

目 录

第一章 流体的基本属性与静力学	(1)
§ 1-1 连续介质模型	(1)
§ 1-2 压强、密度、温度以及气体状态方程	(2)
§ 1-3 流体的粘性	(4)
§ 1-4 流体的压缩性	(5)
§ 1-5 流体的传热性	(6)
§ 1-6 流体的模型化	(7)
§ 1-7 作用在流体微团上的力	(8)
§ 1-8 流体静力学基本公式	(10)
§ 1-9 大气结构和国际标准大气	(11)
练习题	(13)
第二章 一维管流	(14)
§ 2-1 有关流场的一般知识	(14)
§ 2-2 低速一维理想管流的基本方程	(18)
§ 2-3 高速一维管流	(28)
练习题	(38)
第三章 膨胀波与激波	(40)
§ 3-1 超音速气流的小角转折	(40)
§ 3-2 超音速气流的大角向外转折	(43)
§ 3-3 激波	(47)
练习题	(61)
第四章 理想流体的运动学和动力学基础	(62)
§ 4-1 流体微团运动分析及速度位	(62)
§ 4-2 连续方程及流函数	(66)
§ 4-3 旋涡运动	(69)
§ 4-4 欧拉运动方程及其积分	(75)
§ 4-5 定常位流的基本方程	(79)
§ 4-6 达朗培尔疑题和儒柯夫斯基升力定理	(85)
练习题	(89)
第五章 附面层	(91)
§ 5-1 附面层的基本概念	(91)

§ 5-2 不可压流平板附面层	(98)
§ 5-3 曲面附面层的分离现象及压差阻力	(107)
§ 5-4 高速附面层及气动热	(110)
练习题	(117)
第六章 低速机翼空气动力特性	(118)
§ 6-1 机翼的外形及几何参数	(118)
§ 6-2 低速翼型的绕流特性和气动特性	(122)
§ 6-3 翼型的低速薄翼理论简介及翼型参数对气动特性影响	(131)
§ 6-4 绕大展弦比机翼的低速流动	(133)
§ 6-5 后掠机翼与小展弦比机翼的低速气动特性	(137)
§ 6-6 机翼的增升装置	(143)
§ 6-7 空气动力实验与相似准则	(144)
练习题	(146)
第七章 高速机翼的空气动力特性	(148)
§ 7-1 翼型的空气动力特性	(148)
§ 7-2 机翼的高速空气动力特性	(159)
练习题	(171)
第八章 机身及全机的空气动力特性	(172)
§ 8-1 机身的空气动力	(172)
§ 8-2 机翼与机身的相互干扰	(175)
§ 8-3 机翼机身对水平尾翼的干扰	(178)
§ 8-4 跨音速面积律	(180)
§ 8-5 飞机的极曲线	(181)
练习题	(183)
第九章 飞机的飞行性能	(184)
§ 9-1 飞机的基本飞行性能	(184)
§ 9-2 飞机的续航性能	(200)
§ 9-3 飞机的机动飞行性能	(208)
§ 9-4 飞机的起飞和着陆性能	(216)
练习题	(224)
第十章 飞机在定常直线运动时的纵向平衡、稳定性和操纵性	(225)
§ 10-1 引言	(225)
§ 10-2 飞机作纵向定直运动时的纵向力矩平衡和静稳定性	(229)
§ 10-3 飞机作纵向定直运动时的纵向平衡和静操纵性	(236)

§ 10-4 纵向动稳定性概念.....	(239)
练习题	(243)
第十一章 飞机的横侧平衡及其稳定性和操纵性	(245)
§ 11-1 引言.....	(245)
§ 11-2 定常侧滑直线飞行时, 作用在飞机上的侧力和 横侧力矩及横侧静稳定性.....	(245)
§ 11-3 定常侧滑直线飞行时, 飞机的横侧平衡和静操纵.....	(254)
§ 11-4 横侧动稳定性概念.....	(259)
练习题	(263)
附录	(265)
参考文献	(270)

第一章 流体的基本属性与静力学

飞机在空气中运动所引起的作用于飞机上的空气动力取决于空气的物理属性、飞机的几何形状、飞行姿态以及飞机与空气之间的相对速度。因此在讨论空气动力的产生及其变化规律之前，首先来研究空气的基本属性。

气体和液体统称为流体。气体和液体同固体相比较，分子间引力较小，分子运动较强烈，分子没有一定的排列规律，这就决定了气体和液体具有共同的特性：不能保持一定形状，而具有流动性。

从力学性质来看，固体具有抵抗压力、拉力和切力的能力。因而在外力作用下，通常发生较小变形，而且到了一定程度后变形就停止。流体由于不能保持一定形状，所以它不能抵抗切力。当它受到切力作用时，就要发生连续不断变形（即流动）。这就是流体同固体在力学性质上的显著区别。

气体和液体除了具有前述的共同特性外，还有如下的不同特性：③ 气液压缩性。

液体的分子距离跟分子的有效直径差不多是相等的，当对液体加压时，由于分子距离稍有缩小，出现强大的分子斥力来抵抗外压力。这就是说，液体的分子距离很难缩小，可以认为液体具有一定体积，因此通常称液体为不可压缩流体。

一般来说，气体分子间距离很大，例如常温常压下空气的分子距离为 3×10^{-7} 厘米，其分子有效直径的数量级为 10^{-8} 厘米。可见分子距离比分子有效直径大得很多。这样，当分子距离缩小很多时，才会出现分子斥力。因此，通常称气体为可压缩流体。又因为分子距离很大，分子引力很小，而分子热运动起决定性作用，这就决定了气体既没有一定形状也没有一定体积。可压缩流体。

当所研究的问题并没有涉及到压缩性时，所建立的流体力学规律既适用于液体也适用于气体。当计及压缩性时，气体和液体就必须分别处理。气体虽然是可压缩的，但在气流速度 V 远小于音速 a （如速度 V 小于 $0.3a$ ）时，可以忽略气体的压缩性，即把气体看作不可压缩的流体。往往把忽略空气压缩性的空气动力学，通常称为流体力学。

§ 1-1 连续介质模型：

流体和一切物体都是由分子组成的，显然分子之间是有空隙的。从微观的角度来看，流体的物理量在空间是不连续分布的，同时由于分子的随机运动，又导致任一空间点上的流体物理量对于时间的不连续性。可见，流体物理量的分布，从微观的角度来看，在空间和时间上都是不连续的。

但是我们在流体力学中讨论的问题的特征尺寸（如飞机）往往远大于流体的分子距离。在标准状况下，每一立方毫米的空气中 2.7×10^{16} 个分子，一立方毫米的液体中有 3×10^{21} 个分子，可见分子本身和分子距离是极其微小的。另外，流体力学所研究的不是个别分子的微观运动，而是研究由大量分子组成的宏观流体在外力（如重力、压力差）的作用下而引起的机

械运动。宏观流体的物理量(如压力、密度和温度等)都是大量分子的统计平均特性。这样,我们有理由引进流体的连续介质模型:就是将真正的流体看成是由稠密而无间隙的连续介质所组成的,流体的基本单元看成是流体质点。质点体积相对于流动空间和流体中固定尺寸来说,是充分小而可忽略不计;同时它相对于分子和分子间距的尺寸来说,却又是足够大。

流体既被看成是连续介质,则反映宏观流体的各种物理量都是空间和时间的连续函数。因此,在以后讨论中都可以引用连续函数的数学分析工具,来研究流体各种运动状态下的有关物理量之间的数量关系。

当然,流体连续介质模型是一个具有相对意义的概念。根据上述连续介质模型,把介质看成是连绵一片的流体,介质所占据的空间里到处都弥漫着这种介质,而不再有空隙。低速空气动力学、高速空气动力学,甚至高超音速空气动力学都是在连续介质这样一个模型下进行研究的。只有到了外层大气,如在120—150公里的高度上,空气分子平均自由行程(一个分子在与另一个分子发生碰撞前所行经的平均路程)大约与飞机的尺寸处于同一数量级,在200公里的高度上,分子的平均自由行程有好几公里。这时空气再也不能认为是连续介质,解决这样高空飞行的问题,就得用稀薄空气动力学的知识。

§ 1-2 压强、密度、温度以及气体状态方程

表征气体状态有三个基本参数,即压强、密度与温度。

一、压强

在流体中,取一点 P ,过 P 点作一微小面积 ΔS ,如图1-1所示, n 为它的法线。周围其它流体将对 ΔS 作用有力,令这力为 ΔF 。 ΔF 的大小和指向与流体的性质及运动情况有关。不管 ΔF 的方向如何,我们总可以将它分解成二个分力,一个沿 n 方向,称为法向力,以 ΔN 表示之;另一个在过 P 点的 ΔS 的切平面内,称为切向力,以 ΔT 表示之。

我们把单位面积上的法向平均压力,称为 ΔS 上的平均压强,即

$$p_{\text{平均}} = \frac{\Delta N}{\Delta S}$$

平均 → 某点

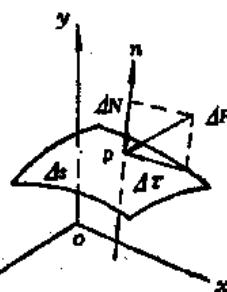


图 1-1

如果 ΔS 取得很小,趋近于零(即缩小到 P 点),我们就得 P 点的压强,即

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S}$$

压强是单位面积上的法向力。压强的国际单位是牛/米²,在工程制中其单位为公斤/米²。压强 p 的大小与 n 的方向无关,随 P 点的位置 (x, y, z) 与时间 (t) 而改变,或者说 p 是这些变量的函数,即

$$p = p(x, y, z, t)$$

这函数的具体形式与流体性质及运动情况有关。上述是从宏观的观点来定义压强的。从微观的观点来看,周围流体之所以对 ΔS 产生压强是由于大量分子碰撞在 ΔS 上,发生动量改变

的结果。

二、密度

在流体中取一点 P ，围绕 P 点在内，取一微小体积 ΔV ，设 ΔV 中流体所具有的质量为 Δm ，把比值 $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ 叫做 ΔV 中的平均密度。当 ΔV 无限缩小，趋近于零，取极限值，我们就得到 P 点的密度，即

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

密度是单位体积中所具有的质量。在国际单位中，质量的单位是千克，故密度的国际单位是千克/米³。在工程单位制中，质量的单位是公斤·秒²/米，故密度的工程单位是公斤·秒²/米⁴。例如，在海平面上温度15℃和一个标准大气压时水的密度为1000千克/米³，而这时空气的密度为1.225千克/米³。在流体中密度 ρ 的大小将随 P 点的位置 (x, y, z) 与时间 (t) 而改变， ρ 是这些变量的函数

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

这函数的具体形式与流体性质及运动情况有关。液体（如水）运动时，它的 ρ 常可视为不变。

三、温度

我们用温度来表示流体的冷热程度。常用的温度表示法有二种：一为摄氏温度 t ，另一为绝对温度 T 。它们之间的关系为

$$T = (273.15 + t)^\circ \text{K}$$

例如摄氏温度为15℃时， $T = 288.15^\circ \text{K}$ 。从微观来看，气体分子作无规则的热运动时，它的移动平均动能越大，则宏观表现为温度愈高。移动的平均动能与绝对温度成正比。

四、气体状态方程

根据大量实验结果可知，气体的压强、密度与温度，三者不是互相独立，而是有一定的关系。可用气体状态方程

$$f(p, \rho, T) = 0$$

来表示。知道了气体的任何两个状态参数，就可由上式求出第三个状态参数。

如果略去气体分子的体积与分子间的作用力，那么状态方程可写成下列形式

$$p = \rho R T \Rightarrow \rho = \frac{p}{R T} \quad (1-1)$$

上式是指单位质量气体的状态方程。式中 R 为气体常数，取决于气体的性质。在国际单位中，空气的气体常数 $R = 287 \text{ 米}^2/\text{秒}^2 \cdot \text{K}$ 。

气体状态变化完全符合式(1-1)的气体，称为完全气体（物理学中称这种气体为理想气体，在流体力学中，理想流体有别的含义）。

实验证明，实际气体很接近完全气体，只有在很高的压强下或者在接近凝点的状态下，实际气体与完全气体才有差距。所以在一般工程问题中，描述气体的状态时，用式(1-1)是足够精确的。

§ 1-3 流体的粘性

粘性是流体的固有属性之一。

现在让我们观察一种现象：设有两块平行平板，其间充满着流体。当下板固定不动，上板以匀速 u_0 平行下板运动（图 1-2）时，两板间的流体便呈现出不同速度的运动状态，即从附着在动板下面的流体层，具有与动板相等速度 u_0 开始，愈往下速度愈小，直到附着在定板上的流体层的速度为零这样的速度分布规律。

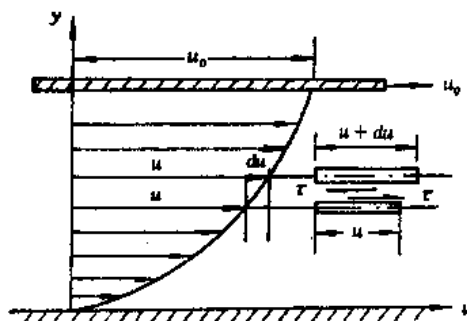


图 1-2

这一事实说明：每一运动较慢的流体层，都是在运动较快的流体层带动下才运动的。同时每一运动较快的流体层（快层），也受到运动较慢的流体层（慢层）的阻碍，

而不能运动得更快。这就表明，相邻流体层发生相对运动或相对滑动时，快层对慢层产生一个拖力，使慢层加速。根据作用与反作用的原理，慢层对快层有一个反向作用力，使快层减速。拖力与反向作用力是大小相等方向相反的一对力，分别作用在两个流体层的接触面上。因为这一对力是在流体的内部产生的，所以把这一对力叫做内摩擦力。

因此，概括地说，当流体层间发生相对运动时，在流体内部两个流体层的接触面上，便产生相互牵制的内摩擦力，流体的这种性质称为粘性。

内摩擦力又称为粘性力，实质上是流体分子作用的宏观表现。粘性力产生的物理原因，就是分子不规则运动的动量交换和分子间吸引力两方面所致。

分子不规则运动的动量交换形成的力：由于分子不规则运动，各流体层之间互有分子迁移掺混；当流体层之间存在相对运动时，可以说快层中所有分子以宏观速度 du 对慢层做相对运动，同时也可以说慢层中所有分子以宏观速度 $-du$ 对快层作相对运动。这样，当快层分子迁移到慢层时，分子就带有动量 mdu （分子质量为 m ）交换给慢层，这种动量交换给慢层以向前的碰撞，形成拖力而使慢层加速运动；当慢层分子迁移到快层时，分子就带有 $(-mdu)$ 交换给快层，这种动量交换给快层以向后的碰撞，形成阻滞力而使快层运动减速。这就是分子不规则运动的动量交换形成的粘性力。

分子间吸引形成的力：当流体层之间没有相对运动时，相邻层中分子各方向的吸引力处于平衡状态。当相邻层有相对运动时，便破坏了原来的平衡状态。相邻层中分子距离的变化，就使两层分子间引力表现出来了。这时快层的分子引力表现为拖动慢层，而慢层的分子引力表现为阻滞快层，这就是在有相对运动时两层分子间吸引所形成的力。

上述两方面形成的力就叫做粘性力。对于气体来说，由于分子距离很大，分子引力很小，而分子不规则运动极为强烈，所以气体的粘性力，主要决定于分子不规则运动的动量交换所形成的力。对于液体来说，由于它的分子不规则运动较微弱，所以液体的粘性力主要决定于分子间吸引所形成的力。

牛顿于1678年经实验结果指出，流体运动所产生的摩擦阻力与接触面积成比例，与沿接

触面积的法线方向速度梯度成比例，与流体的物理性质有关而与接触面上的压强基本无关。牛顿提出的摩阻应力公式为

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-2)$$

式中 $\frac{du}{dy}$ 是速度沿法线方向的变化率或称速度梯度； μ 是流体的粘性系数，单位是牛·秒/米² 或千克/米·秒； τ 为单位面积上的摩擦力或切应力，单位是牛/米²。式(1-2)适用于流体作层状运动。粘性系数 μ 是流体粘性大小的一种度量，不同流体 μ 值各不相同，同一流体 μ 值与温度有关，气体的 μ 随温度升高而增大，而液体的 μ 值随温度升高而减少。空气的 μ 值随温度变化的关系是

$$\mu = 1.7118 \times 10^{-5} + 4.934 \times 10^{-8} t^{\circ} \quad \frac{\text{千克}}{\text{秒} \cdot \text{米}} \quad (1-3)$$

因 μ 的单位为牛·秒/米² 具有动力学量纲，故又称为动力粘性系数。在流体力学中常出现动力粘性系数 μ 与流体密度 ρ 的比值，为简便起见，以 ν 表示之，即

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1-4)$$

ν 的单位为米²/秒。因 ν 具有运动学的量纲，故称为运动粘性系数。

在海平面上，温度为15℃且气压为一个标准大气压时，空气的粘性系数的数值为

$$\begin{aligned} \mu &= 1.7894 \times 10^{-5} \quad \frac{\text{千克}}{\text{米} \cdot \text{秒}} \\ \nu &= 1.46707 \times 10^{-5} \quad \frac{\text{米}^2}{\text{秒}} \end{aligned}$$

§ 1-4 流体的压缩性

流体的压缩性指的是流体的体积在外力作用下可以改变的特性。

流体的压缩性通常以压缩性系数 β 来表示，它表示在一定温度下升高一个单位压强时，所发生的体积相对变化量，即

$$\beta = - \frac{dV/V}{dp} \quad (1-5)$$

式中 V 为原有的体积； dV 为体积的改变量； dp 为压强的改变量。因 dp 与 dV 的变化方向相反，即压强增加时体积减小。故上式中有一负号。

对于单位质量的流体式(1-5)可表示为

$$\beta = - \frac{dv/v}{dp} \quad (1-6)$$

式中 v 表示单位质量流体的体积，即比容。由于 $\rho v = 1$ ，因此

$$\rho dv + v d\rho = 0$$

所以

$$\frac{dv}{v} = - \frac{d\rho}{\rho} \quad (1-7)$$

将式(1-7)代入式(1-6), 可得

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (1-8)$$

压缩性系数的倒数就是流体的体积弹性模数 E , 它是单位体积的相对变化所需要的压强增量, 即

$$E = \frac{1}{\beta} = \frac{-dp}{dv/v} = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (1-9)$$

对于不同流体, E 具有不同的数值。弹性模数越大, 流体就越不易被压缩。在常温下水的弹性模数约为

$$E_{\text{水}} = 2.1 \times 10^9 \frac{\text{牛}}{\text{米}^2}$$

这就是说, 当水压增加一个大气压时, 即

$$\Delta p = 1.013 \times 10^5 \frac{\text{牛}}{\text{米}^2}$$

时, 式(1-9)可写成

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E} \approx 0.5 \times 10^{-4}$$

即密度的变化很小, 亦即体积只缩小万分之零点五。其它液体的弹性模数也都很大。因此在研究液体运动时, 若在整个流场中压强差别不是非常大, 可以认为液体的密度在整个流场中为常数。密度为常数的流体称为不可压缩流体。

上述流体的压缩性系数和弹性模数的定义, 同样适用于气体, 但是值得注意的是, 气体的密度随压强变化并和热力过程有关, 而且气体的可压缩性比液体大得多。如在标准大气压的条件下, 空气的弹性模数 $E_{\text{空气}} = 1.01 \times 10^6 \text{ 牛/米}^2$, 可见在标准情况下空气的压缩性大约是水的 20 000 倍左右。

后面我们将会证明, $dp/d\rho$ 等于音速平方, 所以气体的弹性决定于它的音速和密度。在气流速度远小于音速 a (如速度 $V \leq 0.3a$) 时, 即低速运动时, 由流速变化而引起的压强变化还不足以使空气密度有显著变化, 这时可以把气流看作是**不可压缩的。当气流速度较高时, 流场中速度变化会很大, 同理压强、密度变化也会很大, 这时就要考虑气体压缩性。在以后章节中将从定量上加以说明。

§ 1-5 流体的传热性

流体和固体一样也具有传热性。设在静止的流体中, 放一温度较高的物体 (这物体表面称为热壁), 则靠近热壁的流体温度较高, 热量将从温度较高的流体层向温度较低的流体层传去。自热壁上某点 O , 作热壁面的法线 On , On 线上流体层的温度 T 将随距离 n 的大小而变, 即

$$T = T(n)$$

如图 1-3 所示。设 dq 为从高温层到低温层每单位时间内, 通过面积 dF 所传导之热量, 人

们根据许多实验结果，得出热传导定律，它的数学表达形式是

$$dq = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) dF \quad (1-10)$$

式中 λ 为热传导系数，其单位为千焦耳/米·秒·度， $\frac{\partial T}{\partial n}$ 为温度沿 dF 法线方向的变化率或称温度梯度。

因为热流量是沿 n 方向为正，故 dq 的符号与 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 相反，所以式(1-10)右边有负号。热传导系数 λ 与流体的性质和温度有关。在常温时，空气的 $\lambda = 2.47 \times 10^{-5}$ 千焦耳/米·秒·度，是一个很小的数值，由式(1-10)可以看出，当温度梯度不是很大时， q 可以略去不计。也就是说气流可以看成是绝热的。

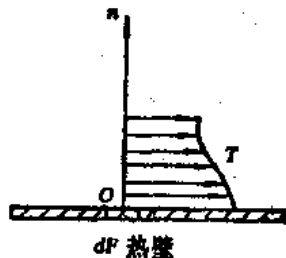


图 1-3

从分子运动论的观点来看，热传导过程是较热(温度较高、分子平均动能较大)的流体层内的分子，由于分子不规则运动进入较冷的流体层时，将自己的一部份动能传给这一层分子。相反地，较冷流体层内的分子进入较热流体层时，从较热层内的分子那里得到一部分动能。结果较热层变冷，较冷层变热。所以，从分子运动论的观点来讲， q 表示从高温到低温层分子的平均动能的迁移。

气体的热传导与内摩擦，从微观来看都是来源于分子的热运动。由于热运动，两气体层间有动量交换产生内摩擦力；两气体层间有动能传递，产生热传导。所以气体的热传导系数 λ 和粘性系数 μ ，具有内在的联系。

§ 1-6 流体的模型化

真实流体是具备了前面所说的各种属性，严格地说，这些属性对于流动都会有或多或少的影 响。在我们研究问题时，如果将流体的上述属性全部考虑进去，问题就显得非常复杂，甚至使数学分析不可能进行。事实上事物的联系虽然是多方面的，但对某一具体问题来说，有些因素起主要作用，而另一些因素则起次要作用。在分析问题 时，先忽略次要因素，而只考虑主要因素；次要因素可以作为修正因素另作考虑。这是一般的研究方法，空气动力学也是如此。忽略流体的某些次要属性，保留其主要属性称为流体的模型化。用这种方法得到问题结论，必须用实验来检验。

根据我们对实际流体物理属性在不同情况下的简化，就得到各种流体的模型。

一、理想流体

这是一种不考虑流体粘性的模型，即粘性系数 μ 等于零的流体。以后我们将会知道，在飞机与空气相对运动时，除开紧贴飞机表面很薄的一层外，可以认为是无粘流动。在确定飞机表面的压强分布及升力问题时，这种模型与实验符合得很好。在确定飞机的阻力问题时，则必须考虑流体的粘性。

二、不可压缩流体

这是一种不考虑气体压缩性的模型,即密度当作常数的气体。这种气体与液体的流动规律是相同的。在后面第二章中,我们将看到,飞机以低速($V \leq 0.3a$)飞行时,引起周围空气密度变化不大,而视为常数。在上述速度范围内,用这种模型所得到的结果与实际情况相差不大。如果超过上述速度范围,密度视为常数的假设带来误差太大,因此,我们必须把空气当作可压缩流体来处理。

三、绝热流体

这种流体模型是不考虑气体的热传导属性。在低速流里,除了专门研究传热问题(如发动机散热器问题)之外,一般是不考虑气体的热传导属性的。高速流里,在温度梯度不太大的地方,气体间的传热量是很微小的,也可以不必考虑。

除上述几种模型外,还有前面已提到的连续介质模型、完全气体模型,均是对实际流体在一定条件下的近似描述。模型化的流体是否对所研究问题合适,须用客观实践来检验,与实验结果比较,误差太大的模型,必须加以修改,甚至抛弃。

§ 1-7 作用在流体微团上的力

在流体中取一流体微团,作用在该微团上的力可分为表面力和质量力。

表面力是作用在流体表面上的力,根据连续介质的模型,表面力连续地分布在流体表面上。作用在某一微小表面积上的表面力,可以沿此微小面积的法线方向和切线方向分解(图 1-4),沿法向的表面力 ΔN 称为法向力,沿切向的表面力 $\Delta \tau$ 称为切向力。为了确定作用在表面某点 A 的法向应力和切向应力,可以围绕该点取微小面积 ΔS ,作用在该面积上的法向力为 ΔN ,切向力为 $\Delta \tau$ 。则 A 点上法向应力为

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S}$$

这就是前面定义的作用在流体 A 点上的压强,其正指向和法向应力相反,法向应力以张力为正,而压强以压力为正。 A 点上的切向应力为

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta S}$$

它们的单位均为牛/米²。

质量力是与所取流体的质量成正比的力。重力、惯性力和电磁力均属于质量力。此力分布在所取流体全部体积内,所以又称为体积力。

我们用下列符号来表示质量力。单位质量的质量力用 X 、 Y 、 Z 表示其在坐标轴上的投

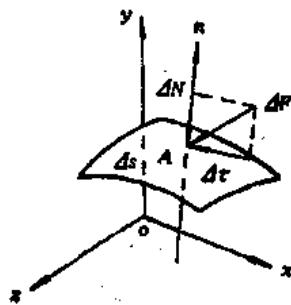


图 1-4

影。在重力场中，某流体微团上作用的质量力，用上述符号表示，应该等于：

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = -\frac{mg}{m} = -g \\ Z = 0 \end{cases}$$

对于理想流体来说，即粘性系数 μ 等于零的流体，表面力只有法向力，切向力为零。我们在运动的理想流体中，取一边长为 dx 、 dy 、 dz 微元四面体。在四面体的每一边界面上，各作用有表面法向应力（即流体动力压强） p_x 、 p_y 、 p_z 、 p_n 。见图1-5所示。这些应力是周围流体作用在该微元体上的结果。作用在四面体上的质量力，因为与所取的微元体积成比例，所以与二次小量的表面力不同，而是三次小量。应用达朗贝尔原理到此微体上，即将作用在微体上惯性力、表面力和重力结合起来，建立这些力的平衡条件。因此，沿坐标轴的平衡方程可写成下式

