad (7.8.18)$$

$$p_{i_1}^{(j+1)}=p_{i_2}^{(j+1)}=p_{i_3}^{(j+1)} \quad (7.8.19)$$

$$u_{i_1}^{(j+1)}F_k/T_{i_1}^{(j+1)}+u_{i_2}^{(j+1)}F_l/T_{i_2}^{(j+1)}=u_{i_3}^{(j+1)}F_m/T_{i_3}^{(j+1)} \quad (7.8.20)$$

$$u_{i_1}^{(j+1)}F_k+u_{i_2}^{(j+1)}F_l=u_{i_3}^{(j+1)}F_m \quad (7.8.21)$$

此处方程(7.8.16)和(7.8.17)——由分段$k$和$L$进入分支的特征线$c_1$和$c_3$的关系式；式(7.8.18)——由分段$m$进入分支的特征线$c_2$的关系式。关系式(7.8.20)和(7.8.21)由质量平衡和热平衡方程得出（假设同一成分的气体瞬间混合）。

由方程(7.8.16)～(7.8.21)可得出第二类型分支处的气流参数

$$p_{i_1}^{(j+1)}=\left(\frac{S_{k1}F_k}{A_{k1}}+\frac{S_{l1}F_l}{A_{l1}}-\frac{S_{m2}F_m}{A_{m2}}\right)\Big/\left(\frac{F_k}{A_{k1}}+\frac{F_l}{A_{l1}}-\frac{F_m}{A_{m2}}\right);$$

$$p_{i_2}^{(j+1)}=p_{i_1}^{(j+1)};p_{i_3}^{(j+1)}=p_{i_1}^{(j+1)};u_{i_1}^{(j+1)}=(S_{k1}-p_{i_1}^{(j+1)})/A_{k1};$$

$$u_{i_2}^{(j+1)}=(S_{l1}-p_{i_2}^{(j+1)})/A_{l1};u_{i_3}^{(j+1)}=(S_{m2}-p_{i_3}^{(j+1)})/A_{m2} \quad (7.8.22)$$

$$T_{i_1}^{(j+1)}=(S_{k3}-p_{i_1}^{(j+1)})/A_{k3};T_{i_2}^{(j+1)}=(S_{l3}-p_{i_2}^{(j+1)})/A_{l3}$$

$$T_{i_3}^{(j+1)}=u_{i_3}^{(j+1)}F_m\Big/\left(\frac{u_{i_1}^{(j+1)}F_k}{T_{i_1}^{(j+1)}}+\frac{u_{i_2}^{(j+1)}F_l}{T_{i_2}^{(j+1)}}\right)$$

通常系统内存在着局部阻力（孔板、喷管等等）。现研究气体通过喷管的流动情况。现有一截面积平滑变化的短喷管，位于分段$k$出口处（上一个计算点带有标号$N$），为确定通过该喷管的气流参数，可利用一流量方程[1]

$$G=\mu F_c p_N^{(j)}\sqrt{\frac{2\kappa}{(\kappa-1)RT_N^{(j)}}\left[\left(\frac{p_c}{p_N^{(j)}}\right)^{2/\kappa}-\left(\frac{p_c}{p_N^{(j)}}\right)^{(\kappa+1)/\kappa}\right]} \quad (7.8.23)$$

该方程成立的条件是$p_c/p_N^{(j)}>[2/(\kappa+1)]^{\kappa/(\kappa-1)}$，或

$$G=\mu F_c p_N^{(j)}\sqrt{\frac{\kappa}{RT_N^{(j)}}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{(\kappa+1)/(\kappa-1)}} \quad (7.8.24)$$

其使用条件是$p_c/p_N^{(j)} \leqslant [2/(\kappa+1)]^{\kappa/(\kappa-1)}$，式中$G$——通过喷管的流量；$F_c$——喷管流通截面积；$\mu$——流量系数；$p_c$——喷管后压力。

此外，还应采用到达喷管的特征线$c_1$和$c_2$关系式

$$p_N^{(j+1)} + A_{k1}u_N^{(j+1)} = S_{k1};\ p_N^{(j+1)} + A_{k3}T_N^{(j+1)} = S_{k3} \tag{7.8.25}$$