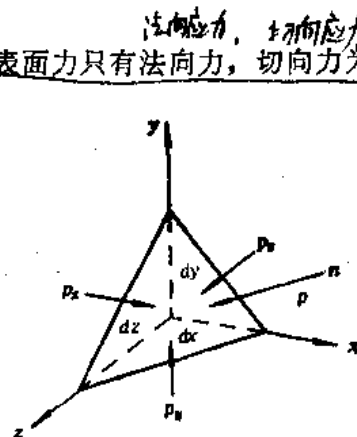


图 1-5

$$\left. \begin{aligned} p_x \Delta S_x - p_n \Delta S \cos(n, x) + \text{三次无穷小量} &= 0 \\ p_y \Delta S_y - p_n \Delta S \cos(n, y) + \text{三次无穷小量} &= 0 \\ p_z \Delta S_z - p_n \Delta S \cos(n, z) + \text{三次无穷小量} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

其中 ΔS_x 、 ΔS_y 、 ΔS_z 、 ΔS 为垂直于坐标轴 X 、 Y 、 Z 及法线 n 的小面积。因为

$$\left. \begin{aligned} \Delta S \cos(n, x) &= \Delta S_x \\ \Delta S \cos(n, y) &= \Delta S_y \\ \Delta S \cos(n, z) &= \Delta S_z \end{aligned} \right\}$$

所以把微元四面体集中到一点而求极限时，可得

$$\left. \begin{aligned} p_x - p_n &= 0 \\ p_y - p_n &= 0 \\ p_z - p_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

由此可得

$$p_x = p_y = p_z = p_n \quad (1-11)$$

由于 p_n 的方向是任意选取的，从式(1-11)可得出结论：作用在一点的流体压强的大小与作用面在空间的方位无关。

虽然同一点的各方向压强相等，但不同点的压强是不一样的。因流体是连续介质，所以压强应是空间位置坐标和时间的连续标量函数：

$$p = p(x, y, z, t)$$

可见理想流体的压强具有两个重要特性：

(1) 流体的压强方向必然是沿着作用面的内法线方向。这是由于理想流体不能抵抗拉伸，且又无切向应力。

(2) 流体中某点周围各方向上的流体压强均相等。

§ 1-8 流体静力学基本公式

设在静止的容器中盛有静止的流体，它的密度为 ρ 。重力加速度为 g 。由于流体是静止的，各点的速度等于零，速度梯度 $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 也必等于零，

按照粘性定律式 (1-2) 可知，内摩擦应力 τ 也等于零。因此在静止流体中，流体微团表面上所受的力为法向压力。由于重力作用（上层流体的重量压在下层上），流体中的压强 p 将随高度位置而改变。静力学主要研究流体处于静止状态时各种物理量的分布规律，特别是求压强 p 与高度的关系。下面导出此关系式。

取直角坐标系如图 1-6，在流体中取一微小柱体，柱体所在位置距水平轴的高度为 y ，设柱体本身的高度为 dy ，底面积为 dS ，这微小柱体处于平衡状态，因而有

$$-\rho g dy dS = dp dS$$

或

$$dp = -\rho g dy \quad (1-12)$$

式 (1-12) 是重力场中流体静力学的基本公式，它给出了流体压强 p 与高度 y 的关系的微分形式。对于具体问题，将它积分出来即可。上式中密度可以是常量（如液体），也可以是变量（如气体）。

图 1-6 所示为一开口容器，内盛有静止液体，密度为 ρ 。液体的自由表面（即 $y = H$ 处）以上有大气，设自由表面上的大气压为 p_0 。那么在自由表面以下 h 处液体的压强 p 可按法计算，积分式 (1-12) 得

$$p = -\rho g y + c$$

式中 c 为积分常数，可以用边界条件来定，例如可用自由表面处的压强等于大气压强 p_0 来决定

$$y = H \text{ 时} \quad p = p_0$$

所以

$$p_0 = -\rho g H + c$$

$$c = p_0 + \rho g H$$

(1-13)

$$p = p_0 + \rho g (H - y) \quad (1-14)$$

这就是静止液体内的压强分布规律。给一定的 y 就可以由上式求出该处的 p 。上式还可以改写一下，设 $(H - y) = h$ ，即为距自由表面的深度 h ，故

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \gamma h \quad (1-15)$$

式中 γ 为液体的重度。

例 图 1-7 所示是一 U 形管测压计，它一端与大气相通，另一端连接到所要测量压强的 A 点，而后根据 U 形管中液柱的高度差来计算出 A 的压强。U 形管中所装的工作液根据被测量流体的情况，可以运用不同重度 γ

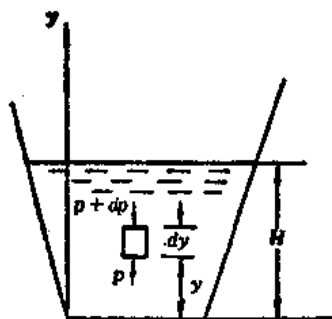


图 1-6

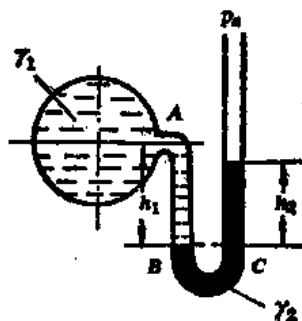


图 1-7

的液体,如水、酒精、水银等。

其工作原理为:通过两种液体交界面上的点 B 作一水平面,它与右支管相交于 C 点。由于这个水平面是等压面,所以点 B 和点 C 的静压相等,即 $p_B = p_C$,所以有

$$\boxed{p_A + \gamma_1 h_1 = p_a + \gamma_2 h_2}$$
$$p_A = p_a + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 \quad (1-16)$$

当测量气体的压强时,因气体的重度 γ_1 比液体 γ_2 要小得多,可略去最后一项故

$$p_A = p_a + \gamma_2 h_2 \quad (1-17)$$

由式(1-17)可见工作液 γ_2 越大,则在 h_2 相同的情况下能测量的压强越大。

§ 1-9 大气结构和国际标准大气

一、大气的结构

围绕整个地球的空气总称为大气。由于重力场的作用,空气在大气层中分布是不均匀的,距地面越近,密度越大;大气层内部情况,随高度变化而异,通常把它分成几层来研究。从海平面起,最低一层称对流层,上面是平流层,再上去是中间大气层、高温层和外层大气。

1. 对流层

这是最靠近地面的一层。在赤道上,其高度在16—18公里之间,在高纬度和中纬度上约8—12公里。这一层由于处在大气的最下层,密度最大,所包含的空气质量几乎占整个大气质量的3/4。在对流层里空气可以有上下方向的流动,雷雨等现象都发生在这一层,温度随高度而下降。

2. 平流层

对流层以上到32公里左右为止是平流层。平流层中的空气约占整个大气质量的1/4。在平流层中,空气只有水平方向的流动,没有雷雨等现象,故得名为平流层。这一层中温度随高度而变化很小,在同一纬度处可以近似看作常数,常年平均值为 -56.5°C (216.65°K)故曾把这一层命名为同温层。

3. 中间大气层

高度从32公里到80公里称为中间大气层。在这层中温度先随高度上升而上升,后来又下降。空气质量仅占整个大气质量的1/3000。

4. 高温层

此层由80公里到400公里,温度随高度上升而迅速上升,到400公里处,达 $1500-1600^\circ\text{K}$ 。这是由于直接受到太阳的短波辐射的缘故。高度在150公里以上,由于空气过于稀薄,已听不到声音。

5. 外层大气

400公里以上直到1500—1600公里,这里的空气质量只占全部大气质量的 10^{-11} ,是大气的最外一层。

二、国际标准大气

飞机主要在对流层和平流层中飞行。某一高度上的大气温度、压强、密度等参数会随所

在地点的经纬度不同有所不同，即使在同一纬度，也会因季节和日夜而有所不同。大气参数的变化是要影响飞机的性能的。为了便于作性能计算，便于整理飞行试验数据，便于同一类飞机进行性能比较，国际航空界就活动的各大气层，取中纬度地点的平均值作为标准。国际标准大气具有以下规定：

(1) 空气被视为完全气体，即服从状态方程 $p = \rho RT$ ，气体常数 $R = 287 \text{ 米}^2/\text{秒}^2 \cdot \text{K}$ 。

(2) 大气的相对湿度为零。

(3) 海平面作为高度计算的起点，即 $H = 0$ ，

在该处大气温度 $T_{H=0} = 288.15\text{K}$ 或 $t = 15^\circ\text{C}$ ，

大气压强 $p_{H=0} = 1.0133 \times 10^5 \text{ 牛/米}^2$ ，

大气密度 $\rho_{H=0} = 1.22505 \text{ 千克/米}^3$ 。

(4) 对流层，由 $H = 0$ 到 11 公里。温度 T 随高度 H 的上升而直线下降，每升高一米，气温下降 0.0065K ，即

$$T_H = T_{H=0} - 0.0065H \quad (1-18)$$

式中 H 以米计。

(5) 平流层，由 $H = 11$ 公里到 $H = 20$ 公里，气温保持不变，此时

$$T = 216.65 \text{ K}$$

或 $t = -56.5^\circ\text{C}$

由 20 公里到 32 公里，每上升 1 千米，温度上升 1°C ，即

$$T = 216.65 + 0.001(H - 20000) \quad (1-19)$$

规定了大气温度随高度的变化规律，我们可以根据流体静力学的基本公式，求出空气的密度与压强等参数随高度的变化规律如下。

由式(1-12)，对于静止的空气，我们有

$$dp = -\rho g dy \quad (1-20)$$

式中 y 表示高度， $y = 0$ 为海平面。 ρ 为高度 y 处的空气密度， g 为重力加速度， p 为该处的压强，见图 1-8。式(1-20)未知数三个，即 p 、 ρ 与 T (y 为自变量)，利用状态方程(1-1)与高度关系，即式(1-18)，上述未知数均可确定。

先计算对流层，由式(1-20)、式(1-18)、式(1-1)得

$$dp = -\frac{\rho g}{RT} dy = -\frac{\rho g dy}{R(T_{H=0} - 0.0065y)}$$

分离变量，得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \frac{dy}{T_{H=0} - 0.0065y}$$

将上式从 $y = 0$ 积分到某一高度 H

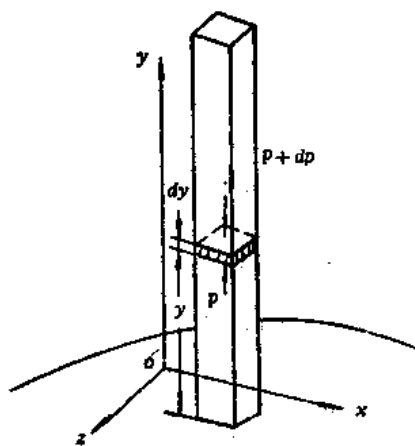


图 1-8

$$\int_{p_{H=0}}^{p_H} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^H \frac{dy}{T_{H=0} - 0.0065y}$$

进行积分, 并注意到 $R = 287 \frac{\text{米}^2}{\text{秒}^2 \cdot \text{K}}$, $\frac{g}{0.0065 \text{K}} = 5.256$, 得

$$\frac{p_H}{p_{H=0}} = \left(\frac{T_{H=0} - 0.0065H}{T_{H=0}} \right)^{5.256} = \left(\frac{T_H}{T_{H=0}} \right)^{5.256} \quad (1-21)$$

由式(1-1)可得

$$\frac{p_H}{p_{H=0}} = \frac{\rho_H}{\rho_{H=0}} \frac{T_H}{T_{H=0}}$$

从以上二式可得

$$\frac{\rho_H}{\rho_{H=0}} = \left(\frac{T_H}{T_{H=0}} \right)^{4.256} \quad (1-22)$$

在对流层中的 T 、 p 、 ρ 各参数可由式(1-18)、式(1-21)、式(1-22)计算确定, 列成表格, 称为标准大气表, 本书末附有标准大气表, 详见附录四。

在平流层内, 到 20 公里为止, $T = 216.65^\circ \text{K}$, 是一个常数, 所以

$$dp = -\frac{pg}{RT} dy$$

自高度 $H = 11$ 公里积分到某一高度

$$\int_{p_{H=11}}^{p_H} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{216.65R} \int_{11}^H dy$$

$$\frac{p}{p_{H=11}} = \frac{\rho}{\rho_{H=11}} = e^{-\frac{H-11000}{6841}} \quad (1-23)$$

下标 $H=11$ 代表 $H=11000$ 米处的参数。 $p_{H=11} = 2.263 \times 10^4$ 牛/米²; $\rho_{H=11} = 0.3639$ 千克/米³。式(1-23)中 H 以米计。

练 习 题

- 1.1 引进流体的连续介质模型的目的是什么? 该模型的使用条件是什么?
- 1.2 什么是理想流体? 使用理想流体模型的条件是什么?
- 1.3 什么是流体的粘性? 粘性的物理本质是什么? 什么是牛顿内摩擦定律? 粘性系数 μ 与什么因素有关?
- 1.4 已知 $h_1 = 0.2$ 米, $h_2 = 0.1$ 米, U形管工作介质为水银 ($\gamma_2 = 134000$ 牛/米³), 被测流体为水 ($\gamma_1 = 98060$ 牛/米³), 试求 A 点的表压 (即绝对压强与大气压强之差), 如图 1-9 所示。
- 1.5 三 U 形管串联, 如图 1-10 所示, 用文字形式写出 A 点的表压 (略去 $\gamma_{\text{气}}$ 引起的压强)。

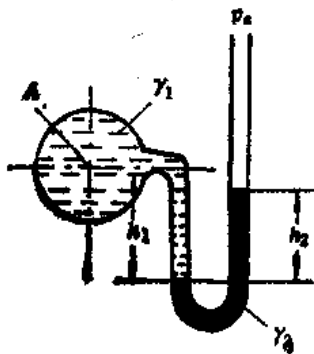


图 1-9

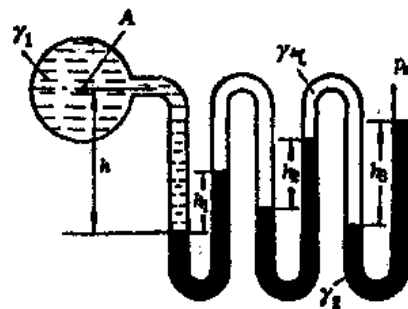


图 1-10

第二章 一 维 管 流

流体运动与刚体运动相比要复杂得多,然而不管流体运动如何复杂,它仍然遵循着一定的运动定律,如质量守恒定律,能量守恒定律以及牛顿第二定律等一些基本定律。在这一章中,我们将讨论一维理想管流的一些基本方程和基本知识。在这一章中,我们认为流体是理想流体,即忽略了粘性的影响。

§ 2-1 有关流场的一般知识

为了研究流体的运动规律,我们首先介绍一些基本概念。

一、流场及其描述法

充满着运动流体的空间称为“流场”,用以表示流体运动特征的物理量称“运动参数”,如速度、密度、压强等。所以流场又是分布上述物理量的场。

在研究流体运动时,用什么方法来描述流体的运动?目前在流体力学中通常采用二种方法,即拉格朗日法及欧拉法。

拉格朗日法,着眼点是流体的质点,即研究流体各个质点的运动参数随时间的变化规律。综合所有流体质点运动参数的变化,便得到整个流场的运动规律。

欧拉法的着眼点是流场中的空间点。即研究流体质点通过空间固定点时的运动参数随时间的变化规律。综合流场中所有空间点的运动参数变化情况,就得到整个流场的运动规律。需要指出的是,不要把空间点与流体质点相混淆。流体运动时,同一个空间点在不同的时刻由不同的流体质点所占据。所谓空间各点上的运动参数乃是指在不同时刻占据这些位置的各个流体质点的运动参数。但拉格朗日法和欧拉法只不过是描述运动的两种不同的方法,对于同一个流动,既可用拉格朗日法也可用欧拉法。在空气运动力学中,广泛采用欧拉法。

以速度表示的方法为例。同一时刻流场内各空间点的流体质点速度一般是不同的,即速度是空间位置坐标 (x, y, z) 的函数;另一方面,在同一空间点不同时刻,流体通过该点的速度也可以是不相同的,即速度也是时间 t 的函数,由于流体是连续介质,所以某点的速度应是 x, y, z 及 t 的连续函数。即

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}(x, y, z, t) \\ \text{即} \quad \left. \begin{aligned} V_x &= V_x(x, y, z, t) \\ V_y &= V_y(x, y, z, t) \\ V_z &= V_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (2-1) \end{aligned}$$

通过流场中某点流体质点的分加速度可表示为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

由于 $\frac{dx}{dt} = V_x$, $\frac{dy}{dt} = V_y$, $\frac{dz}{dt} = V_z$ 所以式 (2-2) 可以写成

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式 (2-3) 中等式右边第一项表示空间固定点处的流体质点速度随时间的变化率, 称为当地加速度; 等式右边后三项反映了在同一瞬时从一个空间点转移到另一空间点的速度变化率, 称为迁移加速度。当地加速度, 它是由流场的不定常性引起的, 迁移加速度, 它是由流场的不均匀性引起的。对于流场中的其它物理量也可用类似的方法求得它们的质点导数。

如果流场中物理量随时间而变化, 则称为非定常流动; 反之, 如果流场中的物理量不随时间而变化, 则称为定常流动。

二、运动的转换原理

在空气动力学中, 为了简化理论和实验的研究, 广泛采用运动的转换原理。

运动的转换原理是根据伽利略在 1632 年所确定的运动的相对原理而建立的。相对原理, 即: 如果在一个运动物体上附加上一个任意的等速直线运动, 则此附加的等速直线运动并不破坏原来运动的物体中各物体之间的相对运动, 也不改变各物体所受的力。

设物体以速度 V 在静止空气中运动 (图 2-1), 根据相对原理, 可以给物体系 (物体与周围空气) 一个与速度 V 大小相等而方向相反的速度, 这样得到的是物体静止不动, 无穷远处气流以速度 V 流向物体。在图 2-1 所表示的两种情况下, 空气作用在物体上的力是完全一样的, 这就是运动的转换原理。这就是说, 空气作用在物体上的力, 并不决定于空气或物体的绝对速度, 而决定于二者之间的相对运动。

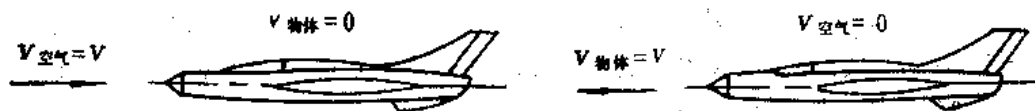


图 2-1

利用运动的转换原理, 使问题的研究大为简化。例如, 当飞机在天空中等速飞行时, 如果将坐标系取在地面, 则围绕飞机的气体运动是非定常的。但是应用运动的转换原理, 将坐标系固定在飞机上, 此时飞机是静止的, 周围的气体运动是定常的。再例如在风洞实验时,

为了模拟飞行器在天空中的飞行情况，可以将模型固定不动，让气流吹过，这就简化了实验技术。

三、轨线、流线、流管及流束

1. 轨线

流场中流体质点在一段时间内运动的轨迹线。

2. 流线

用欧拉法描述流场，场上每一点都有速度，那么在某一瞬时 t_1 ，流场中某点1处流体质点的流速为 $\vec{u}_1$ ，沿 $\vec{u}_1$ 矢量方向无穷小距离 ds_1 处取点2，点2处流体质点在同一瞬时 t_1 的流速为 $\vec{u}_2$ ，沿 $\vec{u}_2$ 矢量方向无穷小距离 ds_2 处取点3，点3处流体质点在同一瞬时 t_1 的流速为 $\vec{u}_3$ 。依次类推，可以找到点4、点5……。这样，在 t_1 瞬时我们可以得到一条空间折线1, 2, 3, 4, 5……。当各折线段 ds 趋近于零时，该折线的极限为一条光滑的曲线 S ，曲线 S 就称为瞬时 t_1 流场中经过点1的流线，见图2-2(a)。

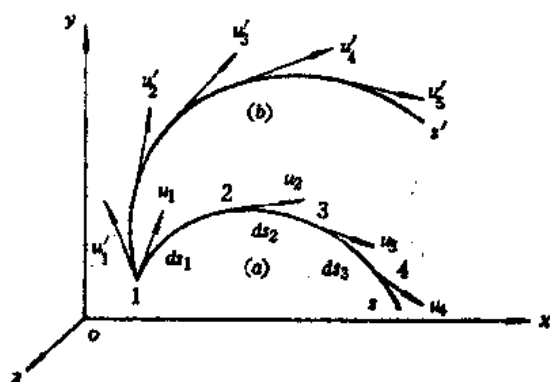


图 2-2

流线的定义为：流场中某一瞬时的一条空间曲线，在该线上各点的流体质点所具有的速度方向与曲线在该点的切线方向重合。

通过流场中其它点，也可用上述方法作出流线。因此，整个流场成为被无数流线所充满的空间，它显示出流体运动清晰的几何形象。

根据前面的叙述，可得出流线的如下特性：

(1) 流线的形状和位置，在定常流动时不随时间变化；而在不定常流动时，要随时间变化。这是由于非定常流动时，流场中速度随时间改变，所以在瞬时 t_2 通过流场空间点1的速度向量将改变为 $\vec{u}'_1$ ，按流线定义则 t_2 瞬时流过点1的流线将改变为 S' ，见图2-2(b)。

(2) 定常流动时，流线和轨线重合。

(3) 一般情况下流线不能相交。因为空间每一点只能有一个速度方向，所以不能有两条流线同时通过一点。但有三种例外情况：在速度为零的点上，如图2-2(a)中的A点，通常称A点为驻点；在速度为无限大的点上，如图2-3(b)中的O点，通常称它为奇点；流线相切，如图2-3(a)中B点，上下两股速度不等的流体在B点相切。

(4) 流场中的每一点都有流线通过，由这些流线构成流场的总体称为流线谱或简称流谱。

流线上任何一点的速度向量与流线相切这一性质，可以求出流线微分方程。如图2-4所示，设在流线上某点 $M(x, y, z)$ 的流速为 $\vec{V}$ （其分量为 V_x, V_y, V_z ），M点的流线微元段长 ds （其分量为 dx, dy, dz ），根据流线定义，M点的速度 $\vec{V}$ 与M点的切线（这里用

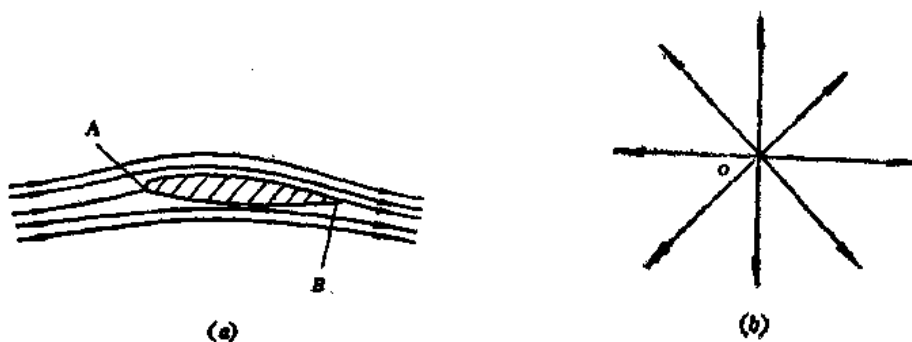


图 2-3

ds 表示) 相重合, 所以 ds 与坐标轴的夹角同速度 $\vec{V}$ 与坐标轴的夹角是相等的。因而相应夹角的余弦必相等。即有

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{Vx}) &= \frac{V_x}{V} = \frac{dx}{ds} \\ \cos(\widehat{Vy}) &= \frac{V_y}{V} = \frac{dy}{ds} \\ \cos(\widehat{Vz}) &= \frac{V_z}{V} = \frac{dz}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

由式 (2-4) 可求出

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \quad (2-5)$$

式 (2-5) 就是流线微分方程。当已知速度分布时, 根据微分方程可以求出具体流线形状。

3. 流管及流束

在流场中画一封闭曲线 C (不是流线), 经过曲线 C 的每一点作流线, 由这许多流线所围成的管状曲面称为流管, 如图 2-5 所示。

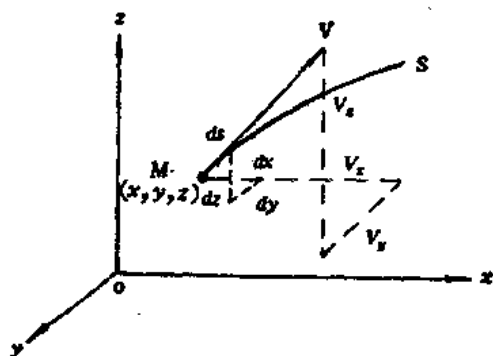


图 2-4

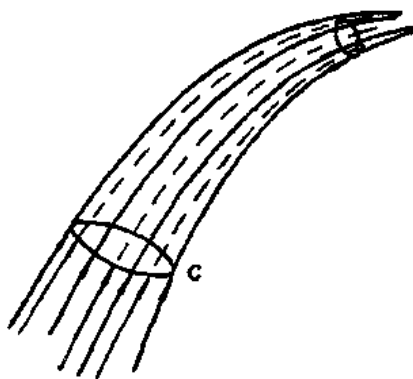


图 2-5

由于流管表面是由流线所围成, 因此流体不能穿出或穿入流管表面。这样, 流管好象刚体管壁一样把流体运动局限在流管之内或流管之外。对于定常流动来说, 流管好象真实的管子。

充满在流管内的流体，通常称为流束。

四、一维流的流动特点

飞机在空中飞行必然会对它周围的空气产生影响。一般来说，受影响的空气质点是在三度空间里运动的，处于不同地点的质点运动情况是不相同的。而且运动情况还会随时间而变化。质点运动速度（不论哪个分速）或其它参数（压强、温度等），都应该是空间坐标和时间的函数。三度空间坐标有三个量，加上时间一个量，共四个量。从数学上说，这四个量都是自变量，但在物理意义上，空间变量和时间变量是不一样的。前者通用术语叫维。我们首先从一维流动开始研究。

一维流是指流动的各参数（速度、压强等）都只是一个空间坐标的函数。如果这种流动还随时间变化，那就是坐标 s 和时间 t 的函数： $V = V(s, t)$, $p = p(s, t)$ 等。如是定常流动，则 $V = V(s)$, $p = p(s)$ 等。

如有一股气流，沿气流中心线（可以是逐渐弯曲），我们设坐标系 s ，如图 2-6 所示。所谓一维流就是在某一瞬间来看问题时，气流参数只是 s 的函数，在某个 s 处的一个横截面上各点的气流参数都是同一个值。这就是说，气流情况在一个横截面上是一致的，没有变化。这样的流动，实际上有没有呢？我们说，某些管道中的流动基本上是一维的，如风洞中的流动，或喷气发动机中的许多部分的流动。还有，在更复杂的三维流动里我们也可以划分成许多微小的流管。由于这些流管的截面极小，因而在流管的每一横截面上的气流参数都可以认为是常数，这种流管中流体的流动可以认为是一维流。因而工程上的某些流动，可以首先用一维流的理论来分析和处理。

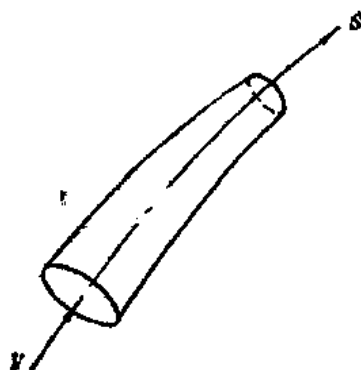


图 2-6

§ 2-2 低速一维理想管流的基本方程

低速是指气流速度远小于音速 a 时的速度。正如第一章已指出的，在流场中把空气作为不可压缩流体来处理。并认为是理想流体，即忽略粘性影响。

一、连续方程

连续方程是自然科学中一条最普遍规律——质量守恒定律应用在流体力学中的具体形式。设若在流场中任取某固定封闭曲面 V ，如图 2-7 所示。根据质量守恒定律可知：单位时间内流入 V 的空气质量减去单位时间内流出 V 的空气质量应等于 V 内单位时间所增加的空气质量。如果流场是定常流场，那么，单位时间流入 V 的空气质量便应等于单位时间流出 V 的质量。

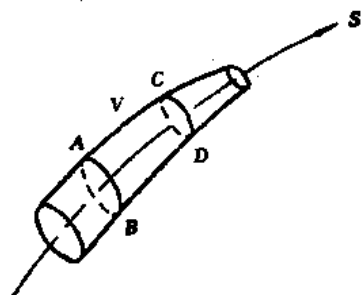


图 2-7

我们在流场中，取某一流管，沿流管任取两个垂直于管轴 s 的截面 AB , CD 构成一个

区域 $ABCD$ (即图 2-7 中的 V 区)。气流由 AB 截面流入, 由 CD 截面流出。 AB 横截面的面积为 A_1 , 气流在该截面的流速为 V_1 , 密度为 ρ_1 。 CD 横截面的面积为 A_2 , 气流在该截面的流速为 V_2 , 密度为 ρ_2 。单位时间内经 AB 截面流入的气体质量便是 $\rho_1 A_1 V_1$ 。同样, 单位时间内经 CD 截面流出的气体质量是 $\rho_2 A_2 V_2$ 。气流不能穿过流管壁面流入或流出, 所以单位时间内, 净流入 $ABCD$ 区域的气体质量便是

$$\rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2$$

如果是定常流动, 则流入 AB 和流出 CD 的质量应该正好相等, 也就是

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (2-6)$$

因为 $ABCD$ 是任取的一段, 所以式 (2-6) 即表示在定常的管道流动中, 通过各横截面的流体质量是一样的, 即沿着管道恒有

$$\rho V A = M \quad (2-7)$$

式中 M 是常数, 等于单位时间流过的质量, 称为质量流量。

如果是不可压缩流场, 密度是不变化的, 即 ρ 等于常数, 此时在定常的管道流动中, 沿管道便有

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (2-8)$$

或

$$V A = Q \quad (2-9)$$

Q 是另一个常数, 等于单位时间流过的体积, 称为体积流量。

式 (2-6) 与式 (2-7) 就是一维定常流的连续方程。其意义是定常流中, 通过同一流管中任意横截面的质量流量相等。而式 (2-8) 与式 (2-9) 便是不可压缩一维定常流的连续方程。其意义是不可压缩定常流中, 通过同一流管中任意横截面的体积流量相等。从方程式 (2-9) 还可以看出, 不可压缩定常流中, 通过管道面积大的地方速度小, 面积小的地方速度大。这一点在日常生活中都可以观察到。如河流在经过峡谷时水流特别急。在低速风洞中, 我们正是利用这个原理采用截面由大变小的收缩段来加速气流。

二、伯努利方程

在流动问题里, 速度和压强有关系, 下面来建立这个关系。

在某一流场里, 沿流管轴线 S 取一微段 dS 气流, 见图 2-8(a)。设 ac 的截面积是 A , 该截面上气流参数是 V , p ; 而 bd 截面积是 $(A+dA)$, 气流参数是 $(V+dV)$, $(p+dp)$ 。首先来确定在这一微段上作用哪些力? 见图 2-8(b), ac 截面上沿 S 正向作用压力 pA , 而在 bd 截面上沿 S 负向作用压力 $(p+dp)(A+dA)$, 这两个力是其它部分的气流对这段气流的作用力。

侧表面上的压强是变化的, 由于所取微段很小, 以均匀平均压强 $(p + \frac{dp}{2})$ 表示。侧表面受到压力

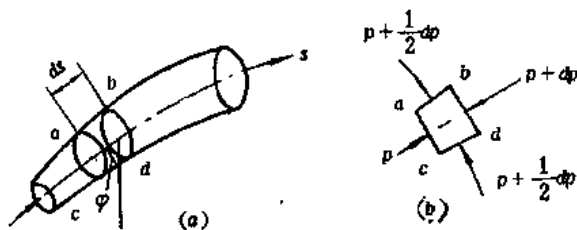


图 2-8

在 S 轴线上的投影, 其大小等于平

均压强 $(\frac{2p+dp}{2})$ 乘以侧表面在垂直 S 轴线平面上的投影面积 dA , 即 $(p + \frac{dp}{2})dA$ 。

由于我们研究理想流体, 不考虑由粘性产生的摩擦力。因而, 作用在这一微段气流上的

表面力只有上述的三个压力。除了表面力之外，还有一个质量力。假定流动只在重力场进行，质量力只有重力，其值等于该微段气流的质量与重力加速度 g 的乘积，指向竖直向下，一般情况与 S 轴线成 φ ，见图 2-8(a)。此力在 S 轴线方向的投影便是 $\rho g \cos \varphi (A + dA/2) ds$ ，指向负 S 方向。在正 S 方向上的作用力是

$$pA - (p + dp)(A + dA) + (p + dp/2)dA - \rho g \cos \varphi (A + dA/2) ds$$

略去微量高阶项，此力是

$$-Adp - \rho g \cos \varphi A ds$$

这是使该微段气流在 s 方向上产生加速度的力。

微段的速度是坐标和时间函数

$$V = V(s, t)$$

$$V + dV = V(s + ds, t + dt)$$

故得加速度

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (2-10)$$

由于我们讨论定常流场，所以 $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ 。式 (2-10) 便成为

$$a_s = V \frac{dV}{ds} \quad (2-11)$$

根据牛顿第二定律

$$V \left(\frac{dV}{ds} \right) (\rho A ds) = -Adp - \rho g \cos \varphi A ds$$

整理后得

$$V \frac{dV}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - g \cos \varphi \quad (2-12)$$

式 (2-12) 称为理想流体一维欧拉方程。

用 z 代表竖向坐标，向上为正向， $\cos \varphi = \frac{dz}{ds}$ ，式 (2-12) 成为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (V^2) &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - g \frac{dz}{ds} \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) &= 0 \end{aligned}$$

积分后得

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{常数} \quad (2-13)$$

或

$$\frac{1}{2g} V^2 + \frac{p}{\rho g} + z = \text{常数} \quad (2-14)$$

式 (2-13) 和式 (2-14) 称为伯努利方程。对于气体来说，当气流在流动过程中高度变化不大时， z 项可以略去，所以气体的伯努利方程通常又可写成

$$\frac{\rho}{2} V^2 + p = \text{常数} \quad (2-15)$$

式 (2-14) 右边的常数，称为伯努利常数。这个常数是指沿一条流线或一根流管是常数值。一般情况，对于不同流线或流管；常数值可以是不相同的。其物理意义见后。

式(2-14)运用的条件是

1. 理想流体
2. 不可压缩流
3. 定常运动
4. 在我们所考虑的范围内, 没有热或功能进出, 也没有流体产生和消失
5. 在同一条流线或一根流管上

伯努利公式虽然是从牛顿第二定律的力与加速度的平衡关系经过数学推导而来的, 但是经过积分之后, 式中各项都具有能量的量纲。以式(2-14)为例, 它的第一项表示单位重量的流体所具有的动能 ($V^2/2g$)。第三项表示单位重量流体的位能 (z)。第二项与第三项、第一项并列, 在量纲上必然也是能量, 相当于压力对于单位重量流体所具有的位能, 我们称之为压力能 ($p/\rho g$)。式(2-14)可以说是流体沿流管或流线上每一点的动能、压力能和位能三者的守恒式。常数 C 则表示为总机械能。所以式(2-14)又称为不可压一维流的能量方程。

式(2-15)说明, 在同一条流线(或同一条流管)上, 气流速度增大, 则压强下降, 反之则相反。当速度降为零时, 压强将达到最大值, 通常用 p_0 表示, 这个值称为总压或驻点压强或滞点压强, 速度降为零的点称为驻(滞)点。即有

$$p_0 = p + \frac{\rho V^2}{2} \quad (2-16)$$

其中 p 称为静压, $\frac{1}{2}\rho V^2$ 称为动压。

当远前方速度为 V_∞ , 压强为 p_∞ 的气流绕过翼型时, 绕过翼型上面和下面的气流有一条分界线 AO , 与翼型前缘相接处有一分界点 O 。当这段气流流向翼型时, 翼型头部有阻止气流的作用, 使气流减速, 气流越靠近翼型头部, 速度越慢, 而压强则逐渐增加。当气流到达分界点 O 时, 气流速度降为零, 压强达到总压值 p_0 , 这一点就是翼型的前驻(滞)点。见图 2-9 所示。

由式(2-16)知, 在不考虑摩擦时, 沿流管总压不变。所以有

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (2-17)$$

式中 p 系指流线上任一点的静压; $\frac{1}{2}\rho V^2$ 指流线上与静压对应点的动压。

举例说明上述公式。

例 1 设水桶壁有一小孔, 水自孔内射出, 如图 2-10 所示。小孔的面积与水桶的面积



图 2-9

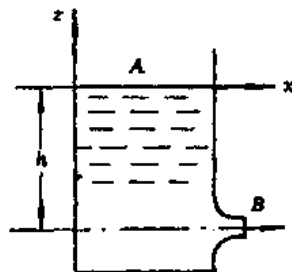


图 2-10

相比较是小量, 水射出时桶内水的自由表面的高度可以认为保持不变。自由表面处的压强为

大气压 p_a 。求射出的平均速度 V_B 的大小。

设“ A ”是桶内的自由表面处的物理量，“ B ”是孔口处的物理量，忽略粘性损失。在 B 点射出水流平均压强 p_B 应等于外界的大气压强 p_a 。把坐标原点放在自由液面上。

所以 $z_A = 0$, $z_B = -h$ 代入式 (2-13)

$$\frac{1}{2}V_B^2 + \frac{1}{\rho} p_a - gh = \frac{1}{\rho} p_a$$

$$V_B = \sqrt{2gh} \quad (2-18)$$

上式得出的水射出速度是理想值，实际上，射出速度比理想值小 1~4%。

例 2 用文氏管测流速

文氏管是一种测量管道内流速或流量的仪器，形状像个喇叭，如图 2-11。管截面由大变，又由小变大，都是渐变的。文氏管的大截面 A_1 和最小截面 A_2 都是已知的。在最小截面的管壁上钻有小孔与大截面的管壁上小孔用压力计相连，可以量出 A_1 和 A_2 截面的流体压强差 ($p_1 - p_2$)。

设文氏管是水平的。我们将 s 轴线放在管道的中心线上。这时 $z_1 = z_2 = 0$ ，按式 (2-13) 有

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

用连续方程， V_1 和 V_2 与管截面积成反比

$$V_1 = V_2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)$$

将此式代入上式，得

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (2-19)$$

体积流量是

$$Q = A_2 V_2 \quad \text{米}^3/\text{秒}$$

根据静止流体公式，并设压力计内液体的密度为 $\rho_{\text{液}}$ ，相应的重度为 $\gamma_{\text{液}}$ ，由式 (2-14) 可得

$$p_1 - p_2 = \rho_{\text{液}} g \Delta h = \gamma_{\text{液}} \Delta h \quad (2-20)$$

将式 (2-20) 代入式 (2-19) 得

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\gamma_{\text{液}} \Delta h}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad \text{米/秒} \quad (2-21)$$

这种仪器适用于液体和气体。利用上述原理，可以测量风洞（在管道中产生人工气流的一种实验装置）各段的风速。测量原理就是上述通过测量压差来确定所测点的速度。这种方法又称为压强落差法。

例 3 风速管原理

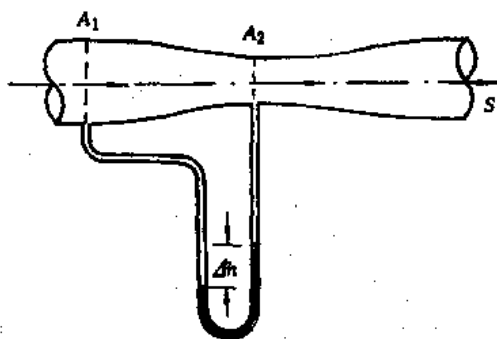


图 2-11

在风洞中测量气流速度仪器称为风速管。在飞机上也常常用它来测量飞机的航速，也叫空速管。图 2-12 是风速管的示意图。管轴与气流方向一致，管的头部有一小孔 O 正对来流方向，由于气流在这一点被完全滞止，流速减为零，所以孔 O 感受到的就是总压 p_0 ，孔 O 就称为总压孔。在管子的侧壁距离端头 $(5-6)d$ 的地方开一小孔（或一圈小孔） B ，孔 B 是垂直于管壁的（即垂直于来流），它所感受到的就是气流的静压，几乎和远前方来流静压 p_∞ 相等， B 孔就称为静压孔。把总压孔和静压孔所感受的压力分别和 U 形管的两端相连，根据 U 形管两液面之差，便算出或指示出气流的速度。

由伯努利方程可知

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_B^2$$

由于 B 点位置选得恰当，使得 $p_B = p_\infty$ ，则得

$$\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p_0 - p_\infty$$

设 U 形管内的液体重度为 $\gamma_{液}$ ，液面高度差 Δh ，则

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho_{液}} \gamma_{液} \Delta h} \quad \text{米/秒} \quad (2-22)$$

上式为理论上的风速管计算公式，实际使用时要加以修正。因为实际风速管的静压孔 B 的位置不一定能做到正好使 p_B 等于 p_∞ 。另外，总压孔不是一个点，而有一定的面积，故总压孔感受到的压强并不是驻点压强 p_0 ，而是这一面积上所受压强的平均值，比 p_0 略小。所以一般在式 (2-22) 上加一修正系数 ξ ， ξ 值由实验测定，则 V_∞ 为

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho} \xi \gamma_{液} (\Delta h)} \quad (2-23)$$

例 4 真实空速与指示空速（表速）

在飞机上用风速管测得的总压 p_0 与静压 p_∞ 是连接到空速表上进行指示的。空速表的基本元件是膜盒，膜盒内通总压 p_0 ，膜盒与密封表壳之间通静压 p_∞ 。膜盒感受压力差 Δp 后发生膨胀，带动指针在刻度板上指出读数，如图 2-13 所示。

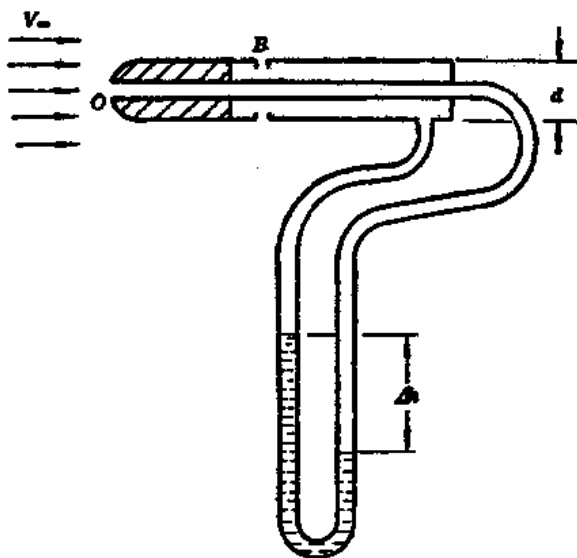


图 2-12

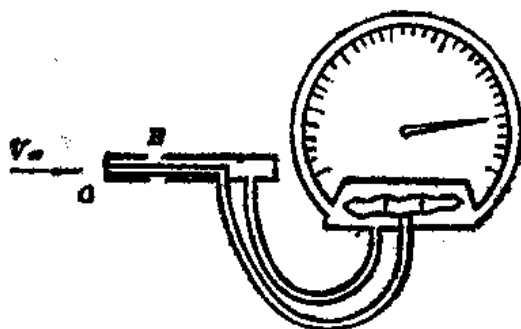


图 2-13

从表上读出的速度值称为指示空速（简称表速）。由于大气的密度是随高度升高而降低。空速表上刻度只适用于一个标准密度值，即海平面的标准值，所以飞机在海平面标准大气状态下飞行时，其表速即等于飞机相对于空气的真实空速。

空速表指针是根据所感受的动压而转动的，所以空速表的指示空速 $V_{表}$ ，与所感受的动压 q 有如下关系

$$q = \frac{1}{2} \rho_0 V_{表}^2$$

式中 ρ_0 指海平面标准大气密度值。

如飞机在 H 高度上飞行，空气密度为 ρ_H 而真速为 $V_{真}$ ，则动压为

$$q = \frac{1}{2} \rho_H V_{真}^2$$

这也是空速表所感受的动压。故

$$\frac{1}{2} \rho_H V_{真}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 V_{表}^2$$

$$V_{真} = V_{表} \sqrt{\frac{1}{\frac{\rho_H}{\rho_0}}} = \frac{V_{表}}{\sqrt{\Delta_H}} \quad (2-24)$$

$$V_{表} = V_{真} \sqrt{\Delta_H} \quad (2-25)$$

式中 $\Delta_H = \rho_H / \rho_0$ 称为 H 高度的相对密度。

三、动量定理

在管道流动问题里，有时并不需要知道流场每个细节，而要知道流场中流体与固体相互作用力。动量定理就提供了流体与固体相互作用的动力学规律。

牛顿第二定律的原始形式都是对“系统”写出来的。包含着确定不变的物质的任何集合，称之为系统。系统以外的一切，统称为外界。在流体力学中，系统就是指由确定的流体质点所组成的流体团。在这种系统定义下，质量、力、热、功等概念才有确切含义。如牛顿第二定律应用于系统， $F = ma$ 。这里， F 是指外界作用在系统上的合力， m 是指系统的质量， a 是指系统的质心加速度。如使用系统来研究连续介质的流动，就意味着用拉格朗日观点，即以确定的流体质点所组成的流体团作为研究对象。由于流体有极大可动性，对于任何有限长的时间，很难确定流体系统的边界；并且对大多数实际流体力学问题来说，我们往往对各个流体质点在不同时刻所占据的位置，以及它们所具有的诸物理量的值不感兴趣，而感兴趣的往往是流体流过坐标系中某些固定位置时的情况，例如，飞机在飞行过程中，表面上压强分布；发动机进、出口截面处的诸流动参数的分布等等。由此可见，在处理流体力学问题时，一般来说，采用欧拉观点更为方便，与此相应，必须引进控制体的概念。

控制体定义为固定在空间的一个任意体积。控制体的边界面，称之为控制面。它总是一个封闭表面。占据控制体的诸流体质点是随时间而改变的。

根据理论力学中动量定理：作用在所研究物体上全部外力的矢量和应等于物体动量的变化率。对于质量不变的情况，此定律的数学表达式为

$$\sum \vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m \Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad (2-26)$$

式中 $\Sigma \vec{F}$ 为外力的合力;

m 为物体的质量;

Δt 为合力作用的时间;

$\Delta \vec{V}$ 为 Δt 时间前后物体的速度变化。

根据式 (2-26) 来推导流体作一维定常流动的动量定理。也就是将系统的动量定理转换成控制体的形式。

假定流体在一管道中作定常流动, 管内可以有外物如机翼等。取 1, 2 截面及管壁 (内中如果有翼型, 则还包括翼型的外表面。) 所围成的空间区域作为控制体。取 t 时刻位于该体内的流体作为研究质量系。 Δt 后, 这块流体流到 1'2' 位置, 如图 2-14 所示。设 A_1 , $\vec{V}_1$, ρ_1 , p_1 , 与 A_2 ,

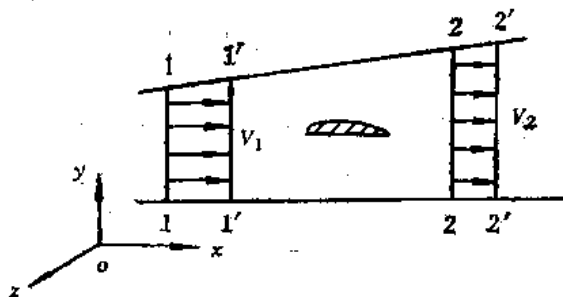


图 2-14

$\vec{V}_2$, ρ_2 , p_2 分别为 1 与 2 截面处的

流管截面积、流速 (是向量)、密度及压强, 因为是定常, 这些参数都是与 t 无关的。用符号 K 表示动量, 则这块流体在 Δt 时间内的动量增量为

$$K_{1'2'} - K_{12} = K_{1'2} + K_{22'} - (K_{11'} + K_{1'2}) = K_{22'} - K_{11'}$$

式中下标 12, 1'2' 等等分别表示所取的流体块如图 2-14 所示。上式中引用了 $K_{1'2}$ 不随时间 t 而变的定常条件。

11' 这块小流体的动量为

$$K_{11'} = (\rho_1 V_1 \Delta t A_1) \vec{V}_1$$

22' 小块流体的动量为

$$K_{22'} = (\rho_2 V_2 \Delta t A_2) \vec{V}_2$$

故 Δt 时间内的动量增量 $= (\rho_2 V_2 \Delta t A_2) \vec{V}_2 - (\rho_1 V_1 \Delta t A_1) \vec{V}_1$ 。设作用于这块流体的外力的合力为 $\vec{F}$, 则按照动量定理, 得到

$$\vec{F} = (\rho_2 V_2 A_2) \vec{V}_2 - (\rho_1 V_1 A_1) \vec{V}_1 \quad (2-27)$$

这就是一维定常流的动量定理的一般形式。用控制体的概念, 上式可以这样来叙述, 每单位时间内流出控制体的动量减去每单位时间内流进该控制体的动量, 等于作用于这控制体内流体的所有外力的合力 $\vec{F}$ 。运用控制体概念, 我们就不必取一块固定流体作为分析对象。

作用于这块流体的外力 $\vec{F}$, 它包括流体其余部分及管壁对该块流体的作用力 (压力及摩擦力); 这块流体的本身重力或离心力之类惯性力; 以及在这块流体内部存在的物体 (如翼型) 对其的作用力。

设 G 表示这流管中每单位时间内的重量流量, 根据连续方程得

$$\rho_1 V_1 A_1 g = \rho_2 V_2 A_2 g = G$$

则式 (2-27) 化为

$$\frac{G}{g} (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{F} \quad (2-28)$$

上式为向量形式, 在直角坐标轴系中的投影形式是

$$\left. \begin{aligned} \frac{G}{g}(V_{2x} - V_{1x}) &= F_x \\ \frac{G}{g}(V_{2y} - V_{1y}) &= F_y \\ \frac{G}{g}(V_{2z} - V_{1z}) &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

这种形式的一维定常流的动量定理，不论流体可压与不可压，粘性与非粘性，管道内有无其它固体，均能应用，所以在工程上得到了广泛应用。

举例说明如下。

例 1 求液面下 h 米处，小孔放水时水箱所受到的反作用力。小孔出口截面积为 A 米²，如图 2-15 示。

假定小孔接到水箱上去的管子是逐渐收缩的，到出口处才收缩成 A 米²，那么水流就会占满整个出口截面，流出的质量流量等于 ρVA 。

取控制面如图中的虚线所示。取 x 轴为水平方向。流入动量为零， Δt 内流出的动量 $\rho V^2 A(\Delta t)$ 。设水箱对水的作用力 R ，正 x 方向。根据动量定理得

$$R - pA = \rho V^2 A$$

利用式 (2-18)

$$R = 2\rho ghA + pA$$

所以水对水箱作用力 R' 和 R 大小相等，指向相反。

$$|R'| = 2\rho ghA + pA$$

考虑到水箱外壁作用有大气压，所以水箱受到合力为

$$F = pA - (2\rho ghA + pA) = -2\rho ghA$$

负号说明是指向 x 的负向。

例 2 求水平的 U 形水管中，水对管子的作用力。不考虑粘性作用。

取控制面如图 2-16 上的虚线。由式 (2-19) 得

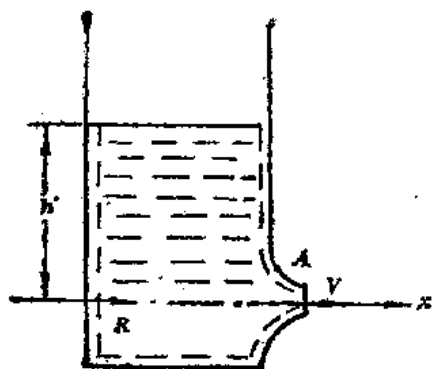


图 2-15

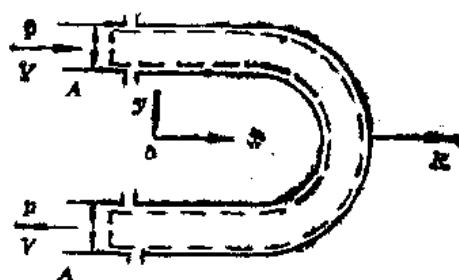


图 2-16

$$F_x + 2pA = \rho VA[(-V) - V]$$

$$F_x = -2A[p + \rho V^2]$$

式中 F_x 为管子对水作用力；

A 为管子截面积；

p 、 V 为管子内的压强和流速。

所以水对管子的作用力

$$R = -F_s = 2A(p + \rho V^2)$$

例 3 有一股具有圆形截面的水流垂直地冲击平板上，然后沿着它向四面流开，见图 2-17。来流截面积为 A ，来流速度为 V 。求平板所受到的力。

这股水碰到平板以前，四面都是和大气接触的，所以它的表面上的压强必然等于大气压强 p_a 。如果认为它内部的静压也都等于大气压强，水的流速便是个常数 V 。根据伯努利公式可知，在忽略粘性影响时，这股水流在碰到了平板并且流开一些距离之后，压强等于 p_a ，速度等于 V 。在冲击点 P 的附近，压强显然要发生显著变化，正因为有了这个变化，板上才出现我们所熟悉的冲力。