和连续方程

$$u_N^{(j+1)} = GRT_N^{(j+1)}/(F_k p_N^{(j+1)}) \tag{7.8.26}$$

式中 $F_k$——分段$k$流通截面积。

由关系式(7.8.25)和(7.8.26)可求出通过喷管的气流参数

$$p_N^{(j+1)} = [B + (B^2 - 4Z)^{0.5}]/2;\ u_N^{(j+1)} = (S_{k1} - p_N^{(j+1)})/A_{k1}$$
$$T_N^{(j+1)} = (S_{k3} - p_N^{(j+1)})/A_{k3} \tag{7.8.27}$$

式中 $B = S_{k+1} + Z/S_{k3}$；$Z = A_{k1}GRS_{k3}/(A_{k3}F_k)$。

应指出的是，确定分支处的参数或确定通过喷管的气流参数时，像计算分段内点的气流参数那样(见图7.25(a))，为了计算综合参数$A_{k1}$、$S_{k1}$、$A_{l1}$、$S_{l1}$、$A_{l2}$、$S_{l2}$、$A_{m2}$、$S_{m2}$、$A_{k3}$、$S_{k3}$、$A_{13}$、$S_{13}$必须使用迭代法。

上述方法便于计算反作用控制系统分支气路供应系统中的非稳态过程。

在前述装置上(见图7.21(a))进行了分支管路系统中的非稳态气流的试验。在分段14端部安装了电磁阀，该阀打开或关闭可在系统中引起过渡过程。其他所有分段的端部都被堵住。通过打开的电磁阀的平均流量当压力为1.9MPa时为0.07kg/s。

试验时用来自大容积容器25的空气作为工质。

图7.26示出了电磁阀关闭时得到的系统过渡过程试验曲线。给出了分段11和14端部(见图7.2(a))压力相对于阀关闭前这些点上的压力的偏差$\Delta p_{i1}$和$\Delta p_{i4}$曲线。图7.26上还画出了按上述计算方法得出的曲线。过渡过程起始段，即压力瞬时地增加至最大值那一段，试验结果几乎同计算结果相一致。然后，计算曲线与