取控制面如图上虚线和点划线两个长方形所示。我们认为它们是在离开冲击点 P 足够远的地方穿过平板。虚线所表示的控制面 1 上，压强处处等于 p_a ，所以合力为零。在点划线所表示的控制面 2 上，压强的合力为 R ，则对应作用在控制面 2 上合力 R 的反作用力为 F_s 。根据动量定理，在 x 方向上

$$F_s = \rho AV(0 - V) = -\rho AV^2$$

故

$$R = -F_s = \rho AV^2$$

从这例子可以看出，计算圆形流体射向平面壁的冲击，如要考虑流体内部压强分布细节，计算过程比较复杂。而我们要求对平面壁的合力，通过动量定理，取控制面办法计算极为简单。

例 4 某一架喷气飞机的飞行速度为 720 公里/小时 (200 米/秒)，发动机吸进的空气质量流量为 30 千克/秒，燃油对空气之比为 1:40。若喷出的气流速度为 400 米/秒，计算发动机的推力。

我们不考虑发动机外部流动的阻力，取图 2-18 的点划线表示所取的控制面。进入控制

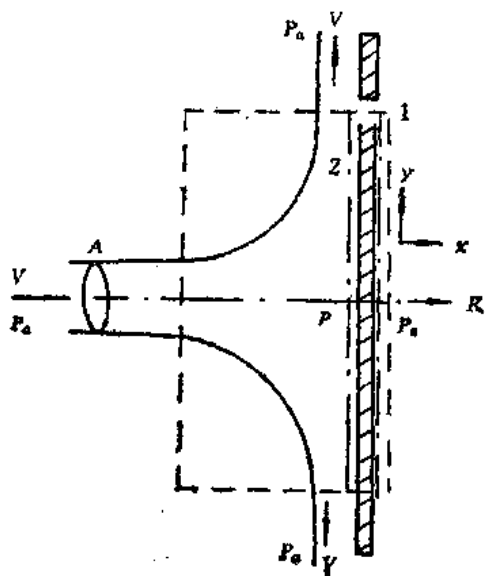


图 2-17

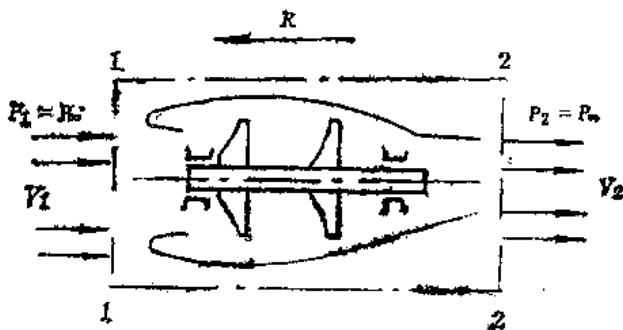


图 2-18

面 1 处的动量流量为

$$m_1 V_1 = 30 \times 200 = 6000 \text{ 牛}$$

流出控制面 2 处的动量流量为

$$m_2 V_2 = \left[30 \left(1 + \frac{1}{40} \right) \right] \times 400 = 12300 \text{ 牛}$$

其中 m_2 为空气加燃油的质量流量, V_2 为喷出气流速度。如果认为进气口和喷气口的压强相同, 由式 (2-29) 就可以算出发动机作用在来流上的力

$$F_x = 12300 - 6000 = 6300 \text{ 牛}$$

所以气流作用在发动机上的力 (也就是发动机的推力) 为 -6300 牛, 负号表示向左。即 $R = -F_x$ 。

§ 2-3 高速一维管流

本节主要讨论气体作高速流动的规律和特点。

一、音速和微弱扰动的传播

1. 音速与微弱扰动的传播

在流场中, 任一点的流动参数相对于原先状态的变化就称为扰动。如飞机在空中飞行时, 它对周围的空气产生影响, 使空气的密度、压强、速度等气流参数发生变化, 也就是说飞机对空气产生了扰动。空气是弹性介质, 一处受到扰动, 这个扰动便通过空气一层一层相互作用, 向四面八方传播。这个过程和我们耳朵听到敲锣打鼓声音是一样的。锣鼓的振动传给了空气, 空气又一层一层相互作用, 把它传给我们的耳膜, 因此我们听到了锣鼓声。锣鼓的振动, 对空气来说就是一种扰动, 因为振动引起的空气压强与密度的变化都很微弱, 就称为微弱扰动。另外, 我们知道在空气中传播这种扰动, 即声音, 需要一定的时间, 就是说, 有一定的传播速度, 这种速度就是音速。在空气动力学中, 我们就把一切微弱扰动的传播速度称为音速。

在物理学中可知弹性介质中声音的传播速度, 可用介质的弹性模数来表示

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2-30)$$

式中 a 为声音在弹性介质中传播速度;

ρ 为介质密度;

E 为介质弹性模数。

用式 (1-9) 代入上式, 音速的式子为

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2-31)$$

下面用例子来说明。图 2-19 表示一个直管, 直管左端有一活塞。在起始时刻, 见图 2-19(a) 管中充满着静止气体, 其状态参数 p_1 、 ρ_1 。设活塞突然以微小速度 ΔV 向右运动, 则靠近活塞气体受到扰动后, 压强升至 $p_2 = p_1 + \Delta p$, 密度升至 $\rho_2 = \rho_1 + \Delta \rho$, 速度由零变成 ΔV , 开始向右运动。在管中气体产生一个微弱的压缩扰动, 这个扰动便以一定速度 u 向右传播。

已经扰动和未经扰动的气体之间有个分界面（称为扰动波面），在 $t=t_1$ 瞬时，扰动波面到达管截面 I—I 处，见图 2-19(b)，在 $t=t_2$ 瞬时，扰动波面到达管截面 II—II，如图 2-19(c) 所示，截面 I 与 II 间距离为 Δx （取得很小， Δx 不大于气体密集层的厚度），则扰动波的速度 u_a 可表示为

$$u_a = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2-32)$$

式中 $\Delta t = t_2 - t_1$ 。若管的截面积为 A ，则在 Δt 时间间隔内，气体通过截面 I—I 的质量为

$$\rho_2 A \Delta V \Delta t \quad (2-33)$$

从另一方面看，在 Δt 时间间隔内，截面 I—I 和 II—II 之间的气体质量增量为

$$(\rho_2 - \rho_1) A \Delta x \quad (2-34)$$

由于在 Δt 时间间隔内通过截面 I—I 的质量应等于截面 I—I 和 II—II 之间的质量增量，所以式 (2-33) 与式 (2-34) 应相等，即

$$\rho_2 A \Delta V \Delta t = (\rho_2 - \rho_1) A \Delta x$$

利用式 (2-32)，上式化为

$$\rho_2 \Delta V = (\rho_2 - \rho_1) u_a \quad (2-35)$$

在 t_1 瞬间，截面 I—I 与 II—II 之间的气体质量为 $\rho_1 A \Delta x$ ，对这部分气体的作用力为 $(p_2 - p_1) A$ 。经过 Δt 时间后，这部分气体获得速度 ΔV 。因此，其加速度等于 $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ 。根据牛顿第二定律：作用力等于质量乘加速度。即

$$(p_2 - p_1) A = \rho_1 A \Delta x \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

利用式 (2-32)，上式可化成

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_a \Delta V \quad (2-36)$$

从式 (2-35) 与式 (2-36) 消去 ΔV ，得

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_a^2 \frac{p_2 - p_1}{\rho_2}$$

即

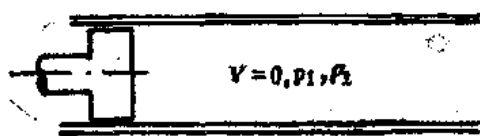
$$u_a^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \right) \quad (2-37)$$

式中 $p_2 - p_1 = \Delta p$ ， $\rho_2 - \rho_1 = \Delta \rho$ 。

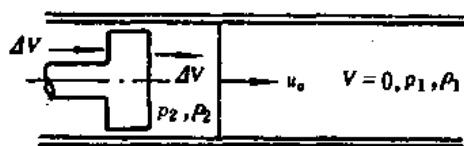
当扰动极为微弱时，即 $\Delta \rho \rightarrow 0$ ， $\Delta p \rightarrow 0$ ，于是由式 (2-37) 得到弱扰动波的传播公式，即音速的表达式

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} u_a = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right)} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a \quad (2-38)$$

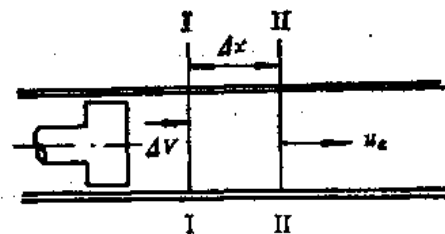
式 (2-37) 为具有一定扰动值的压力波传播速度，不难看出该式的 u_a 大于 a 。



(a) 管内为静止气体



(b) 活塞向右运动，在时刻 t_1 时的情况



(c) 在时刻 t_2 时的情况

图 2-19

声音由于扰动极为微弱,即温度和压强变化都小得趋于零,因而整个过程接近于可逆过程。此外,由于此过程进行得相当迅速,且温度变化又很小,这就使得此过程接近于绝热过程。这样,在波强度无限弱的极限情况下,就可认为此过程既可逆又绝热,可逆绝热过程中有下列关系式

$$p = c\rho^k \quad (2-39)$$

式中 C 为常数。因此

$$\frac{dp}{d\rho} = kc\rho^{k-1} = k\frac{c\rho^k}{\rho} = k\frac{p}{\rho}$$

代入式(2-38),得

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$$

利用完全气体的状态方程 $p = \rho RT$, 上式可写成

$$a = \sqrt{kRT} \quad (2-40)$$

式(2-40)表明,气体中音速(或微弱扰动传播速度)决定于气体的种类(k 、 R 之值随气体种类而不同)和当地温度。对空气而言 $k = 1.4$, $R = 287 \frac{\text{米}^2}{\text{秒}^2 \cdot \text{K}}$, T 为绝对温度,因此

$$a = 20.05\sqrt{T} \text{ 米/秒} \quad (2-41)$$

在海平面标准大气条件下

$$a = 20.05\sqrt{273+15} = 340 \text{ 米/秒}$$

2. 压缩性与马赫数 M

在第一章中我们已知气体是可以压缩的,即气体的体积或密度可以变化。式(2-12)为一维流的欧拉方程,在水平流动中,可改写为

$$dp = -\rho V dV \quad (2-42)$$

即

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{V dV}{dp}$$

从上式可改写为

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V dV \cdot d\rho}{dp} = -\frac{V dV}{a^2} = -\frac{V^2}{a^2} \frac{dV}{V} \quad (2-43)$$

在流动问题里,气流的速度 V 对当地音速 a 之比称为马赫数,以 M 表示

$$M = \frac{V}{a} \quad (2-44)$$

则式(2-43)可写成

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2-45)$$

由第一章可知气体的压缩性可用压缩性系数 β 来表示,由式(1-6)及式(1-7)可得

$$\beta = \frac{d\rho/\rho}{dp} \quad (2-46)$$

可见 β 正比于 $\frac{d\rho}{\rho}$ 。由式(2-45)看出,在一定的速度相对变化量时,密度相对变化量决定

于 M 数的大小,即气体的压缩性大小决定于 M 数的大小。如果流速 V 比音速小得很多,即 M 数很小,如 $M \leq 0.3$,则 $\frac{d\rho}{\rho}$ 就趋于零,此时可将气体视为不可压缩流体(密度视为常数)来处理;反之, M 数较大, $\frac{d\rho}{\rho}$ 不能被忽略,这时必须考虑密度的变化,即考虑气体压缩性影响。可见,气体流动时的压缩性标志是它的 M 数(不是它的速度)。

理论上的不可压缩流体,密度是不变的,不管压强变化 Δp 多大,它的密度变化量恒等于零。根据音速公式(2-38),不可压缩流体的音速 a 为无限大,它的 M 数为零。可见,气体的可压缩性,使它的微弱扰动传播速度(即音速)为一有限值。

3. 微弱扰动的传播

我们分四种情况讨论微弱扰动的传播

(1) 扰动源静止($V=0$)时,波面的传播。图2-20(a)表示弱扰动在静止空气里传播的情况, O 点发生的扰动以音速向四面八方传开。1秒钟后波面达到半径为 a 的球面,2秒钟后波面达到半径为 $2a$ 的球面,余类推。

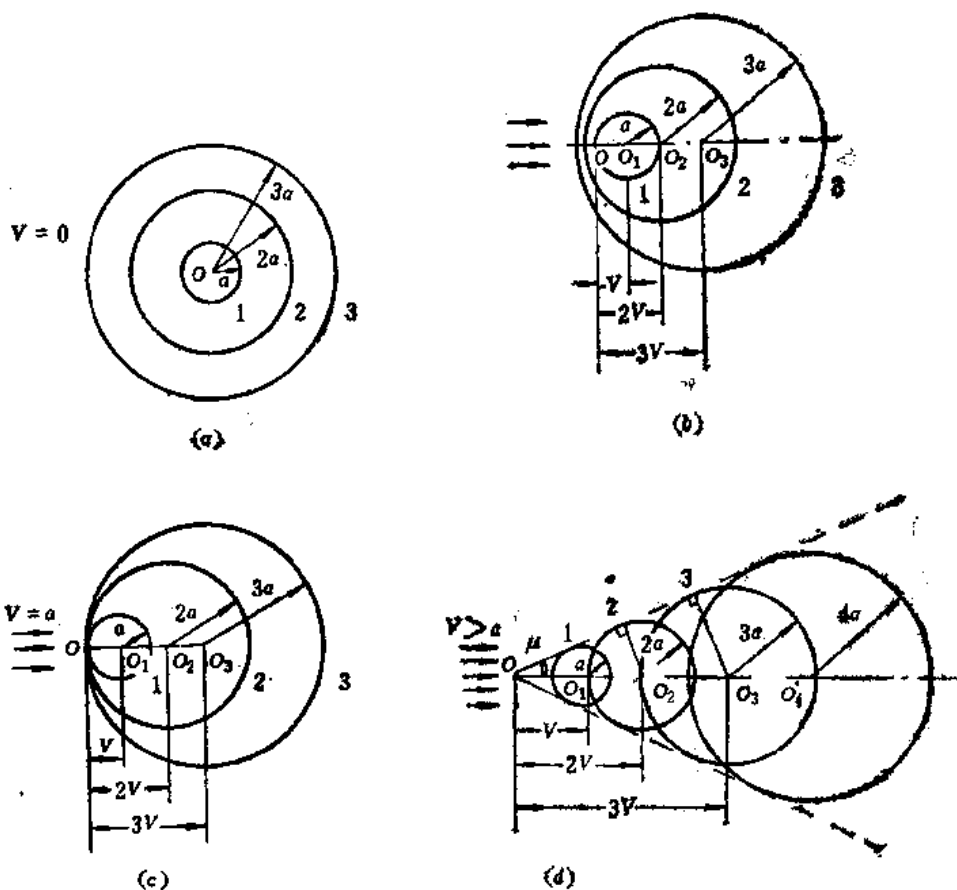


图 2-20

(2) 扰动源以亚音速($V < a$)运动时,波面的传播。图2-20(b)表示扰动源以亚音速($V < a$)运动时,波面的传播。根据相对性原理,扰动源以速度 V 在静止空气里运动的情况相当于扰动源静止而气流以速度 V 流动一样。因此,从 O 点发出的微弱扰动,一面以音速

a 向四面传播, 同时又被空气以流速 V 顺流带走。经过 1 秒钟, 波面达到“1”位置, 半径为 a , 波面各点顺流下移了 V 的距离。2 秒钟后, 波面达到“2”的位置, 半径为 $2a$, 波面各点顺流下移了 $2V$ 的距离。依次类推。

(3) 扰动源以音速 ($V=a$) 运动时, 波面的传播。扰动源以音速运动时波面的传播, 就相当于气流以音速流过静止源的情况一样, 它的波面传播如图 2-20(c) 所示。这时波面虽然一方面向四面八方扩大, 一方面下移, 但是逆气流方向这一边的波面始终彼此相切。这表明, 在气流速度等于音速 a 的情况下, 弱扰动的波面无法逆流向前传播。即在扰动源 O 点产生的扰动不能使 O 点以前的空气压强和密度发生微弱变化。只能影响它后面的空气。

(4) 扰动源以超音速 ($V>a$) 运动时, 波面的传播。如果气流速度大于音速, 则自 O 发生的弱扰动, 其传播如图 2-20(d) 所示。这时波面一方面扩大, 一方面顺流而下, 弱扰动所能影响的范围, 仅局限于图中两条切线所夹的圆锥内。这个圆锥的锥面是由一系列相邻的弱扰动波组成的, 叫做扰动锥或马赫锥。扰动锥以外的气流是不受扰动的, 圆锥表面成了受扰动和未受扰动的界限, 这个界限叫做弱扰动的界限波, 或称马赫波。

由图 2-20(d) 可得

$$\sin \mu = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \quad (2-47)$$

即

$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M}$$

式中 μ 叫做马赫角。 M 为马赫数, 即飞行速度与音速之比。显然扰动区的大小与 M 数成反比, M 数越大, 则 μ 角 (扰动区) 越小。

从以上的分析可见, 在亚音速气流 ($M<1$) 中, 弱扰动可以向四面八方传去。而在超音速气流 ($M>1$) 中, 弱扰动就不能逆气流方向向前传播, 而只能在扰动锥里传播。这是亚音速气流与超音速气流中弱扰动传播的本质区别。

二、高速一维管流的基本方程

在理想一维不可压缩流中, 未知流动参数只有速度 V 和压强 p 两个, 因此, 只要有两个方程就可以决定了, 即连续方程和伯努利方程。现在研究的可压缩流, 它的流动参数有四个, 速度 V 、压强 p 、密度 ρ 和温度 T 。要决定这四个参数, 显然需要四个方程。这四个方程就是状态方程、连续方程、动量方程和能量方程。

1. 气体状态方程

对于完全气体的状态方程, 已由式 (1-1) 给出

$$p = \rho RT$$

2. 连续方程 (质量方程)

根据质量守恒定律, 在定常情况下, 一维流动中流进任一截面 A_1 的质量流量应该等于流出另一任意截面 A_2 的质量流量, 即式 (2-7)

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

或

$$\rho V A = \text{常数}$$

对上式取对数

$$\ln \rho + \ln V + \ln A = \ln C$$

然后微分

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2-48)$$

式(2-48)就是微分形式的质量方程。

3. 动量方程

对理想流体, 在定常情况下, 不计质量力(重力)影响时, 沿流线的伯努利方程的微分形式, 即式(2-12)改写成

$$V \frac{dV}{dS} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dS}$$

即 $dp + \rho V dV = 0 \quad (2-49)$

式(2-49)为一维理想流体动量方程的微分形式。

4. 能量方程

对于理想流体, 又与外界无热交换, 即理想绝热流动, 式(2-39)成立

$$p = C\rho^k$$

将上式代入式(2-49), 可得

$$\rho V dV + K C \rho^{k-1} d\rho = 0$$

即

$$V dV + K C \rho^{k-2} d\rho = 0$$

积分上式, 得到

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{k}{k-1} C \rho^{k-1} = \text{常数}$$

即

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{常数} \quad (2-50)$$

用式(1-1)代入得

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{k}{k-1} RT = \text{常数} \quad (2-51)$$

式(2-50)或式(2-51)称为理想流体的一维绝热可压流的能量方程。如果气流内部有摩擦现象, 上述能量方程形式不变, 这是因为一方面气流作了摩擦功, 但另一方面产生的摩擦热仍保留在气流内部, 所以上述能量方程形式不变。从而可知上述方程可以推广到粘性流动。

三、一维等熵流动

在不少空气动力学问题中, 可以忽略粘性与热传导的影响, 同时由于流动变化很快, 可以认为气流与外界没有热交换。所以流动变化过程是可逆的绝热过程即等熵过程, 即等熵过程式(2-39)成立。

1. 气流的滞止参数及等熵流动关系式

为了描述流场中一点的状态, 可以给出该点的气体的压强、温度和速度等参数的数值。在工程上往往是给出该点气流滞止参数(如滞止温度、滞止压强等)和 M 数, 来求出该点其它参数。这因为滞止参数比较容易测量, 运用滞止参数分析或计算问题比较方便。

根据一维定常流动的能量方程式(2-51)

$$\frac{1}{2} V_1^2 + \frac{k}{k-1} RT_1 = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{k}{k-1} RT_2$$

在绝能可逆流动的条件下, 气体的温度是随气流速度的减小而增大, 如果气流的速度 $V = V_1$ 绝热地滞止到零 ($V_2 = 0$), 此时所对应的温度 T_2 就称为滞止温度 (又称驻点温度或总温), 用 T_0 表示, 则

$$T_0 = T_1 + \frac{k-1}{2} \frac{1}{kR} V_1^2 \quad (2-52)$$

依照马赫数定义 $M = \frac{V}{a}$ 及式 $a = \sqrt{kRT}$, 上式又可改写成

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \quad (2-53)$$

由等熵关系式 (2-39) 可知

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{常数}$$

可得

$$\left(\frac{p_0}{p} \right) = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k \quad (2-54)$$

利用状态方程 $p = \rho RT$, 上式又可改写为

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

或

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2-55)$$

于是

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2-56)$$

将式 (2-53) 代入式 (2-55) 和式 (2-56) 即得

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2-57)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2-58)$$

上式 ρ_0 、 p_0 为速度等熵地滞止为零, 此时所对应的压强、密度值, 分别称为滞止压强 (驻点压强或总压)、滞止密度 (驻点密度或总密度)。式 (2-53)、(2-57)、(2-58) 是等熵流动关系式, 它表示流场中某点的温度 T 、压强 p 、密度 ρ 与该点气流 M 数的关系, 为了便于应用, 已将上述关系制成数值表, 计算时可查用。

2. 最大速度 $V_{\max}$, 临界音速 a_* 和速度系数 λ

前面提到的各滞止参数, 都是一维流动的特征参数, 现在再介绍两个重要的特征参数。

(1) 最大速度 $V_{\max}$

从能量方程式 (2-52) 可以看出, 在流动中随着 T (或 p 、 ρ) 变化, 速度也要跟着变化。温度 T 降至零时, 速度达最大值 $V_{\max}$ 。根据状态方程, 这时 p 也等于零, 即气体的能量全部转化为动能了。 $V_{\max}$ 表示该气流可能达到的最大速度。从式 (2-52) 得出

$$\left. \begin{aligned} V_{\max} &= \sqrt{\frac{2kRT_0}{k-1}} \\ V_{\max} &= \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0 \\ V_{\max} &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}} \end{aligned} \right\} \quad (2-59)$$

(2) 临界音速 a_* 。

从式 (2-51) 可得

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{kRT_1}{k-1} = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{kRT_2}{k-1}$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} \quad (2-60)$$

$$\text{其中} \quad a_0 = \sqrt{kRT_0} \quad (2-61)$$

由式 (2-60) 可见, 气流速度 V 与音速 a 有联系。在一维流管中, 当 V 从零逐渐增大时, a 从 a_0 逐渐减小。当 V 增大到与 a 相等时, 这是一种临界情形, 我们把这时的音速称为临界音速, 用 a_* 表示。这时压强、密度、温度的临界值分别用 p_* 、 ρ_* 、 T_* 表示。因为临界时 $V = a$, 故马赫数 $M = \frac{V}{a} = 1$, 从式 (2-60) 可得

$$\frac{a_*^2}{k-1} + \frac{a_*^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}$$

$$\text{因此} \quad a_* = \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0 \quad (2-62)$$

可见对一定的流动, a_* 是一个常量, 它也是一个特征参数。

(3) 速度系数 λ 。

因为马赫数的定义是 $M = \frac{V}{a}$, 前面已提到, 气流速度 V 改变时, 音速 a 也在改变, 所以有时用 M 数分析问题感到不方便。同时, 在习惯上分析发动机内流问题时, 常常利用另一个参数——速度系数 λ , 它的定义为

$$\lambda = \frac{V}{a_*} \quad (2-63)$$

当 $V = V_{\max}$ 时,

$$\lambda_{\max} = \frac{V_{\max}}{a_*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \quad (2-64)$$

因为 $V = V_{\max}$ 时, $a = 0$, 所以此时 $M = \infty$ 。

当 $V = a_*$ 时, $\lambda = 1$ 。因为 $V = a_*$ 时, $a = a_*$,

所以此时 $M = 1$ 。由此得到 λ 与 M 的对应关系如右表

V	0	a_*	$V_{\max}$
M	0	1	∞
λ	0	1	$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

四、气流截面积与马赫数的关系式

通过一些基本关系式可确立气流流动过程中流动参数与管道截面积关系。为了突出截面

积变化这个因素，研究的对象是绝热理想定常一维管流，没有考虑摩擦和加热的因素。

将微分形式的动量方程式 (2-45) 代入微分形式的连续方程式 (2-48)，得

$$-M^2 \frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

即

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (2-65)$$

从式 (2-65) 可见，当 $M < 1$ 和 $M > 1$ 时， dA 随 dV 的变化规律是不同的，当 $M < 1$ 时， $(M^2 - 1)$ 是负值， dA 与 dV 是异号，所以在亚音速时，速度增大，管道截面积变小，速度减小，截面积变大。这与一般低速流动的规律相同。但是，当 $M > 1$ 时，规律正好相反。这时 $(M^2 - 1)$ 是正值， dA 与 dV 是同号，所以在超音速时，速度增大，管道截面积变大，速度减小，截面积也变小。

综上所述，压强、流速和横截面积变化的规律可归纳表 2-1 所述。

表 2-1

流管形状	亚音速气流 ($M < 1$)	超音速气流 ($M > 1$)
收缩形管道	流速增大 压强减小	流速减小 压强增大
扩张形管道	流速减小 压强增大	流速增大 压强减小

亚、超音速两种情况下横截面积变化与流速关系产生相反结果，主要是气流压缩性效应所致。由式 (2-45) 改写为

$$\frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dV}{V}} = -M^2 \quad (2-66)$$

式中 $\frac{d\rho}{\rho}$ 和 $\frac{dV}{V}$ 分别表示密度和速度的相对变化量。这两个相对变化量的比值，随 M 数的变化而变化。式 (2-66) 表明，在亚音速流中 ($M < 1$)，密度相对变化量较速度的相对变化量为小，而在超音速 ($M > 1$) 中，密度相对变化量则较速度相对变化量为大，即密度的下降比速度增加来得快。当 M 数十分大时候，速度的变化小到微不足道，而主要的变化则是密度的变化。这和 M 数很小时密度变化可略去不计，速度变化是主要的这种情况正好相反。根据连续方程 ρVA 为常数，可知截面积是随速度增大而减小的，但又随密度减小（密度随速度上升而下降）而增大。速度和密度二者的变化对截面积的变化起着相反作用。在亚音速时，速度的变化对截面的要求是主要因素，因此，速度增大要求管截面收缩。到了超音速时，密度下降超过了速度上升作用，于是，密度变化便成了决定管截面变化的主要因素，因此欲要速度上升，管截面必须进一步扩大。

从以上讨论可知，要产生超音速气流，管道截面变化应如图 2-21 所示。先收缩后扩大的管子，称为拉瓦

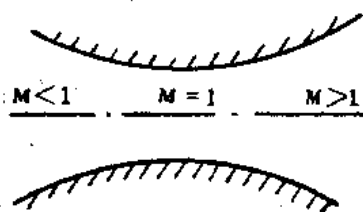


图 2-21

尔管。超音速风洞的喷管、蒸气轮机、燃气轮机中的喷管，都是这种形状。如前已指出，亚音速气流必在收缩段里，超音速气流必在扩张段里，而 $M=1$ 恰好必在最窄截面处（称喉道）。在最窄截面上，气流速度达到了当地音速，即 $V=a_*$ ，这个截面称为临界截面，常用 A_* 表示。临界截面上的各种参数，称为临界参数，如前述，临界压强 p_* 、临界密度 ρ_* 、临界温度 T_* 等。用 $M=1$ 代入式 (2-53)、式 (2-57) 和式 (2-58)，可得各临界参数与滞止参数之关系为 ($k=1.4$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_0}{T_*} &= \frac{k+1}{2} = 1.2 \\ \frac{p_0}{p_*} &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{3.5} = 1.89 \\ \frac{\rho_0}{\rho_*} &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{2.5} = 1.58 \end{aligned} \right\} \quad (2-67)$$

上面提到通过先收缩后扩张的管道，才能产生超音速气流，这仅仅指管截面变化的条件而言；能不能产生超音速气流，还要看上下游有没有足够的压强比。

五、气流按不可压缩处理的范围

从式 (2-53)、式 (2-57) 和式 (2-58) 可知， $M=0$ 时各参数比值均为 1，即各介质处于静止的平衡状态，不存在因流动而发生压缩问题。但在 $M>0$ 时的各种不同速度的运动情况下，都具有不同程度的压缩效应。马赫数在什么范围内，可以忽略压缩性的影响呢？下面我们以计算滞点压强为例来说明。

首先将式 (2-58)，按二项式定律展开，得

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= 1 + \frac{k}{k-1} \left(\frac{k-1}{2} M^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{k}{k-1} \left(\frac{k}{k-1} - 1 \right) \left(\frac{k-1}{2} M^2 \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{k}{2} M^2 + \frac{k}{8} M^4 + \dots \\ &\approx 1 + \frac{k}{2} M^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \dots \right) \end{aligned}$$

注意到 $\frac{k}{2} M^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho V^2}{p}$ ，上式为

$$p_0 = p + \frac{\rho V^2}{2} + \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{M^2}{4} + \dots \quad (2-68)$$

不计压缩性时，按不可压流的公式 (2-16) 来计算时，其滞点压强 p_b 为

$$p_b = p + \frac{\rho V^2}{2}$$

比较上述两滞点压强，可得压强误差

$$p_0 - p_b = \Delta p = \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{M^2}{4} + \dots$$

因作近似计算，只取 M^2 项，故压强相对误差为

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2} = \frac{M^2}{4} \quad (2-69)$$

如取 $\varepsilon_p = 1\%$, 则

$$M = \sqrt{4\varepsilon_p} = 0.2$$

这就是说, 当 $M \leq 0.2$ 时, 便满足了限定的相对误差 $\varepsilon_p \leq 1\%$ 的精度要求。不同 M 数对应的气流速度及相对误差, 由表 2-2 表示

表 2-2

马赫数	M	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
流速	V	34	68	102	136	170	203	238	272	306
ε_p	%	0.25	1.00	2.25	4.00	6.20	9.00	12.80	17.30	21.9

注: 以 $a = 340$ 米/秒进行计算

可以看出, $M \leq 0.3$ 时, 忽略压缩性造成的误差 $\leq 2.25\%$, 这在一般工程问题中是允许的。所以 $M \leq 0.3$ 的流动, 可以将空气视为不可压缩流来处理。

练 习 题

2.1 什么叫流线、流管? 流线与轨线有什么区别?

2.2 已知流体运动具有分速度 $V_x = x$; $V_y = y$; $V_z = 0$, 求通过点 (1, 1) 的流线。

2.3 已知直角坐标系中的速度场 $V_x = x + t$; $V_y = y + t$ 。试求在 $t = 1$ 时刻, 过 (1, 2) 点的流线。

2.4 当低速气流流过管道如图 2-22 所示。通过 U 形管测得 1、2 剖面处的压力差为 10 厘米酒精柱高。已知酒精重度为 7800 牛/米³, 还已知空气密度 $\rho = 1.226$ 千克/米³, $A_1/A_2 = 3$, 试求 V_1 、 V_2 各为若干?

2.5 直径 1 米的水管中的流速为 4 米/秒, 压强为 3 个大气压。计算水作用在一个 90° 弯头上的力的大小和方向。如图 (2-23) 所示。

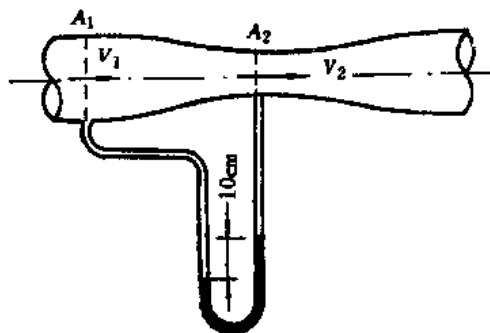


图 2-22

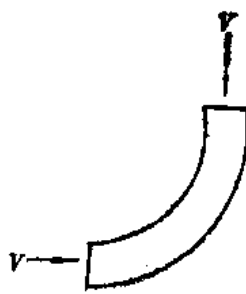


图 2-23

2.6 有一低速小风洞, 风扇以某固定转速工作时, 风扇出口截面流速 $V_2 = 10$ 米/秒, 风洞等直径段半径 $R = 0.3$ 米, 大气为标准海平面大气状态, 问 (1) 图 2-24 中风扇前 1-1 截面的速度为多少?

(2) 风扇前后的总压 p_{01} 与 p_{02} 是否相等? 各等于多少?

(3) 风扇前后静压 p_1 及 p_2 等于多少?

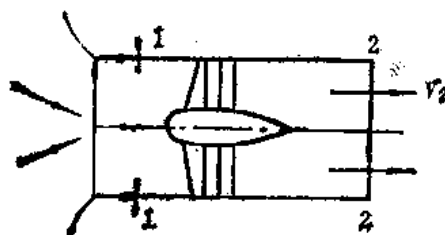


图 2-24

(4) 风扇所受的力 R 等于多少?

(5) 气流所得的功率等于多少? 若风扇的效率为 0.75, 问电机的输出功率为多少?

2.7 一个人看见一超音速飞机在头顶上飞过, 在 2.15 秒钟后, 才听到飞机的声音。如果飞行高度为 1000 米, 求飞机飞行速度? (忽略音速 a 随高度变化。)

2.8 在超音速气流中有 A 、 B 两点, 分别测得 $\mu_A = 30^\circ$ 和 $\mu_B = 23^\circ 34'$, 试求此二点的静压比 p_A/p_B 。

2.9 某一翼型分别在图 2-25(a)、(b)、(c) 情况下:

(a) 吸气式风洞将海平面大气吸入风洞, 流过模型, 风洞实验段风速 $V = 60$ 米/秒;

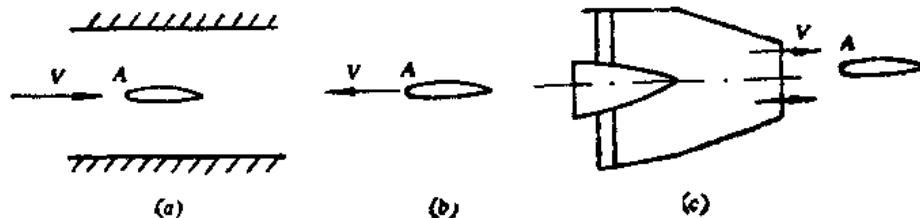


图 2-25

(b) 模型以速度 60 米/秒在海平面飞行;

(c) 吹气式风洞将海平面空气吹向模型, 风速 $V = 60$ 米/秒。

在以上三种情况下, 在 A 点模型与空气的相对速度均为 90 米/秒, 问在以上各种情况下, A 点的总压 p_0 各为多少? A 点的静压各为多少?

第三章 膨胀波与激波

物体在静止空气中以超过音速的速度前进时，或者物体不动，空气以超过音速的速度流过物体时，物体对流场的扰动和亚音速的情况不相同。在亚音速流场中，任何扰动要影响到全流场；在超音速流场中，扰动只能影响一部分流场。这就是超音速流场与亚音速流场的根本差别。由于气流的可压缩性，使扰动传播速度为有限值，因此在超音速流场中就出现扰动传播的局限性；在扰动源的扰动地区和未扰动地区之间出现了扰动界限波。

任何一个飞行器都具有一定尺寸而不是一个几何点，因此它的每一部分对气流都要产生扰动，扰动如用 $dp > 0$ 和 $dp < 0$ 来分，称为压缩扰动和膨胀扰动，相应的扰动界限波就有压缩波和膨胀波。压缩波有两种，一种波前、波后参数变化很小 ($dp \rightarrow 0$)，称为弱压缩波。另一种是波前、波后气流参数的变化为有限值，称为强压缩波，即为激波。

膨胀波和激波是超音速流场中两种最基本的扰动界限波，本章将研究它们的产生以及波前、波后气流参数的关系。

§ 3-1 超音速气流的小角转折

超音速气流流过物体或曲壁时，气流受到扰动改变方向。设方向改变极微，则扰动为微弱扰动。我们首先讨论平面流动情况。

设有流速为 V_∞ 的定常直匀超音速气流沿直壁 BO 由左向右流来，略去壁面摩擦作用。由于壁面在 O 点有微小的内凹角 $d\delta$ ，气流向内转折（即向气流内部转折）一个 $d\delta$ 角度，继续沿壁面流动，如图 3-1 所示。在图 3-2 中，由于壁面在 O 点有微小的外凸角 $d\delta$ ，气流向外

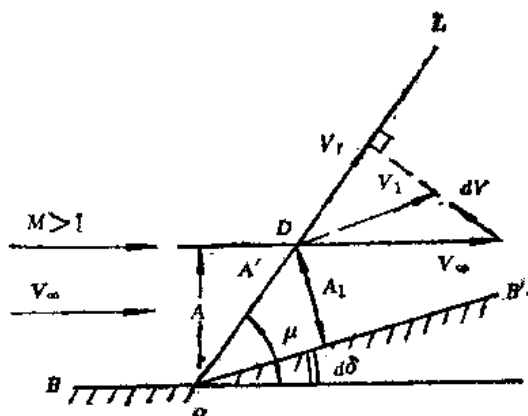


图 3-1

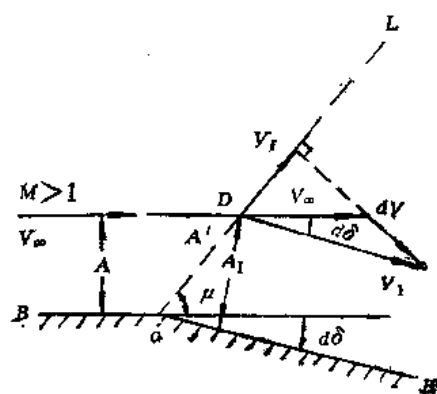


图 3-2

转折（即向气流外部转折）一个 $d\delta$ 角度，继续沿壁面流动。转折点 O 为扰动源，由于弱扰动在超音速气流中不能逆气流方向向前传播，所以气流流过 O 点时，将产生一弱扰动界限波 OL 。弱扰动界限波与波前气流的夹角为 μ ，并有

$$\sin \mu = \frac{1}{M}.$$

如前所述, 超音速气流中的弱扰动在空间是以球面波向外传播的, 而它的传播范围以扰动界限波为界, 通过扰动界限波气体参数才开始变化, 既然扰动传播以对称球面向四周传播, 那么气体质点的扰动速度 dv , 即气体受到扰动后速度增量必垂直于扰动球面波, 即垂直于扰动界限波。就是说气流通过 OL 时的切向分速并无改变。这一点我们可以通过在 OL 的扰动界限波中取一控制区, 用动量方程得到证明。

由图 3-2 中取扰动界限波 OL , 在波上取一控制区 “ $aabb$ ”, 见图 3-3 所示。“ aa ”与“ bb ”两截面之间无限接近, 且其在垂直波面方向的截面积为 1。波面前气流参数为 M_∞ , V_∞ , T_∞ , p_∞ , ρ_∞ 等。波后气流参数为 $M_1 = M_\infty + dM$, $V_1 = V_\infty + dV$, $T_1 = T_\infty + dT$, $p_1 = p_\infty + dp$, $\rho_1 = \rho_\infty + d\rho$ 等。气流经过此波后转折了 $d\delta$ 角。为了分析方便, 将速度 V_∞ , V_1 分解成两个方向, 一个平行 OL 波面, 一个垂直于 OL 。

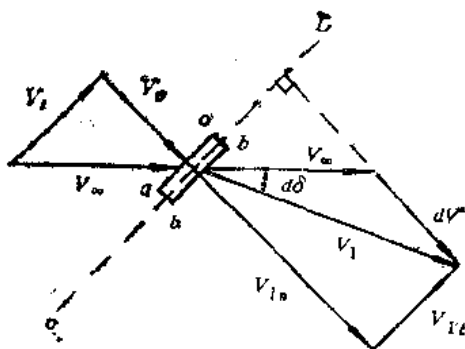


图 3-3

我们对控制区应用动量方程。

切向动量方程: 由于沿平行波面方向上没有压强变化, 因此作用在控制区 “ $aabb$ ” 表面上的合力在该方向上分量为零, 故有

$$mV_{1t} - mV_{it} = 0$$

即

$$V_{1t} = V_{it} \quad (3-1)$$

式中 $m = \rho_\infty V_{in}$ 表示单位时间内通过 OL 波面上的单位面积的气流质量。式 (3-1) 说明气流经过弱扰动界限波时, 在平行于波面方向上其分速 (即切向分速 V_t) 不变。

法向动量方程

$$mV_{1n} - mV_{in} = p_\infty - (p_\infty + dp)$$

$$m dV_n = -dp$$

注意到 $m = \rho_\infty V_{in}$ 代入上式

$$\rho_\infty V_{in} dV_n = -dp$$

$$V_{in} dV_n + \frac{dp}{\rho_\infty} = 0 \quad (3-2)$$

由连续方程可知

$$m = \rho_\infty V_{in} = (\rho_\infty + d\rho)(V_{in} + dV_n)$$

展开, 略去二阶小量

$$dV_n = -V_{in} \frac{d\rho}{\rho_\infty} \quad (3-3)$$

将式 (3-3) 代入式 (3-2) 得

$$V_{in}^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

注意到 $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$, 故有

$$\begin{aligned} V_\infty^2 &= a^2 \\ \text{即 } V_\infty &= a \end{aligned} \quad (3-4)$$

这说明弱扰动界限波前的气流法向分速必等于当地音速。从图 3-3 的速度矢量三角形中看出, dV 是垂直于 OL , 即经过弱扰动界限波 OL 只引起法向分速增量, 而切向分速不变。

气流向外转折时, 气流通道将要变化, 见图 3-2。来流的流量截面为 A , 通过波面 OL 后变为 A_1 , 其流管截面变化量 dA 为

$$\begin{aligned} dA &= A' \sin(\mu + d\delta) - A' \sin\mu \\ &= A' (\sin\mu \cos d\delta + \cos\mu \sin d\delta - \sin\mu) \end{aligned}$$

因为 $d\delta$ 很小, 故 $\cos d\delta \approx 1$, $\sin d\delta \approx d\delta$, 故有

$$\begin{aligned} dA &= A' \cos\mu d\delta \\ &= A \cot\mu d\delta \\ dA &= A \sqrt{M_\infty^2 - 1} d\delta \end{aligned} \quad (3-5)$$

可见气流受向外转折扰动后, 流管扩张, 气流将加速, 同时压强、温度、密度参数略有减小。所以这种情况的弱扰动界限波是膨胀波。同理, 气流向内折时, 气流通道也要变化, 见图 3-1 其流管截面变化量

$$dA = -A \sqrt{M_\infty^2 - 1} d\delta \quad (3-6)$$

气流受向内转折的扰动后, 流管收缩, 气流将减速, 同时压强、温度、密度参数略有增加。所以这种情况的弱扰动界限波是弱压缩波。

下面我们来确定, 气流绕小角转折后的压强增量、速度增量、密度增量及温度增量。先来确定气流通过膨胀波后的速度增量。根据式(2-65)可知

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

将式(3-5) $dA = A \sqrt{M_\infty^2 - 1} d\delta$ 代入上式, 得

$$\frac{dV}{V_\infty} = \frac{d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-7)$$

式(3-7)是超音速气流流过微小外凸角 $d\delta$ 后, 膨胀波前后的流速增量关系式。根据微分形式的动量方程 $\rho V dV = -dp$ 改写为

$$dp = -\rho V^2 \frac{dV}{V}$$

将式(3-7)代入上式, 消去 $\frac{dV}{V}$ 得

$$dp = -\frac{\rho_\infty V_\infty^2 d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-8a)$$

设 $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$, 则上式为

$$dp = -\frac{2q_\infty d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-8b)$$

根据音速公式 $\frac{dp}{d\rho} = a^2$, 式(3-8a)可写成

$$d\rho = -\frac{\rho_\infty M_\infty^2 d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-9)$$

根据状态方程

$$p = R\rho T$$

微分得

$$dp = R(\rho dT + T d\rho)$$

将式(3-8a)、式(3-9)代入上式

$$-\rho_\infty V_\infty^2 \frac{d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = R\rho_\infty T_\infty \left(\frac{dT}{T_\infty} - \frac{M_\infty^2 d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right)$$

或

$$-\left(\frac{kV_\infty^2}{kRT_\infty} - M_\infty^2 \right) \frac{d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{dT}{T_\infty}$$

即

$$dT = -(k-1)T_\infty M_\infty^2 \frac{d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-10)$$

式(3-8)、(3-9)、(3-10)说明超音速气流通过微小外凸角 $d\delta$ 后, 即通过膨胀波后, 气流各参数的增量的数学关系式。同理, 超音速气流通过微小内凹角 $d\delta$ 后, 气流各参数增量的数学关系式为

$$\frac{dV}{V_\infty} = -\frac{d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-11)$$

$$dp = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-12)$$

$$d\rho = \frac{\rho_\infty M_\infty^2 d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-13)$$

$$dT = (k-1)T_\infty M_\infty^2 \frac{d\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (3-14)$$

由上式可以看出小角转折引起的气流各参数的增量与转折角 $d\delta$ 成正比。这是因为 $d\delta$ 愈大, 流管截面变化 dA 愈大, 速度增加(减小)也愈多, 因此压强、密度、温度降低(增加)愈多。上述公式不能直接应用于超音速气流的大角转折。

§ 3-2 超音速气流的大角向外转折

如图 3-4 所示, 壁面在 O 点之后某点 O' 处又外折了 $d\delta$ 角。根据上述的道理在 O' 又产生一膨胀波 $O'L'$ 。它与 V' 的夹角为 $\mu' = \sin^{-1} \frac{1}{M'}$ 。值得注意的是, 由于 V' 较 V_1 已向外折了 $d\delta$ 角, 并且 $\mu' < \mu_1$ (因为 $M' > M_1$)。故 $O'L'$ 较 OL 更为倾斜。

如壁面不是外折一有限小角度 $d\delta$, 而是向外转折一有限大小的角度 δ , 如图 3-5 所示。那么我们可以把它认为是壁面上许多微小折角间的距离 OO' 缩短为一点形成的。可以这样看的原因是后面的膨胀波总是比前面的更为倾斜, 当各折角间距离缩为零时后面的膨胀波不会影响前面的膨胀波。根据上述讨论, 当超音速气流流过一外折 δ 角的壁面时, 由图 3-5 可

知, 在 L_1OL_2 区中形成无数多个膨胀波。气流通过 L_1OL_2 区连续地加速。由 V_1 连续地增加到 V_2 。相应地马赫数、压强、密度等参数和来流相比较都有一定量的变化。第一道膨胀波与 V_1 的夹角为 $\mu_1 = \sin^{-1} \frac{1}{M_1}$, 最后一道膨胀波与 V_2 的夹角为 $\mu_2 = \sin^{-1} \frac{1}{M_2}$ 。 L_1OL_2 区

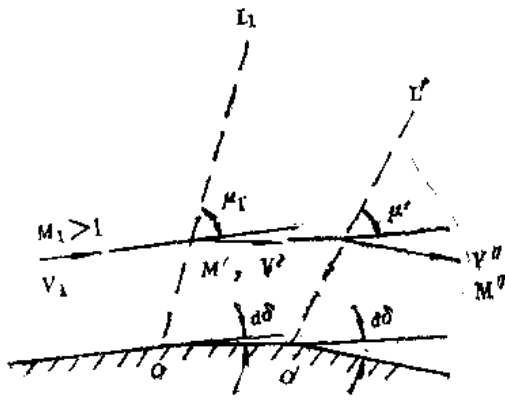


图 3-4

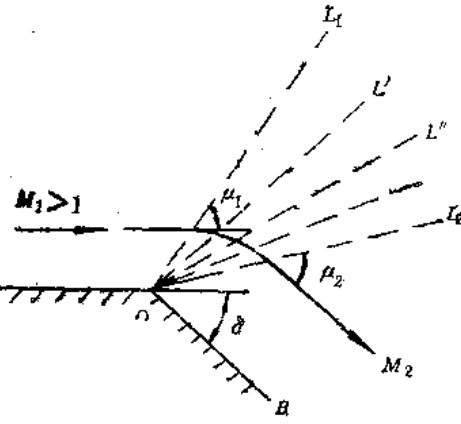


图 3-5

称为膨胀区。由于变化是连续的, 且不考虑粘性作用, 气体质点间也没有显著的热传导发生, 所以膨胀过程中, 气体所进行的变化是等熵变化。气流通过这一系列的膨胀波, 尽管气流参数有较大变化, 但其变化是连续的。

下面我们来建立气流通过外折角 δ 后参数的关系式。式 (3-7) 是气流通过任一条膨胀波后, 速度变化量与外折角之关系:

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\delta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (3-15)$$

为便于积分, 我们把上式左端改写成 M 的关系式, 考虑到

$$a_0^2 = a^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

对上式取对数

$$2 \ln a_0 = 2 \ln a + \ln \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

然后进行微分, 因是等熵变化, a_0 在流动中是不变常数, 于是得到

$$\frac{da}{a} = - \frac{\frac{k-1}{2} M dM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (3-16)$$

另外将 $V = Ma$ 亦先取对数再微分, 得到

$$\frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M} \quad (3-17)$$

将式 (3-15) 与式 (3-16) 代入式 (3-17) 得

$$\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} d\delta = \frac{-\frac{k-1}{2} M dM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} + \frac{dM}{M}$$

$$d\delta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \frac{dM}{M} \quad (3-18)$$

这就是气流马赫数变化与外折角 $d\delta$ 的关系。现在气流由原始的 M_1 加速到 M_2 ，而壁面折角由 0 变到 δ ，因此对式(3-18)进行积分时其上下限为

$$\int_0^\delta d\delta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

积分结果为（推导详见附录 1）

$$\begin{aligned} \delta = & \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_2^2-1)} - \arctg \sqrt{M_2^2-1} \\ & - \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_1^2-1)} + \arctg \sqrt{M_1^2-1} \end{aligned} \quad (3-19)$$

我们只要知道来流 M_1 和壁面折角 δ 就可以从上式中计算出 M_2 来。气流在膨胀区所进行的变化是等熵变化过程，所以若 M_2 已知，即可求出其它参数，即

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{p_0}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \\ \rho_2 &= \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}}} \\ T_2 &= \frac{T_0}{1 + \frac{k-1}{2}M_2^2} \\ V_2 &= M_2 \sqrt{kRT_2} \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

式中 p_0 、 ρ_0 、 T_0 分别为总压、总密度、总温，在等熵流中它们是不变的，即膨胀前后为同一数值。当 p_1 、 ρ_1 、 T_1 及 M_1 给定后，它们都可计算出。

如果原始气流为音速流，即 $M_1=1$ （或 $\lambda_1=1$ ）。式(3-19)可以写为

$$\delta^* = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_2^2-1)} - \arctg \sqrt{M_2^2-1} \quad (3-21)$$

式(3-21)是音速气流转折 δ^* 角膨胀加速到 M_2 所服从的关系式。在使用上有时需用速度系数 λ 表示，将上式换成 λ 即为

$$\delta^* = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}} \right) - \arctg \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}} \quad (3-22)$$

由前面第二章知道，当气流 $\lambda = \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ 时，气流的压强，温度，密度都降到零了。即处于真空状态，以后气流就不可能膨胀了。当 $\lambda = \lambda_{\max}$ 时，对应的折角就达到了最大值 $\delta = \delta_{\max}$ 。将 $\lambda = \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ 代入式(3-22)可求得 $\delta_{\max}$ ，即

$$\delta_{\max} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2} \quad (3-23)$$

对于空气来说 $k=1.4$, 即 $\lambda_{\max}=2.45$, $\delta_{\max}=130^{\circ}27'$ 。这说明, $M=1$ 的气流最大膨胀折角为 $130^{\circ}27'$ (见图 3-6)。此时膨胀成真空了。事实上一直膨胀到 $\lambda_{\max}$ 的流动是不可能存在的。因为随着 λ 的上升, 气流的静温在不断下降, 气体静温在降到绝对零度之前, 早就凝结液化了。一液化, 气体状态方程就不成立了。不过我们仍不妨把这种极限情况当一种参考量。