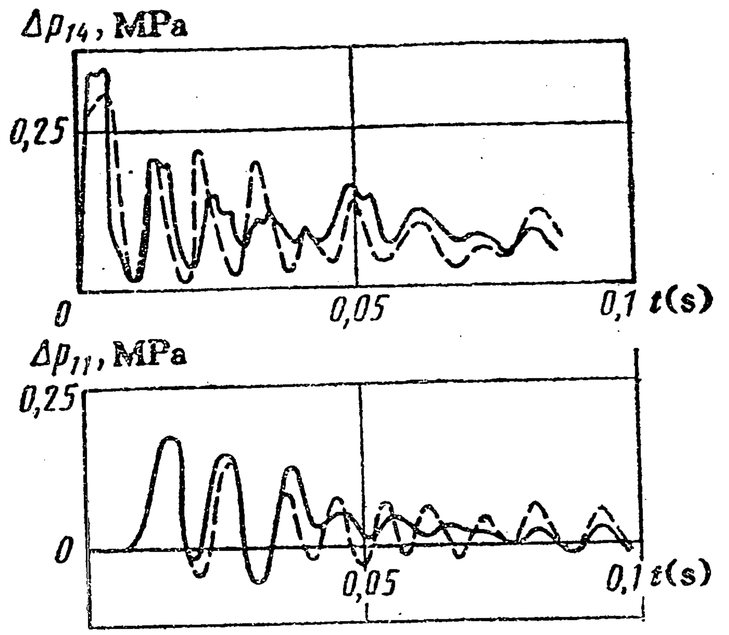



图7.26 分支管路系统过渡过程曲线
——试验曲线；
----计算曲线。

试验曲线出现一些差别，其原因可能是在计算中对由粘性摩擦及转弯和分支处损失造成的能量耗散估计得不够精确。

# 参 考 文 献


1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.:Наука, 1976.888 с.
2. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей.М.:Машиностроение, 1980.533 с.
3. Артамонов К.И.Термогидроакустическая устойчивость. М.:Машиностроение, 1982.322 с.
4. Бердников В.В.Прикладная теория гидравлических цепей.М.:Машиностроение.1977.192 с.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П.Теория систем автоматического регулирования.М.:Наука, 1975.767 с.
6. Гликман Б.Ф.Математические модели пневмогидравлических систем.М.:Наука, 1986.368 с.
7. Гликман Б.Ф.Нестационарные течения в пневмогидравлических цепях.М.:Машиностроение, 1979.256 с.
8. Глушко В.П.Развитие советского ракетно-космического двигателестроения//Изв.АН СССР.Энергетика и транспорт.1974.№ 5.С.3-29.
9. Горелик А.Л., Бутко Г.И., Белоусов Ю.А.Бортовые цифровые вычислительные машины.М.: Машиностроение, 1975.203 с.
10. Nзерман Р.Цифровые системы управления.М.Мир, 1984. 541 с.
11. Кокорин В.В., Рутовский Н.Б., Соловьев Е.В.Комплексная оптимизания двигательных установок систем управления М.:Машиностроение, 1983.184 с.
12. Колесников К.С.Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. М.: Машиностроение, 1971.260 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.Гидродинамика.М.:Наука, 1986.736 с.
14. Лебедсв А.А., Герасюта Н.Ф. Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970.244 с.





15. Лихачев В.Я., Басин А.С., Гликман Б.Ф. Техническая диагностика пневмогидравлических систем ЖРД М.: Машиностроение, 1983.206 с.
16. Лойцянский Л.Г.Механика жидкости и газа.М.:Наука, 1970.904 с.
17 Ломакин А.А.Центробежные и осевые насосы.М.Машиностроение, 1966.364 с.
18. Махин В.А., Миленко Н.П., Пронь Л.В. Теоретические основы экспери-ментальной обработки ЖРД.М. :Машиностроение, 1973.282 с.
19. Михайлов В.В., Базаров В.Г.Дросселируемые жидкостные ракетные двигатели.М.:Машиностроение, 1985.165 с.
20. Натанзон М.С.Неустойчивость горсния.М.:Машиностроение, 1986.248 с.
21. Натанзон М.С.Продольные автоколебания жидкостной ракеты.М.:Машиностроение, 1977.208 с.
22. Неустойчивость горения в ЖРД/Под ред.Д.Т.Харрье, Ф.Г.Рирдона.М.:Мир, 1975.870 с.
23. Овсянников Б.В., Боровский Б.N.Теория и расчет агрегатов питания ЖРД.М.:Машиностроение.1986.376 с.
24. Пилипенко В.В., Задонцев В.А., Патанин М.С. Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем.М.: Машиностроение.1977.352 с.
25. Попов Д.Н.Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем.М.:Машиностроение, 1977.424 с.
26. Понов Д.Н.Нестационарные гидромеханические процессы.М.:Машиностросние, 1982.240 с.
27. Присняков В.Ф.Динамика Жидкостных ракетных двигательных установок.М.:Машиностроение, 1983.248 с.
28. Раушенбах Б.В.Бибрационное горение. М.: Физмагиз, 1961.500 с.
29. Седов Л.И.Методы подобия и размерности в механике. М.:Наука, 1981.447 с.
30. Скучик Е.Основы акустики:Б 2 т.М.:NЛ, 1976.Т.1.519 с.

Т.2.541 с.

31. Теория автоматического управления ракетными двигателями/А.А.Шевяков, В.М.Квлнин, Н.В. Науменкова, В.Г.Дятлов.М.:Машиностроение, 1978.288 с.
32. Федоров С.М., Лигвинов А.П.Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. М.: Энергия, 1965.223 с.
33. Чарный N.А.Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.М.:Недра, 1975, 296 с.
34. Чистяков П.Г.Точность систем автоматического регулирования ЖРД и ТРД.М.:Машиностроение, 1977.160 с.
35. Шерстянников В.А., Калнин В. М. Гидродинамическое моделирование рабочего процесса ЖРД на режимах запуска.М.:Машиностроение, 1981.88 с.
36. Шорин В.П.устранение колебаний в авиационных трубопроводах.М.:Машиностроение, 1980.150 с.
37. Copa R., Samberg J.Jl calcolatore controlla il motore dello Space Shuttle//Quaderni Informatica.1982. vol.9, N 1.PP.16-23.
38. Seitz P.F., Searle R.F.Space Shuttle main engine control system//SAE Transactions.1973.N 73-927.17 p.
39. Shedlow M.W., Myhre D.Design verification testing of Space Shuttle main engine transducers//JSA Transactions.1979.vol.17, N 1.PP.21-27.