实用上将式 (3-21) 或式 (3-22) 制成数值表, 以便查阅, 见表 3-1。

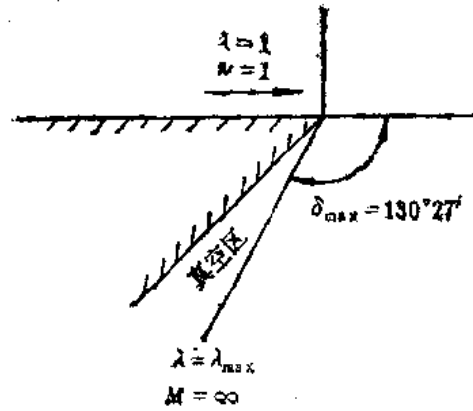


图 3-6

表 3-1 超音速气流绕外凸角流动数值表

$K=1.4$

δ	μ	M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0
0	90.00°	1.000	0.528	0.634	0.833
1°	87.57°	1.082	0.479	0.591	0.810
2°	82.00°	1.133	0.450	0.565	0.795
3°	58.18°	1.177	0.425	0.543	0.783
4°	55.21°	1.218	0.403	0.522	0.771
5°	52.74°	1.257	0.383	0.504	0.760
10°	44.18°	1.435	0.299	0.422	0.708
15°	38.55°	1.605	0.234	0.354	0.680
20°	34.20°	1.775	0.161	0.295	0.613
25°	30.85°	1.950	0.138	0.243	0.568
30°	27.95°	2.134	0.104	0.198	0.523
36°	25.43°	2.329	0.078	0.159	0.480
40°	23.21°	2.538	0.056	0.128	0.437
45°	21.21°	2.764	0.039	0.098	0.395
50°	19.39°	3.013	0.027	0.075	0.355
60°	16.16°	3.594	0.012	0.041	0.279
70°	13.33°	4.339	0.004	0.020	0.208
80°	10.78°	5.348	0.001	0.009	0.149

对于从 $M_1=1$ 开始膨胀加速的气流, 可根据 δ 角, 直接查出膨胀后气流各参数。对于从 $M_1 > 1$ 开始膨胀加速气流, 查表可分为两步进行。第一步假想气流的 M 数由 1 增大为 M_1 , 查出一个假想的转折角 δ_1 ; 第二步, 根据实际转折角与假想转折角之和 $(\delta_1 + \delta)$, 查出膨胀波

后气流 M 数和压强比等。

例 有一股 $M_1 = 1.605$ 的超音速气流沿壁面流动，在 O 点壁面外折了 $\delta_2 = 20^\circ$ ，若来流 $p_1 = 0.8$ 大气压，求气流膨胀后马赫数 M_2 和压强 p_2 ，见图 3-7。

解 (1) 先找出由 $M = 1$ 膨胀到 $M_1 = 1.605$ 的角度 δ_1 ，从表 (3-2-1) 找得 $\delta_1 = 15^\circ$ ；

(2) 再算出由 $M = 1$ 膨胀到 M_2 的总转折角 δ ；

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 15^\circ + 20^\circ = 35^\circ$$

(3) 求 M_2 ， p_2 ，

由 $\delta = 35^\circ$ 查表 3-1 得

$$M_2 = 2.329;$$

由 $M_1 = 1.605$ 查表 3-1 得 $p_1/p_0 = 0.234$ ；

由 $M_2 = 2.329$ 查表 3-1 得 $p_2/p_0 = 0.076$ 。

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p_0} \right) \left(\frac{p_0}{p_1} \right) p_1 = 0.076 \times \frac{1}{0.234} \times 0.8 = 0.26 \text{ (大气压)}$$

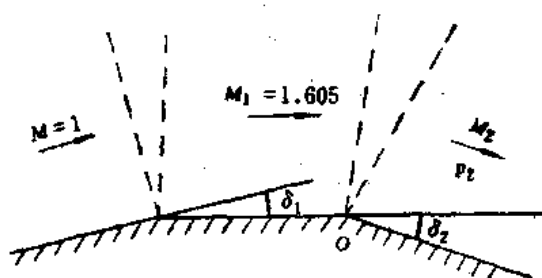


图 3-7

§ 3-3 激 波

我们分析了气流通过膨胀波的过程，是一个等熵过程，气流参数发生连续变化。当压缩扰动量增大后，压缩波会积聚在一起形成激波。气流通过激波后，气流参数将发生突跃的变化，从数学上来看，它是一个不连续面。本节讨论激波的形成、种类和波前后参数的关系。

一、激波的形成

先看一个简单的例子，活塞在长管中的压缩。假定有一根长的管子，管子左端有一活塞。管内是静止的气体，气体质点运动速度原为零，其它参数为 p_1 、 ρ_1 、 T_1 。活塞从静止起，向右运动速度不断增大： Δv ， $2\Delta v$ ， $3\Delta v$ ……，则对管内气体将引起一系列压缩扰动，如图 3-8 所示。受压缩扰动后的气体， p 、 ρ 、 T 都会增大。由于后一扰动处于已被前一扰动影响后的气体中，因此扰动传播速度 a 是不同的。设依次扰动传播速度为 a_1 、 a_2 、 a_3 ……，则根据 $a = \sqrt{kRT}$ ， a 随 T 的增大而增大，由于压缩波后温度 T 增大，因此 $a_1 < a_2 < a_3$ ……。就是说，后一扰动的传播速度大于前一扰动传播速度。正象通常所说的“后浪赶前

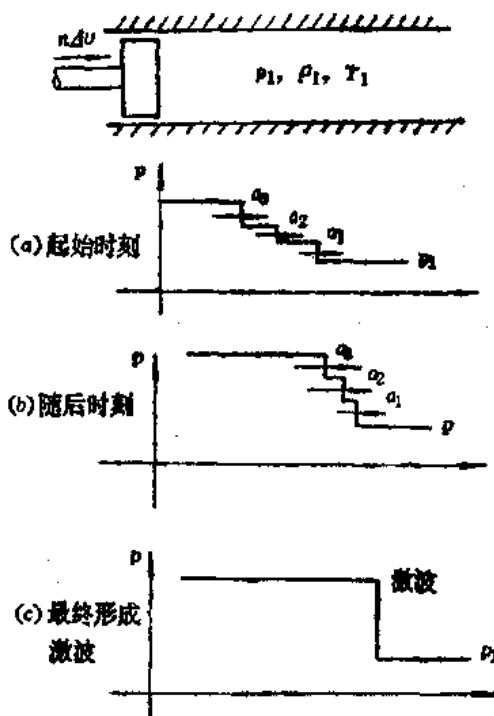


图 3-8

浪”，结果扰动波逐渐密集，最后形成无数微弱扰动波叠加而成的突跃面，称为激波。由上述例子可见，激波是由很多弱压缩波叠加而成，每一个弱压缩波使 p 、 ρ 、 T 发生微小的变化，无穷多微小的变化相加就成为突跃变化。这是一个由量变到质变的过程。因激波前后的 p 、 ρ 、 T 的变化为一有限值，由式(2-37)可知，使气流参数具有有限值变化的压缩波向前传播速度大于音速，激波前后的压强比愈大，传播速度 u 愈大。

由实验可知，在一般情况下激波厚度很小，是和分子自由程属于同一量级的数，与一般所讨论的物体尺寸相比小到可忽略不计。因此可以把激波看成是没有厚度的突跃面来处理，通过这个面的 p 、 ρ 、 T 的变化是急剧的，就是说 p 、 ρ 、 T 的变化是突跃变化，而不是连续变化。在数学上通常认为激波是一不连续面。

可见激波，不是弱压缩波，而是使气流参数具有有限值变化的压缩波，它以超过音速的速度向前传播。它是强压缩扰动的界限波。若将坐标固定在激波上，便得到超音速气流通过静止激波的情况。可见只有在超音速流场中，气流受到压缩扰动，才有可能出现稳定的激波。它的形成是由于物体前方气流受到压缩，这种压缩扰动波在传播过程中迅速集中，叠加成为激波，当激波的传播速度恰等于气流在波的传播方向的分速时，它便相对于物体不动了，如图 3-9 所示。

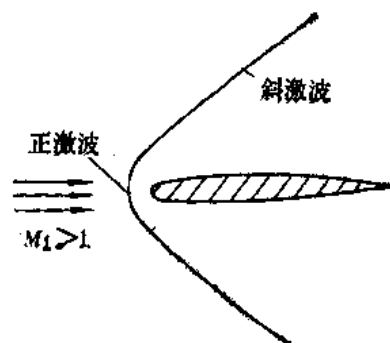


图 3-9

超音速气流流过凹角（向内转折）将产生激波，见图 3-10。如果折角 δ 无限微小，凹角的顶点 A 对气流产生一弱的压缩扰动，扰动的界限波为弱压缩波。弱压缩波的倾角为马赫角 $\mu_1 = \sin^{-1} \frac{1}{M_1}$ 。如果物面有两个连续微小转折，则将产生两道弱压缩波。由于压缩波后

气流速度与马赫数降低，因此后一道弱压缩波的马赫角 $\mu_2 = \sin^{-1} \frac{1}{M_2}$ 将大于前一道弱压缩

波的马赫角，即 $\mu_2 > \mu_1$ 。因此，这两道波必然会在气流中某处相交，形成压缩强度增大的波。如果转折点很多，见图 3-10 中的 A 、 B 、 C ……，则最后形成压缩波强度必然很大，这就是激波。如果这些转折点又无限接近，结果形成一个有限大的转折角，则激波将在这个转折角的顶点开始，见图 3-11。这再一次说明，激波是无数弱压缩波的叠加。超音速气流遇到有限大的压缩扰动时，就会产生激波。

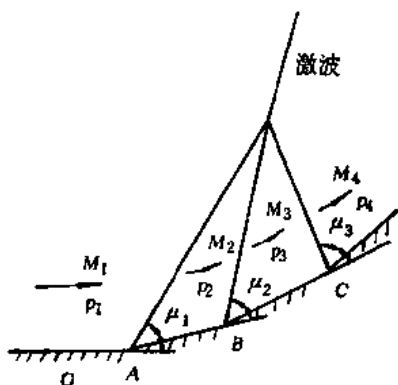


图 3-10

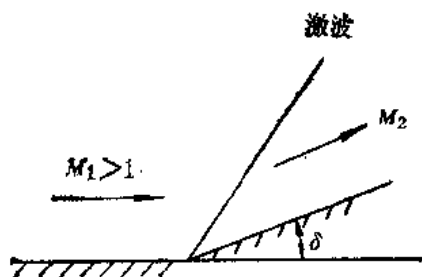


图 3-11

二、激波的种类

飞机在空气中以超音速飞行时，相当于气流以超音速流过飞机，因此在机身和机翼前部气流受到阻滞，即不断受到压缩而形成激波。随着飞机外形与飞行马赫数的不同，激波形状也是不同的。图 3-12 所示。

图 3-12 中的 (a), (b) 激波称为离体激波, (c) 为附体激波。

激波面与运动方向垂直的部分称为正激波, 见图 3-12 中的 (a), (b) 的局部一小部分; 与运动方向不垂直的部分称为斜激波。可用激波角 (即激波与未扰气流方向所夹锐角) 来表示。

当激波角 $\beta < \frac{\pi}{2}$ 时, 称为斜激波。 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时称为正激波, 如图 3-13 所示。正激波是斜激波的特例。

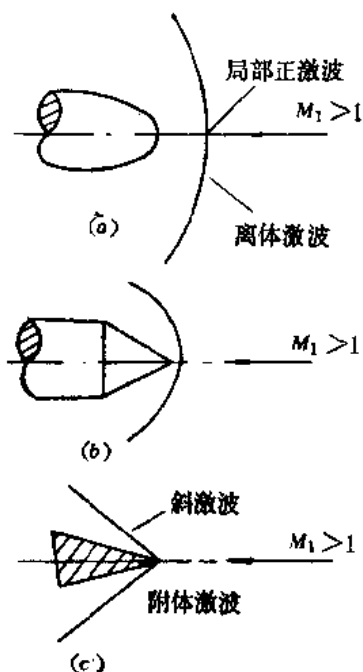


图 3-12

激波可以是平面 (见图 3-12 中 (c)), 也可能是曲面 (见图 3-12 中 (a), (b)) 或锥面 (见图 3-23)。但任何曲面均可以看作是由极小的平面组成的, 而每个小平面又可看作是与激波角 β 相同的平面激波上的一部分。因此我们将着重讨论平面激波的问题, 讨论气流通过平面激波 ($\beta < \frac{\pi}{2}$ 或 $\beta = \frac{\pi}{2}$) 前后各气流参数的变化规律。

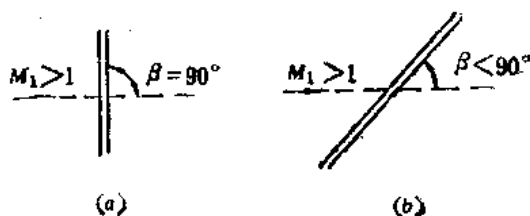


图 3-13

三、正激波

先讨论超音速气流通过正激波的情况, 确定正激波前后各气流参数之间关系式。

为了研究方便, 把激波看成是固定的, 而激波前的气流为超音速定常流, 这和飞机模型在超音速风洞中的实验情况一样。

1. 基本方程

设激波前的流动参数为 $M_1, p_1, \rho_1, T_1, V_1$; 激波后的流动参数为 $M_2, p_2, \rho_2, T_2, V_2$, 见图 3-14 所示。在激波前后取一矩形控制区 “aabb”, 为方便起见 aa 长度取为 1, 控制区在垂直纸面方向的长度也取为 1, 即垂直到流动方向的截面积为 1。现对控制区写出质量方程, 动量方程和能量方程。

(1) 质量方程 对定常流, 单位时间内流进 aa 面的流量等于流出 bb 面的流量, 故可写

出

$$m = \rho_1 V_1 \cdot 1 = \rho_2 V_2 \cdot 1 \quad (3-24)$$

(2) 动量方程 在流动方向应用动量方程。单位时间内流出控制区的动量减去流入动量必等于作用在控制区表面的合力在此流动方向上的分力, 即

$$p_1 - p_2 = m(V_2 - V_1) \quad (3-25)$$

将式(3-24)代入, 上式可写为

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (3-26)$$

(3) 能量方程 气流经过正激波, 假设其热力过程可视为绝热过程, 即波前波后的总温不变, 即

$$T_{01} = T_{02}$$

故能量方程可写为

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3-27)$$

式(3-24)、(3-25)、(3-26)三方程中, p_1, ρ_1, V_1 为已知量, p_2, ρ_2, V_2 为未知量, 三个方程可求解出三个未知数。若要进一步求激波后的静温 T_2 , 则需利用气体状态方程。

(4) 状态方程:

$$p_2 = \rho_2 R T_2 \quad (3-28)$$

2. 正激波前后的压强比与密度比

气体经正激波为突跃压缩, 此时的压强与密度的关系, 可由式(3-24)、(3-25)、(3-26)中得到。

由式(3-25)可得

$$V_2 - V_1 = \frac{p_1}{m} - \frac{p_2}{m}$$

两边乘以 $(V_2 + V_1)$, 则得

$$V_2^2 - V_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{V_1}{m} + \frac{V_2}{m} \right)$$

注意到式(3-24), 上式写为

$$V_2^2 - V_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

由式(3-27), 我们又得到

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

可见, 以上二方程式的右侧项相等, 即

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

将上式两端同乘以 $\frac{\rho_2}{p_1}$, 得到

$$\left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1 \right) = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{p_2}{p_1} \right)$$

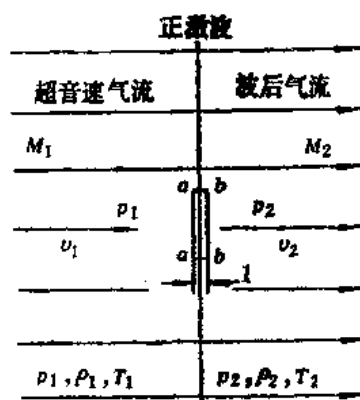


图 3-14

经过整理后, 就得到

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (3-29)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}} \quad (3-30)$$

这就是气流经过正激波突跃式绝热压缩时的压强比和密度比的关系式。利用状态方程

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

将式(3-30)代入上式得

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{p_2}{p_1} \left(1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{p_2}{p_1} \right)}{\frac{k-1}{k+1} + \frac{p_2}{p_1}} \quad (3-31)$$

这就是气流经过正激波受到突跃绝热压缩时的温度比与压强比关系式。

等熵变化时的压强比与密度比关系由式(2-39)可知

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad (3-32)$$

而等熵变化时的温度比与压强比关系式为

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (3-33)$$

根据式(3-29)及式(3-32)画成曲线, 如图 3-15 所示; 根据式(3-31)及式(3-33)画成曲线, 如图 3-16 所示。由曲线可见:

(1) 经过激波, 气流受到突跃式压缩, 它是绝热压缩, 不是等熵压缩。等熵压缩时, 当 $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \infty$, 但激波绝热压缩时, 当 $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{k+1}{k-1} = 6$ (空气 $k = 1.4$)。这是因为激波压缩时, 气体本身粘性

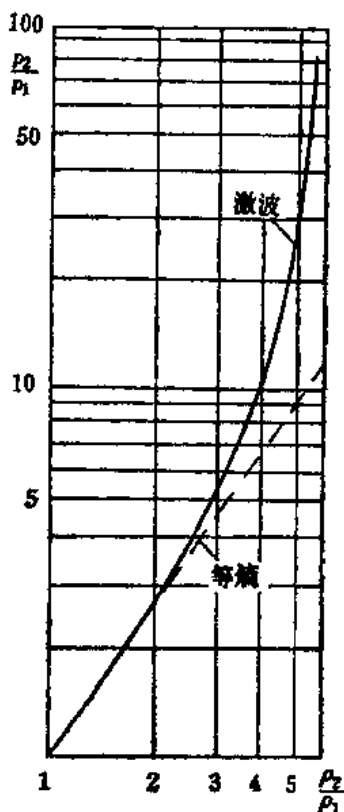


图 3-15

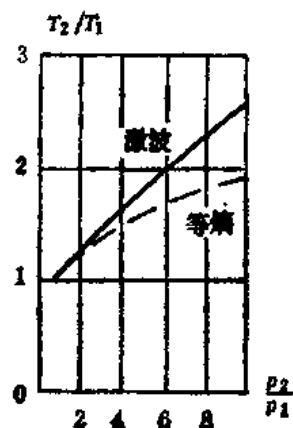


图 3-16

在起作用（因通过激波，速度变化剧烈，即速度梯度很大，所以粘性作用就显著起来）。对于同一个压强比，粘性摩擦所产生的热使得激波压缩后的温度比等熵压缩为高（见图3-17），因而密度的增加就要少一些。压强比越大，温度升高得也越多，终于完全抵消了密度增加的趋势，即 $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ 比等熵压缩值为小，趋于某一极限值。

(2) 当激波很弱时，即 $\frac{p_2}{p_1}$ 、 $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ 接近于 1，激波压缩和等熵压缩差别不大。可见对于较弱的激波，我们可以近似地把它看成是等熵压缩过程（注意这一点，将在近似求超音速机翼、机身的空气动力时要用到）。

3. 正激波前后的速度关系及其它参数关系

由式(3-24)与式(3-25)可得

$$V_2 - V_1 = \frac{p_1}{m} - \frac{p_2}{m} = \frac{p_1}{\rho_1 V_1} - \frac{p_2}{\rho_2 V_2} \quad (3-34)$$

由式(3-27)

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2(k-1)} a_*^2$$

可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_1^2 \\ \frac{p_2}{\rho_2} &= \frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

把式(3-35)代入式(3-34)，得

$$V_2 - V_1 = \frac{k+1}{2k} a_*^2 \left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} \right) - \frac{k-1}{2k} (V_1 - V_2)$$

经整理后，得到

$$(V_2 - V_1) \left(\frac{k+1}{2k} a_*^2 \frac{1}{V_1 V_2} + \frac{k-1}{2k} - 1 \right) = 0$$

由于气流经过正激波，速度必然变化，即 $V_1 \neq V_2$ ，故上述方程的解应为

$$\frac{k+1}{2k} a_*^2 \frac{1}{V_1 V_2} + \frac{k-1}{2k} - 1 = 0$$

整理后得到

$$V_1 V_2 = a_*^2 \quad (3-36)$$

因为 $\lambda = \frac{V}{a_*}$ ，故上式可写成

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (3-37)$$

式(3-37)表明，超音速气流($\lambda_1 > 1$)经过正激波后变为亚音速气流，即 $\lambda_2 < 1$ 。式(3-37)给出的是正激波前后 λ_1 与 λ_2 之间关系。有时我们需要用激波前后 M_1 与 M_2 之间关系。为此，只需利用式(3-36)两边分别除以 $a_1 a_2$ 得

$$\frac{V_1 V_2}{a_1 a_2} = \frac{2}{k+1} \frac{a_0}{a_1} \frac{a_0}{a_2}$$

两边平方

$$M_1^2 M_2^2 = \left(\frac{2}{k+1} \right)^2 \left(\frac{a_0}{a_1} \right)^2 \left(\frac{a_0}{a_2} \right)^2$$

由能量方程可知

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2 = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2$$

$$\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2 = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2$$

代入上式化简得

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}} \quad (3-38)$$

将式(3-38)画成曲线,如图3-17所示。从该图线可以看到, M_1 由1增加时, M_2 由1逐渐减少;当 M_1 趋于无限大时, M_2 的极限值是 $\sqrt{\frac{k-1}{2k}} = 0.378$ ($k=1.4$)。这表明波前 M

越大,正激波对超音速气流阻滞作用越强, M_2 就越小。反之,波前 M_1 数接近1时,波后 M_2 也接近1,此时正激波对超音速气流的阻滞作用很弱。

由式(3-24)得

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1^2}{V_1 V_2} = \frac{V_1^2}{a_2^2} = \lambda_1^2$$

或

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2} \quad (3-39)$$

把式(3-39)代入到式(3-29),经过整理后,可得

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (3-40)$$

利用式(3-39)与式(3-40),可求得正激波前后温度比公式

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right) \frac{(k-1)M_1^2 + 2}{(k+1)M_1^2}$$

化简后得

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1 \right) \left[1 + \frac{2}{(k-1)M_1^2} \right] \quad (3-41)$$

由式(3-38)至式(3-41)可见,只要知道正激波前 M_1 值, k 值及 p_1 , ρ_1 , T_1 ,就可求得波后 M_2 , p_2 , ρ_2 , T_2 。

气流经过正激波是绝热过程,总温不变,但其总压要变化。波后总压与波前总压之比称为总压恢复系数,用 σ 表示,即

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} \quad (3-42)$$

把上式改写一下为

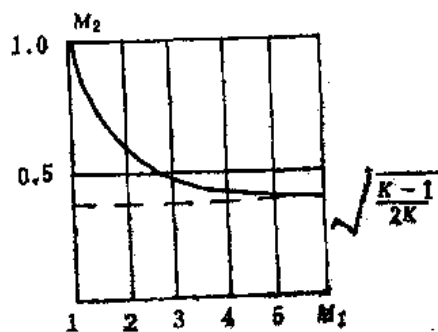


图 3-17

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_{01}}$$

因

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

再应用式(3-38)和式(3-40)，经过整理，得到

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \left[\frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (3-43)$$

把式(3-43)的 σ 与 M_1 的关系画成曲线，如图3-18所示。由图可见， σ 值总是小于1，而且随 M_1 值增加而迅速下降。这说明气流经过正激波总压有损失。

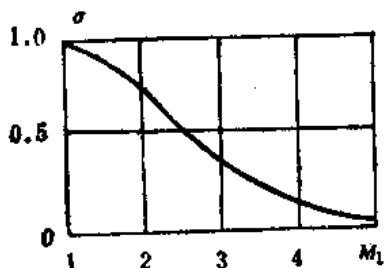


图 3-18

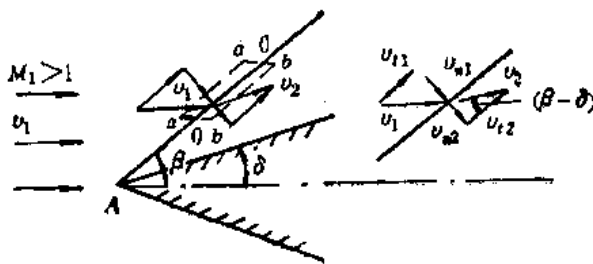


图 3-19

四、斜激波

1. 基本方程

如超音速气流沿如图3-19所示的内折壁面流动，那么在壁面折点A处要产生斜激波。脚注“1”表示斜激波前的气流参数，脚注“2”表示斜激波后的气流参数。在斜激波前后取一控制区“aabb”，控制区的边界与斜激波面相交于O点，aO平行来流 V_1 ，Ob平行 V_2 （即平行壁面），aa与bb都平行斜激波波面。为方便起见，取 $aa=bb=1$ ，控制区在垂直纸面方向的长度也取为1，即垂直流动方向的截面积为1。现对控制区写出质量方程、动量方程和能量方程。

(1)质量方程 对定常流，单位时间流进控制区的物体质量为 $\rho_1 V_{n1} \cdot 1$ ， V_{n1} 为来流 V_1 在垂直激波波面方向的分速。单位时间流出控制区的质量为 $\rho_2 V_{n2} \cdot 1$ ， V_{n2} 为波后速度 V_2 在垂直波面方向的分速。故质量方程

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (3-44)$$

(2)动量方程 动量方程可分为法向（垂直激波波面）和切向（平行激波波面）两个。

法向动量方程

$$\rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2 = p_1 - p_2 \quad (3-45)$$

由于沿激波面方向没有压强差，故切向动量方程为

$$\rho_2 V_{n2} V_{t2} - \rho_1 V_{n1} V_{t1} = 0 \quad (3-46)$$

注意到式(3-44)，上式可得

$$V_{t1} = V_{t2} \quad (3-47)$$

式(3-47)说明，气流经过斜激波时只有法向分速发生突跃，而切向分速保持不变，就这个意义来说，斜激波就是法向分速产生突跃的正激波。气流经过斜激波法向分速突然减小，故波后气流方向发生突然转折（速度 V_2 是 V_{n2} 与 V_{t2} 之向量和）转折后沿壁面流去。

(3) 能量方程,

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3-48)$$

将 $V_1^2 = V_{n1}^2 + V_{t1}^2$, $V_2^2 = V_{n2}^2 + V_{t2}^2$ 代入能量方程, 并注意到 $V_{t1} = V_{t2}$, 则有

$$\frac{V_{n1}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{n2}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3-49)$$

将斜激波的基本方程式(3-44)、(3-45)、(3-49)与正激波的基本方程式(3-24)、(3-25)、(3-26)进行比较, 便可看出只要把正激波基本方程中的 V_1 , V_2 换成 V_{n1} , V_{n2} 就是斜激波的基本方程。所以只要把正激波的波前波后气流参数之间关系式中的 M_1 换成 $M_{n1} = M_1 \sin \beta$, M_2 换成 $M_{n2} = M_2 \sin(\beta - \delta)$ 就成了斜激波波前波后气流参数之间的关系式了。据此即可写出以下各关系式

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{k-1}{k+1} \quad (3-50)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(k-1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \quad (3-51)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 \sin^2 \beta - 1 \right) \left(\frac{2}{k-1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + 1 \right) \quad (3-52)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{k-1}{k+1} \right)^{-\frac{1}{k-1}} \left[\frac{(k+1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(k-1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (3-53)$$

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \delta) = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}{k M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{k-1}{2}} \quad (3-54)$$

激波角 β 和物面转折角 δ 之间关系可推导出 (详见附录 2)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{\left[M_1^2 \left(\frac{k+1}{2} - \sin^2 \beta \right) + 1 \right] \operatorname{tg} \beta} \quad (3-55)$$

在绝能流中, $T_{01} = T_{02}$, 故

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}$$

将上式代入式(3-52), 解出 M_2^2 可得

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 \sin^2 \beta - 1} + \frac{\frac{2}{k-1} M_1^2 \cos^2 \beta}{M_1^2 \sin^2 \beta + \frac{2}{k-1}} \quad (3-56)$$

2. 激波图线

许多问题是给定了 M_1 和气流折角 δ , 计算激波的激波角 β 和波后 M 数及其它一切气流参数。每次按 M_1 和 δ 代入式(3-55)中求 β 是极不方便的。在工程上已把上述斜激波这一套公式制成曲线, 称为激波图线。如图 3-20(a)(b)(c)(d) 所示。分别画出了 β 、 M_2 、 $\frac{p_2}{p_1}$ 、

σ 随 M_1 及 δ 变化的曲线。在这些图线中，把正激波 ($\beta = 90^\circ$)，马赫波 ($\beta = \arcsin \frac{1}{M_1}$)

作为特殊情况包括在内。这两种情况，都是斜激波的极限情况。

下面我们来讨论这些图线：

(1) 由图 3-20(a) 可见，给定一个 M_1 值，在同一个 δ 下对应二个 β 值，激波角 β 较大的是强激波，激波角 β 较小的是弱激波。实际观察表明，超音速气流流过楔形体产生附体激

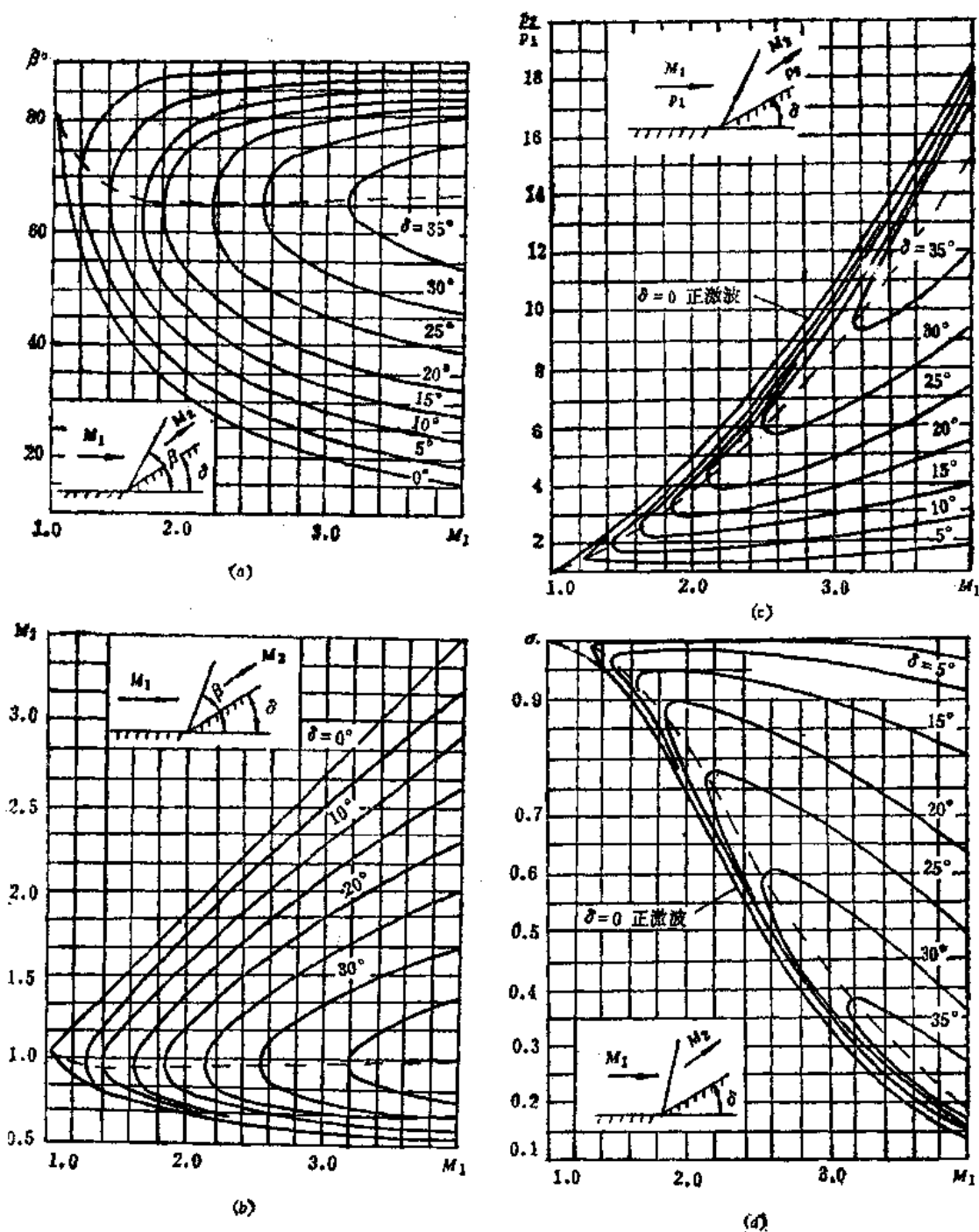


图 3-20

波时,产生的是弱激波。故激波角 β 应取较小的值。在机翼机身的绕流问题中出现的大都是弱激波。下面我们只讨论弱激波情况。

由图 3-20(a)我们可看到,激波角随波前气流 M 数的增大而减小,随气流转折角 δ 的增大而增大。

由图 3-20(a)我们还可以看到,在给定 δ 下,对应着一个最小的 M_1 ,例如 $\delta=10^\circ$ 时,气流最小 $M_1=1.42$ 。如 $M_1<1.42$,而 δ 仍为 10° ,则图中查不到解答,即找不到解答,也就找不到相应的激波角 β ,这是因为此时斜激波已变为离体激波了。反之在给定的 M_1 下,对应着一个最大 δ 角,记为 $(\delta_{\max})_{M_1}$ 。例如 $M_1=1.42$, $(\delta_{\max})_{M_1}=10^\circ$,如 $\delta>10^\circ$,而 M_1 仍为 1.42,则图中也查不到解答,这时斜激波已变成离体激波。所以在 $M_1=1.42$ 时,附体激波最大气流转折角为 10° 。综上所述,要使楔形体保持有附体激波,对于每个气流转折角,都存在一个最小的波前气流 M 数,对于每一个波前 M 数,都存在一个最大的气流转折角 $(\delta_{\max})_{M_1}$ 。图 3-20(a)中的虚线是对应各个气流转折角的最小 M 数连线,也是对应于各个波前 M 数的最大气流转折角的连线。

离体激波是一种曲线激波,如图 3-21 所示。激波角 β 沿着激波是变化的。在头部附近, $\beta=\pi/2$,即是正激波,故在对称线附近激波以后有一亚音速区。沿波面向两侧激波角逐渐减小,激波强度减弱,在离物体较远处,激波退化为马赫波。

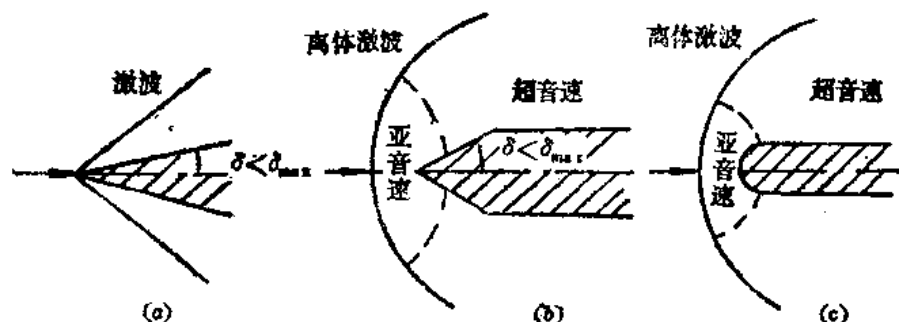


图 3-21

(2)由图 3-20(b)可见,当气流转折角 δ 为定值时,在弱激波条件下,波后 M 数随激波前 M 数增大而增大(图中虚线以上是对应弱激波解,以下是对应强激波解)。由图还可看出,超音速来流通过斜激波后,波后气流基本上是超音速,只有在虚线与 $M_2=1$ 线之间这区域,出现亚音速。

(3)图 3-20(c)可见,激波前后压强比随波前气流 M 数的增大而增大。通常用压强比 (p_2/p_1) 来表示激波强度。 (p_2/p_1) 大于 1 越多,说明激波越强; (p_2/p_1) 越接近 1,说明激波越弱。同时我们由图可看出,在激波前气流 M 数相同情况下,正激波的激波强度较斜激波强。这是因为气流以 M_1 产生斜激波相当于以 $M_1\sin\beta$ 气流产生的正激波,故在同一 M_1 数下斜激波比正激波为弱。

(4)由图 3-20(d)可见,气流转折角 δ 为定值时,总压恢复系数 σ 随波前气流 M 数的增大而减少。给定 M_1 情况下,气流经过正激波的总压恢复系数 σ 比经过斜激波的小。这说明气流经过正激波,机械能损失大。为了提高飞行器性能,千方百计地减少这种损失,为此超音速飞行器的头部变尖,机翼变薄,尽量使正激波变成斜激波,以减少机械能损失。

运用这些图线可以方便地进行激波倾角和气流参数计算。举例说明其应用。

例 M 数等于 2.5 超音速气流, 流过半顶角为 20° 的楔形体, 求激波角 β , 波前波后气流压强比, 波后气流 M 数, 总压恢复系数, 激波前后气流温度比, 密度比。给出楔形体如图 3-22 所示。

解 从激波图线中查得结果, 由图 3-20(a)(b)(c)

(d) 查得, $\beta = 42.7^\circ$, $\frac{p_2}{p_1} = 3.2$, $M_2 = 1.71$, $\sigma = 0.85$ 。激波前后气流的温度比和密度比可以根据激波前后流的 M 数和状态方程求得。因为

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} = 1.42$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = 2.25$$

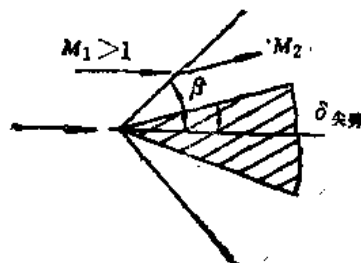


图 3-22

五、圆锥激波

前面我们讨论的是平面激波, 是一种二维流动, 相当于超音速气流流过一个无限宽的, 其横截面呈楔形的物体, 产生的是附体的平面激波。现代超音速飞机的机身头部经常是圆锥形的。这时超音速气流流过圆锥形机身时, 在半顶角不大的情况下, 将产生附体圆锥激波如图 3-23 所示。

平面激波和圆锥激波有它们的共同点。其共同点是, 从激波面附近的局部来看它们都是斜激波, 如果两者的波前 M 数和激波角 β 相同, 那末平面激波的波后参数与紧挨圆锥激波后参数完全相同。这因为在导出斜激波前后参数的变化规律时, 并没有作波面必须是平面的假定。但是, 气流在通过圆锥激波后的流动情况和平面激波后流动情况有显著差别。

下面对其不同点进行分析:

1. 在相同半顶角下, 圆锥激波较平面激波为弱

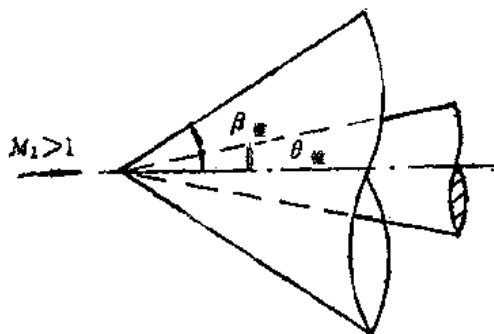


图 3-23

图 3-24 分别表示超音速气流流过尖劈 (即楔形体) 及圆锥的情况。由于流过锥体时气流是对称于中心轴线而从圆锥头部沿整个锥面向四面八方均匀散开。而二维尖劈, 气流只能在上下两个方向转折, 只能从这两边流过去, 别无通道。因此, 对应于同一个来流 M 数, 当 $\theta = \delta$ 时, 气流流过锥体对流动的扰动比流过尖劈为弱, 即圆锥激波比平面激波为弱。这样, 所形成的激波角 $\beta_{\text{锥}} < \beta_{\text{尖劈}}$, 这是圆锥激波的一个特点。由于这个特点, 我们不能利用平面斜激波曲线去查圆锥体的激波角, 而必须用另一组由圆锥激波理论计算结果画成的曲线, 如图 3-27。根据波前气流 M 数和圆锥半顶角 θ , 可在图上查出相应圆锥激波的激波角。比较图 3-20(a) 及图 3-27, 当 $M_1 = 2.5$ 时, $\delta = \theta = 25^\circ$ 时, $\beta_{\text{锥}} = 37.5^\circ$, 而 $\beta_{\text{尖劈}} = 50.5^\circ$ 。

2. 圆锥激波后气流经过逐渐转折而与锥面平行

在二维流里，气流经过激波之后，其指向和尖劈物面平行，已经满足了边界条件的要求，波后气流不再变化。在圆锥绕流中， $\beta_{\text{锥}}$ 较 $\beta_{\text{尖劈}}$ 小，气流在越过激波时的折角也较小，波后的气流当然还没有平行于锥面，波后气流必然还要不断改变其速度大小和方向，使速度

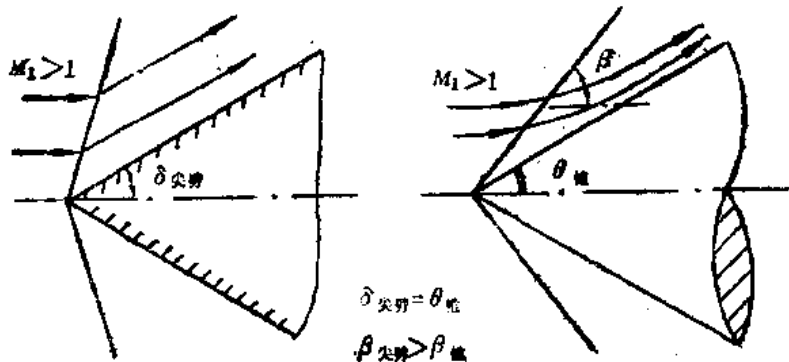


图 3-24

指向逐渐向锥面靠拢，这就是说圆锥的激波后的流线是弯曲的，以锥面为渐近线，气流沿流线经历一个等熵压缩过程。这种变化正是轴对称流的质量守恒定律所要求的。如果圆锥激波后的气流也像尖劈激波后的气流一样，气流一过激波就平行于锥面，像图 3-25(a) 样子，是不能满足质量守恒定律的。图 3-25(b) 中 1—1 和 2—2 两个截面上，虽然流线距物面的距离都是 b ，但由于锥体的半径增大，2—2 截面处的气流通道显然比 1—1 截面处的大得多。在定常流情况下，根据质量守恒定律，为保证流量不变，流线离锥面的距离会越来越小，如图 3-26 所示。因此，圆锥激波后的气流参数与圆锥表面的气流参数是不相等的。圆锥体表面的气流参数需经理论计算的曲线中查出，如图 3-28 所示。 $M_{\text{锥}}$ 是指锥面上的气流 M 数。

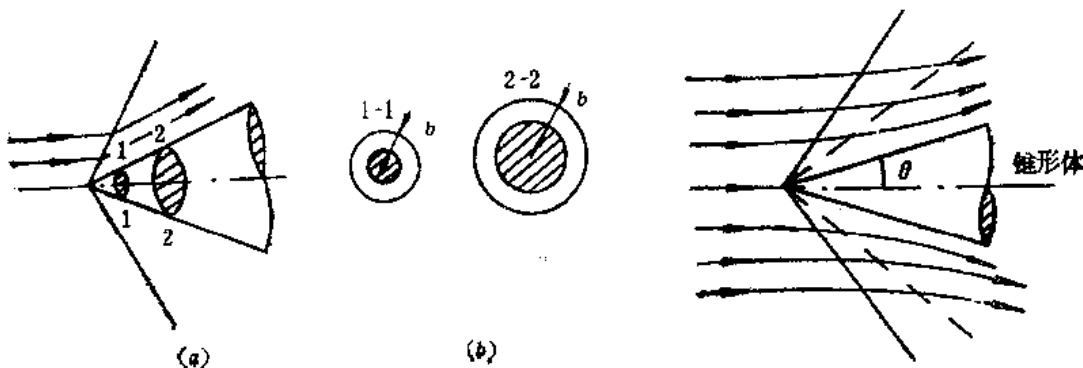


图 3-25

图 3-28

3. 圆锥激波后流场具有锥型流特征

理论证明，圆锥激波与锥面之间的气流，除了气流方向在逐渐折转外，各气流参数亦都在变化。这种变化是等熵变化，根据圆锥的几何特点，从锥顶发出的同一条射线上，气流的各种参数相同，见图 3-29。具有这种特性的流动，称为锥型流。现举例说明圆锥激波后流动参数的计算方法。

例 已知 $\theta_{\text{锥}} = 30^\circ$ ， $M_1 = 2.0$ ， $p_1 = 1$ 大气压，求激波后流动参数 M_2 ， p_2 ， p_{02} ， δ_2 及锥面上流动参数 $M_{\text{锥}}$ ， $p_{\text{锥}}$ ， $p_{0\text{锥}}$ 。

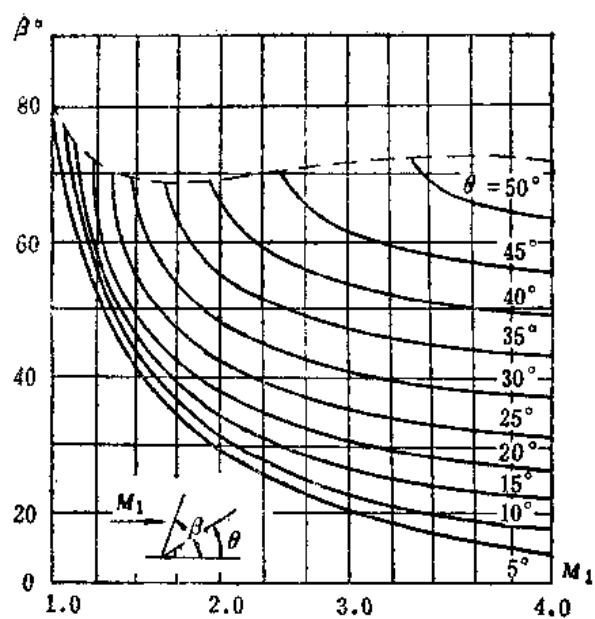


图 3-27

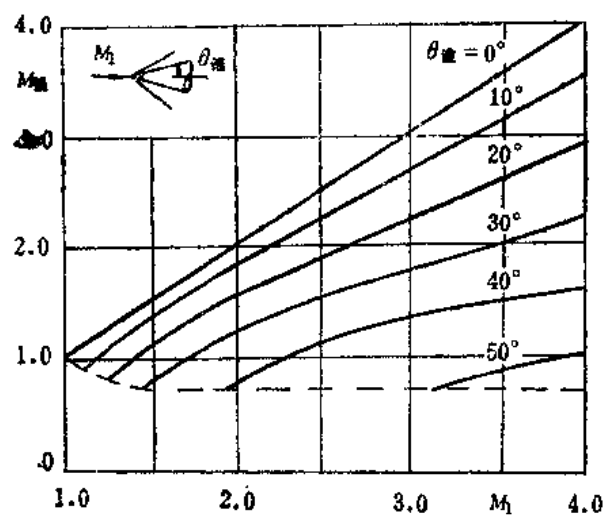


图 3-28

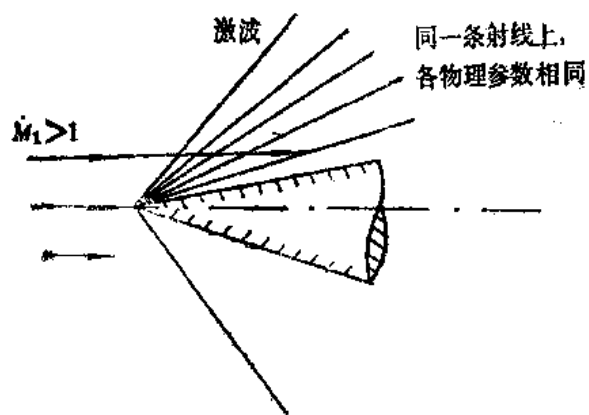


图 3-29

解 (1) 求波后流动参数。

由图 3-27 根据 $\theta_{\text{锥}} = 30^\circ$, $M_1 = 2.0$, 求得 $\beta_{\text{锥}} = 48.2^\circ$ 。再利用平面斜激波的图线, 依 $\beta_{\text{锥}} = 48.2^\circ$, $M_1 = 2.0$, 查图 3-20(a), 得气流经激波后的转折角 $\delta = 17^\circ$ 。又依 M_1 和 $\delta = 17^\circ$ 查图 3-20(b) 得 $M_2 = 1.35$, $\frac{p_2}{p_1} = 2.42$, $\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.934$ 。所以 $p_2 = 2.42$, $p_1 = 2.42$ 大气压。

由 $M_1 = 2.0$, 可算得

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} = 0.1278$$

$$p_{01} = \frac{p_1}{0.1278}$$

$$p_{02} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \times p_{01} = 0.934 \times \frac{p_1}{0.1278} = 7.31 \text{ 大气压}$$

(2) 求锥面上气流参数。

依 M_1 , $\theta_{\text{锥}}$ 由图 3-28 求得 $M_{\text{锥}} = 1.25$ 。根据圆锥激波后流场是等熵流场, 故

$p_{02} = p_{0\text{锥}} = 7.31$ 大气压, 则

$$\frac{p_{\text{锥}}}{p_{0\text{锥}}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{\text{锥}}^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} = 0.3861$$

$$p_{\text{锥}} = 0.3861 p_{0\text{锥}} = 0.3861 \times 7.31 = 2.82 \text{ 大气压}$$

练 习 题

3.1 超音速气流受向外转折扰动后, 气流的速度、压强、密度、温度等参数的变化规律如何?

3.2 超音速气流大角向外转折为什么会有一个最大转折角存在?

3.3 何谓马赫波? 激波? 膨胀波?

3.4 已知来流 M 数为 2.134, 向外转折为 20° , 求转折后的马赫数 M_2 。试问该气流向外转折最大可能的角度是多少?

3.5 已知 $M_1 = 1.435$, $p_1 = 101253.6$ 公斤/米², $\rho_1 = 1.226$ 千克/米³, $T_1 = 288^\circ \text{K}$, 求气流膨胀 35° 后的 M_2 , p_2 , ρ_2 , T_2 。

3.6 超音速气流流过半顶角 $\delta = 20^\circ$ 的二维尖劈, 求来流 M 数为 2, 3, 3.5 时的激波角 β , 静压比 $\frac{p_2}{p_1}$, 总压比 $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ 和波后的 M_2 。

3.7 已知有一圆锥, 半顶角 $\theta_{\text{锥}} = 20^\circ$, $M_1 = 2.0$ 的超音速气流流过它, 迎角为零, 问圆锥激波角 $\beta_{\text{锥}}$ 多大? 气流经激波时折转多少度? 在激波后的 $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $\frac{T_2}{T_1}$ 各为多少? 在锥面上的 $M_{\text{锥}}$ 等于多少?

$\frac{p_{\text{锥}}}{p_1}$, $\frac{\rho_{\text{锥}}}{\rho_1}$, $\frac{T_{\text{锥}}}{T_1}$ 为多大?

第四章 理想流体的运动学和动力学基础

前面我们主要研究一维流动情况，本章将简要地讨论二维、三维流动的各流动参数之间的关系式。我们将进一步分析流体微团的运动，研究其旋转运动即旋涡运动，为今后进一步研究飞机的升力、阻力提供必要的基础；同时研究其无旋运动时，流场的特点，即流场中存在有势（位）场，引入速度位函数 φ 。为理论上计算飞机空气动力提供一些基础知识。

§ 4-1 流体微团运动分析及速度位

一、流体微团运动的分析

在前面章节中，根据连续介质假设提到的流体质点概念，它是可以忽略线性尺度效应（如膨胀、变形、振动等）的最小单元，而流体微团则是由大量流体质点所组成的具有线性尺度效应的微小流体团。

从理论力学中知道，刚体运动可分解两部份：一是以基点的速度作平移运动；另一是绕着通过基点的瞬时轴，作旋转运动。

流体微团的运动，一般是很复杂的。它除了沿某一方向的平移运动和绕着通过基点的某一瞬时轴作旋转运动之外，还具有变形运动（包括直线变形及剪切变形）。这就是说流体微团的运动可分为平移、变形及旋转三种运动。

研究流体微团变形运动的根本问题，是确定其变形角速度；而流体微团旋转运动的根本问题，是确定其旋转角速度。为此，在某一瞬时 t ，在流场中任取一个微小四面体流体微团 $ABCD$ ，见图 4-1(a)，其边长分别为 δx ， δy ， δz ，且平行于相应坐标系。若以 A 点为基点，其对应的分速度 V_x ， V_y 及 V_z ， A 点相应坐标为 x ， y ， z 。

流体微团具有三种运动形式可进行分析：对于 xoy 平面三角形 ABC ，见图 4-1(b) 经 dt 时间后

(1) 由于平移运动而到 $A'B'C'$ 位置；

(2) 由于微团的变形运动（主要是剪切变形）而使 $A'B'$ 及 $A'C'$ 两边在 dt 时间内，各改变了一个 $d\alpha$ 角，因此两边分别变化到 $A'B''$ 及 $A'C''$ 位置；

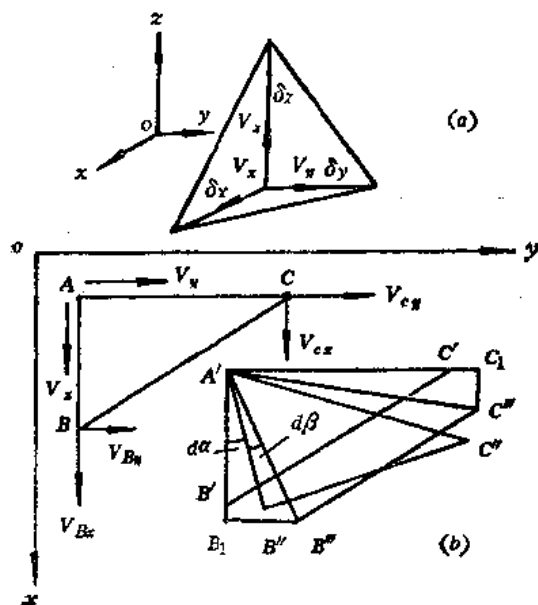


图 4-1

(3) 由于微团有绕着通过 A 点瞬时轴的旋转运动, 即有绕 z 轴的旋转角速度分量 ω_z , 使 $A'B''$ 及 $A'C''$ 两边各转动一个 $d\beta$ 角 (按右手法则, 即逆时针方向为正)。结果, 两边最终变到 $A'B'''$ 及 $A'C'''$ 位置。

为了确定变形角速度和旋转角速度, 首先分析 B, C 两点的分速度, 在各分速度 V_x, V_y 及 V_z 为坐标连续函数的基础上, 及微小边长 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 的情况下, 按台劳级数展开并只取到一阶项, 则得:

B 点的分速度为

$$V_{Bx} = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \delta_x$$

$$V_{By} = V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} \delta_x$$

由此可得 B 点对 A 点在 x 轴方向的相对速度为

$$V_{Bx} - V_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} \delta_x \quad (\text{使 } AB \text{ 边产生伸或缩变形的速度})$$

B 点对 A 点在 y 轴方向的相对速度为

$$V_{By} - V_y = \frac{\partial V_y}{\partial x} \delta_x \quad (\text{使 } AB \text{ 边产生剪切变形和旋转的速度})$$

同理, 可得 C 点对 A 点在 x 轴方向的相对速度

$$V_{Cx} - V_x = \frac{\partial V_x}{\partial y} \delta_y \quad (\text{使 } AC \text{ 边产生剪切变形和旋转的速度})$$

C 点对 A 点在 y 轴方向的相对速度

$$V_{Cy} - V_y = \frac{\partial V_y}{\partial y} \delta_y \quad (\text{使 } AC \text{ 边产生伸或缩变形的速度})$$

上述这些相对速度在 dt 时间中, 使 B', C' 点改变位置:

$$B'B_1 = \frac{\partial V_x}{\partial x} \delta_x dt$$

$$B'B'' = \frac{\partial V_y}{\partial x} \delta_x dt$$

$$C'C_1 = \frac{\partial V_x}{\partial y} \delta_y dt$$

$$C'C'' = \frac{\partial V_y}{\partial y} \delta_y dt$$

因 dt 为微分时间, 故 $d\alpha + d\beta$ 角亦为微量。所以

$$d\alpha + d\beta \approx \tan(d\alpha + d\beta) = \frac{B_1B''}{A'B_1} = \frac{\frac{\partial V_y}{\partial x} \delta_x dt}{\delta_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \delta_x dt}$$

略去二阶微量, 则得

$$d\alpha + d\beta = \frac{\partial V_y}{\partial x} dt$$

同理可得

$$d\alpha - d\beta = \frac{\partial V_x}{\partial y} dt$$

联立解上列方程组，则得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \gamma_x \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \omega_x \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

上式中 γ_x 代表垂直于 z 轴的平面上，单位时间内一个直角的变化量之半，称为剪切变形角速度，或称角变形率。 ω_x 代表微团绕基点 A 旋转在 z 轴上的旋转角速度分量，它代表了微团上两条互相垂直线在 z 轴上转角分量之平均值。

同理可求出其它二个平面上角变形率和旋转角速度：

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \gamma_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \gamma_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

由式 (4-3) 可见，流体微团运动是否有旋转运动，由式中的三个偏导数决定。

二、有旋运动和无旋运动

如果流体微团不发生旋转，即

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 0 \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

这种运动称为无旋运动。反之，则称为有旋运动。

应该指出，流体运动是有旋或者无旋仅根据流体微团本身有无旋转来决定，而与流体微团的运动轨迹无关。

在图 4-2 所示 (a)，(b) 两种情况下，微团的运动轨迹是圆，但是在情况 (a) 中微团并不发生旋转，故这种运动是无旋的，在情况 (b) 中微团发生转动是有旋的。

另外再看一例，如图 4-3 所示，设各层流体都作直线运动，但各层流体的速度不同，亦即有速度梯度。设 $V_x = ay$ ， $V_y = 0$ ， $V_z = 0$ 。则 $\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = -\frac{a}{2}$ ， $\omega_y = 0$ ， $\omega_z = 0$ ，

此为有旋运动，从几何上来看，设原来流体微团为正方形 I，运动后变为平行四边形 II。平行四边形 II 可看作正方形 I 经过两次变化得来。先是正方形保持对角线方向不变，仅发生剪切变形，然后再按箭头所示方向旋转一个角度而变成平行四边形 II。

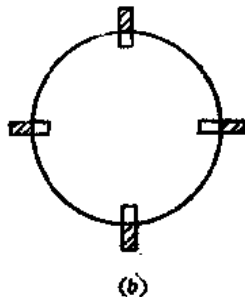
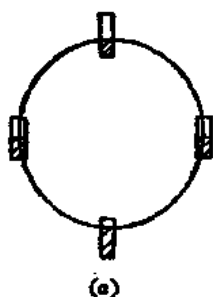


图 4-2

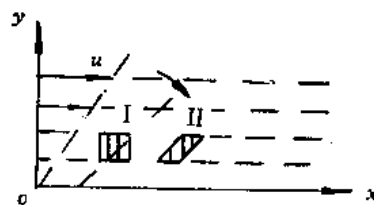


图 4-3

三、无旋运动和速度位

对于空气动力学中的许多问题来说，可以把流体运动看作是无旋运动，亦即有

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = 0$$

由以上三式得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

高等数学知识告诉我们，式(4-4)说明 $(V_x dx + V_y dy + V_z dz)$ 是某一函数 $\varphi(x, y, z)$ 的全微分，亦即

$$V_x dx + V_y dy + V_z dz = d\varphi$$

因此在无旋运动中流体微团的分速可表为

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ V_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ V_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

函数 φ 称为速度位，式(4-5)表明了速度位与速度之间的关系：即速度位对某个坐标的偏

导数，等于速度在该坐标轴上的投影。上述结论可以推广为速度沿任何方向的投影等于速度位对该方向坐标的导数。

由上述的讨论可知，在无旋流场中，作为三个未知函数的 V_x, V_y, V_z ，只要通过一个未知函数速度位 φ 来表示即可，这就简化了空气动力学方程。

§ 4-2 连续方程及流函数

一、微分形式的连续方程

在第二章中我们已讨论了一维流动时的连续方程，这里将讨论三维流动时的连续方程。

我们在流场中取出边长为 dx, dy, dz 的微元六面体控制区，如图 4-4 所示。现在研究此六面体控制区内的流体质量变化。

首先分析流入与流出微元六面体的质量：设六面体控制区上流体质点 $m(x, y, z)$ 的速度为 V_x, V_y, V_z ，密度为 ρ 。则在单位时间从六面体左面单位面积

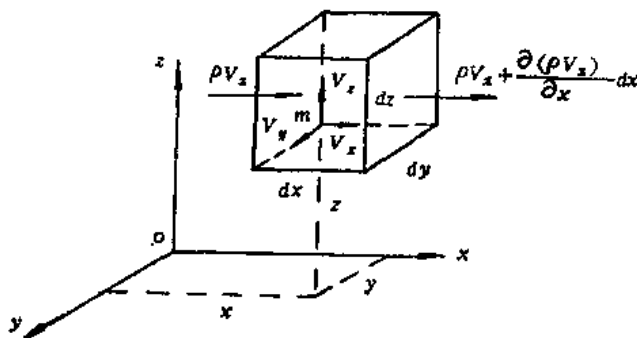


图 4-4

流入质量为 ρV_x ，而相应的在其右面流出的流体质量为 $\rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx$ 。在 dt 时间内沿 x 方向从六面体左面流入与从右面流出的质量差为

$$-\left[\rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx\right] dy dz dt + [\rho V_x] dy dz dt = -\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

同理，在 dt 时间内沿 y, z 两方向流入与流出六面体质量之差分别为

$$-\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$-\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} dx dy dz dt$$

因此，在 dt 时间内整个六面体控制区流入与流出的流体质量之差应为

$$-\left[\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}\right] dx dy dz dt. \quad (4-6)$$

下面分析 dt 时间前后微元六面体内的流体质量变化。 dt 时间开始时 m 点上的流体密度为 ρ ，则 dt 时间末该点上的流体密度变为 $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right)$ 。所以经过 dt 时间，六面体内流体质量的增量为

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz.$$

根据质量守恒定律，在 dt 时间内流入与流出质量之差，应等于六面体内流体质量的增

量, 写成等式, 可得

$$-\left[\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4-7)$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (4-8)$$

上式称为可压缩流体的连续方程。表示流体在单位时间流经单位体积空间流出与流入的质量差与其内部质量变化的代数和为零。

如果流动是定常的, 则 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 连续方程为

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (4-9)$$

式(4-8)可以写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} V_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} V_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} V_z + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

上式中前四项是 ρ 对 t 的全导数, 因此可以得到另一个形式的连续方程

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (4-10)$$

对于定常不可压缩流体, $\rho = \text{常数}$, 即 $\frac{d\rho}{dt} = 0$,

由式(4-10)得不可压缩流体在定常流动时的连续方程

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4-11)$$

二、流函数

对于二维定常不可压流动, 连续方程

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (4-12)$$

可得

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (4-13)$$

由高等数学可知式(4-13)表明 $V_x dy - V_y dx$ 是某一函数 ψ 的全微分, 即

$$d\psi = V_x dy - V_y dx \quad (4-14)$$

又

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \quad (4-15)$$

故有

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4-16)$$

函数 $\psi(x, y)$ 称为流函数。现在求流函数 $\psi(x, y)$ 为常数的曲线, 令式(4-14)中 $d\psi = 0$, 得到

$$V_x dy - V_y dx = 0$$

因而有

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \quad (4-17)$$

式(4-17)说明, 曲线 $\psi(x, y) = C$ 上各点的切线方向和该点处的速度方向平行, 因此 $\psi(x, y) = C$ 为一流线。式(4-17)为平面流动的流线方程。

下面我们来讨论二维定常不可压流场中流函数与速度位之间的关系。根据式(4-5)和式(4-16)可得

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ V_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

上式建立了速度位与流函数之间的关系。

取速度位梯度与流函数梯度的数性积(点积)

$$\begin{aligned} \text{grad} \varphi \text{grad} \psi &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

上式表示了等位线族($\varphi(x, y) = C$ 的曲线)与流线族正交。

在二维不可压流场上作任意曲线 $M_0 M_1$, 如图4-5所示。现计算每秒流过此曲线与垂直 xOy 平面为单位长所组成的截面上的体积流量 Q 。设在 $M_0 M_1$ 曲线上取微段弧长 ds , ds 方向沿着由 M_0 至 M_1 的方向, ds 的单位法线为 $\mathbf{n}$, 其方向取作与流体速度 $\mathbf{V}$ 方向在 $M_0 M_1$ 截面的同侧。通过小面积 $ds \cdot 1$ 的流量

$$dQ = V_n ds \cdot 1 = V_n ds$$

其中 V_n 为法向分速度, 法向分速度可

图 4-5

用坐标轴上的分速度 V_x 和 V_y , 按下式来表示

$$V_n = V_x \cos(n, x) + V_y \cos(n, y)$$

由此

$$dQ = [V_x \cos(n, x) + V_y \cos(n, y)] ds$$

利用已知的法线与坐标轴间夹角余弦的式子

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$$

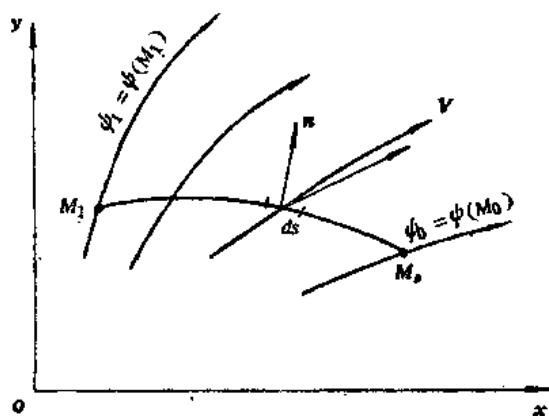
$$\cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$$

所以

$$dQ = V_x dy - V_y dx$$

根据式(4-14)

$$dQ = d\psi$$



则沿 $M_0 M_1$ 截面的总流量

$$Q = \int_{M_0}^{M_1} dQ = \int_{M_0}^{M_1} d\psi = \psi(M_1) - \psi(M_0) = \psi_1 - \psi_0. \quad (4-19)$$

上式说明, 通过任意曲线 $M_0 M_1$ 的体积流量, 等于该曲线两端点流函数数值之差, 而与曲线形状无关。因此, 若通过两给定点作流线, 由此两流线所界定的流管的流量, 即为此两流函数数值之差。

§ 4-3 旋涡运动

在流场中全部或部分区域里, 如果流体微团的旋转角速度 $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \neq 0$, 我们称这部分区域的流体运动为旋涡运动。流体的旋涡运动是自然界中常见现象, 例如龙卷风就是一种强大的空气旋涡, 在桥墩等物后面存在着流体旋涡, 划船时, 在桨的后面也存在着较强的旋涡, 机翼在空中运动时, 也会使其表面上空气微团产生旋转运动。旋涡运动与飞机空气动力性能关系十分密切, 对研究飞机的升力和阻力有重要作用。

一、涡线, 涡束, 涡面及涡管的概念

在有旋流场中, 空间某一点流体微团的转动可用其旋转角速度向量 $\vec{\omega}$ 表示, 这样我们就得到了角速度向量 $\vec{\omega}$ 的向量场。类似流场中流线、流束, 流面及流管亦有涡线、涡束、涡面及涡管的定义。

1. 涡线

在某瞬时, 空间曲线上任一点处的切线方向和该点处的旋转角速度 $\vec{\omega}$ 矢量方向一致, 这条曲线称为涡线, 见图 4-6(a) 所示。涡线上的流体微团好象带孔的小珠, 穿在涡线上, 绕涡线转动, 如图 4-6(b) 所示。类似于推导流线微分方程的方法, 可得出涡线的微分方程为

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (4-20)$$

2. 涡束

在某瞬时, 绕着公共转轴 (涡线) 旋转的流体微团群称为涡束。旋转角速度可以沿涡线长度而改变, 但在涡束的每一个截面上, 流体微团象固体般以同一角速度旋转。

3. 涡面

某瞬时 t , 在流场中取任意一条曲线 c (不能是涡线), 由 c 上各点作涡线, 则由上述

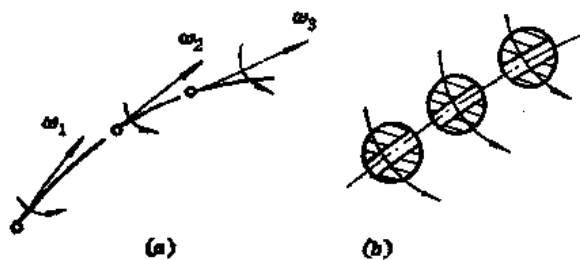


图 4-6

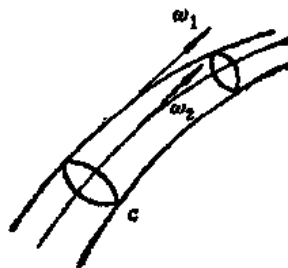


图 4-7

涡线构成的曲面称为涡面。

4. 涡管

某瞬时 t ，取封闭曲线 c （非涡线），由 c 上各点作涡线，则由上述涡线构成的封闭曲面称为涡管，如图 4-7 所示。正如流体不能穿过流管一样，涡面上的角速度向量 $\vec{\omega}$ 与涡面的单位法线向量 $\vec{n}$ 相垂直，表示了涡量 $\vec{\Omega}$ ($\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$) 不能穿过涡面。

二、涡管强度、速度环量和斯托克斯定理

1. 涡管强度

设涡管截面为 σ ， $d\sigma$ 是截面的微元面积， ω_n 是流体微团在 $d\sigma$ 法线上的转动角速度，见图 4-8，则通过涡管截面 σ 的角速度通量为

$$\iint_{\sigma} \omega_n d\sigma。$$

定义：经过涡管截面 σ 的流体微团角速度通量的两倍，叫做涡管强度，即

$$\kappa = 2 \iint_{\sigma} \omega_n d\sigma \quad (4-21)$$

2. 速度环量（环量）

速度环量定义为，某一瞬时 t ，在流场内沿任一指定曲线，计算曲线上各点流速 V 在曲线切线方向的投影 V_s 与该曲线 ds 的乘积，然后求由起点 A 至终点 B 的总和，所得到的结果就是曲线 AB 的速度环量 Γ ，如图 4-9(a)，即

$$\Gamma = \int_A^B V_s ds \quad (4-22)$$

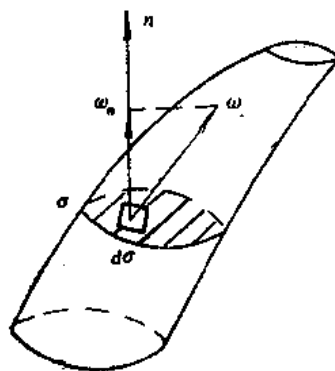


图 4-8

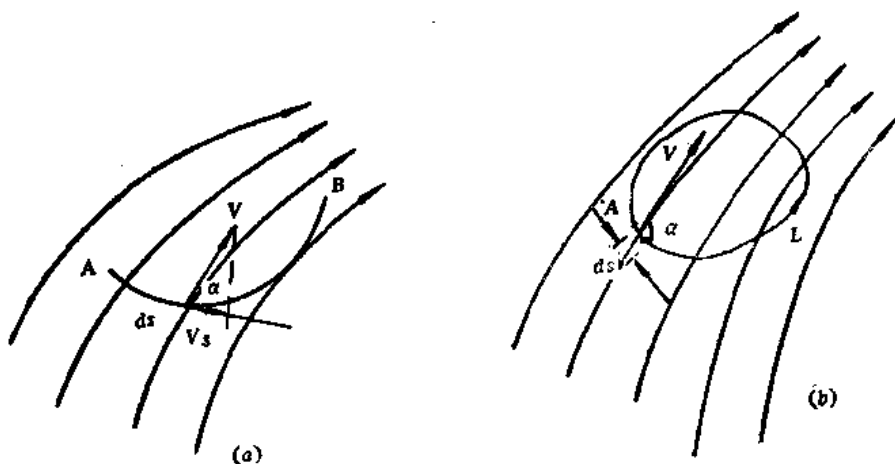


图 4-9

速度环量简称环量，就是速度沿任一给定曲线的线积分称为沿该曲线的环量。环量的符号不仅与流速方向有关，而且与积分时所取的绕行方向有关。因此为统一起见，规定积分的绕行方向是逆时针方向（二维情况）。若是封闭曲线，它所包围的区域总是在行走方向的左侧，如图 4-9(b)。如果由 A 至 B 为正，那末由 B 至 A 便是负，即 $\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}$ 。对于封闭曲

线,若沿顺时针绕行时,环量值应加负号。在空气动力学上要用到的环量往往是沿一条封闭曲线 L 的速度线积分,如图 4-9(b)。这时

$$\Gamma = \oint V \cos \alpha ds \quad (4-23)$$

环量的最大意义在于根据封闭曲线上的数值来判断曲线内的一部分流体有没有旋转运动,或是计算曲线所包含的旋涡的强度。

在无旋流场中,式(4-22)可写成

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_A^B (V_x dx + V_y dy + V_z dz) \\ &= \int_A^B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) \\ &= \varphi_B - \varphi_A \end{aligned} \quad (4-24)$$

即沿 AB 曲线的速度环量等于 AB 两点的速度位差,而与 AB 曲线形状无关。如果在无旋流场上求沿封闭曲线的速度环量,则

$$\Gamma = \oint_L d\varphi = \varphi_A - \varphi_A = 0 \quad (4-25)$$

如果我们把速度看作为力,积分曲线看作是途径,则环量的概念相当于理论力学中功的概念。由理论力学知识可知,具有势的力所作的功仅与起点和终点的位置有关,而与经过途径无关。这正相当于无旋流场中速度环量与积分曲线无关一样,所以有时把速度位称作速度势。

3. 斯托克斯定理

设在流场中取任意非封闭曲面 s , 该曲面具有界线 L , 如图 4-10 所示, 现在要建立沿 L 的速度环量与贯穿曲面 s 的旋涡强度之间的关系。我们可以直接应用高等数学中关于曲线积分的斯托克斯公式。斯托克斯公式告诉我们: 若流场中的速度向量的投影 $V_x(x, y, z)$, $V_y(x, y, z)$, $V_z(x, y, z)$ 及其一阶偏导数都是连续的话, 则有

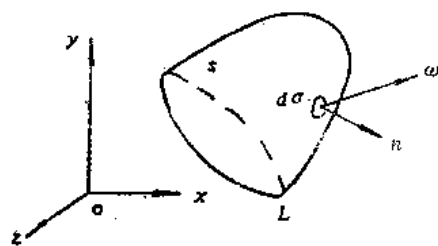


图 4-10

$$\begin{aligned} \oint_L V_x dx + V_y dy + V_z dz &= \iint_s \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dz + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) dz dy \end{aligned}$$

上式亦可写成

$$\Gamma_L = \oint \vec{V} d\vec{L} = 2 \iint_s \vec{\omega} d\vec{\sigma} = 2 \iint_s \omega_n d\sigma \quad (4-26)$$

式中界线 L 的方向及微元面积法线 $\vec{n}$ 的方向应当这样选取, 当人依法线 $\vec{n}$ 方向站立沿 L 走时, 曲面 s 应当在人的左侧。

式(4-26)指出, 沿封闭曲线 L 的速度环量, 等于贯穿以 L 为界线的任意曲面 s 的旋涡强度之和。这就是斯托克斯定理。

由斯托克斯定理推知,包围若干涡管在内的任意一条封闭曲线,不论封闭曲线形状如何,沿曲线计算的环量,其值必等于所围的那些涡管强度之和,这样在实际计算或理论推导时,就可以选取一个最容易进行线积分的曲线来作计算。

三、海姆霍兹第一定理

涡管强度沿涡管有没有变化呢?海姆霍兹第一定理指出,在同一瞬时,沿涡管长度旋涡强度不变。证明如下:

设在某一瞬时,在涡管上任意取两截面 I (周线 $abcd$) 及 II (周线 $efgh$), 设沿涡线 ae 将涡管切出一条细缝 ae 。并把 ae 当作两条线看,一条由 a 至 e , 另一条由 e 至 a , 于是有空间的封闭曲线 $abcdaeefgha$, 见图 4-11。计算沿此空间封闭曲线的速度环量 Γ 。根据斯托克斯定理,沿空间封闭曲线的环量必等于此封闭曲线所围的曲面的涡管强度。由于曲面系涡管表面,故贯穿此曲面的旋涡强度应为零。即

$$\Gamma_{(abcdaeefgha)} = 0$$

上述环量可分开写成

$$\Gamma_I + \Gamma_{II} + \Gamma_{ae} + \Gamma_{ea} = 0$$

Γ_{ae} 与 Γ_{ea} 由于积分路线方向相反,故

$$\Gamma_{ae} = -\Gamma_{ea}$$

由此得

$$\Gamma_I = -\Gamma_{II}$$

式中 Γ_{II} 前带负号,表示积分路线 II 应与图中表示的积分方向相反,即与 Γ_I 的积分方向相同。对 I, II 截面分别应用斯托克斯公式,得

$$\iint_I \omega_n d\sigma = \iint_{II} \omega_n d\sigma$$

或

$$K_I = K_{II} = \text{常数} \quad (4-27)$$

上式表示了沿涡管长度旋涡强度不变。这好象定常流动中沿流管长度流量不变一样。

根据海姆霍兹第一定理还可推知,如 $\kappa = 2\omega\sigma$, 则在涡管截面积 σ 大的地方,角速度 ω 必减小,如果 $\sigma \rightarrow 0$, 那么 $\omega \rightarrow \infty$ 。而微团角速度趋于无限大是不可能的。由此可以直接推出旋涡的一个重要性质:涡管不可能在流体中开始或终止。这就是,涡管存在的形式只有两种:一种是涡管自己首尾相接形成封闭的涡环;另一种涡管是开始或终止于固体的界壁和自由边界或伸展到无穷远,参看图 4-12。

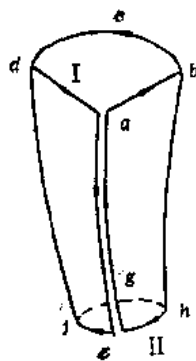


图 4-11

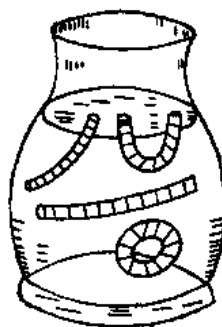


图 4-12

四、直线涡束的诱导速度

我们把流场中由于旋涡存在而产生的速度，叫做诱导速度。诱导速度大小可由毕奥-沙瓦公式来确定。

1. 毕奥-沙瓦公式

在不可压缩流动中，此公式指出了强度为 Γ 的微元长度 dL 和周围流体微团的诱导速度 $d\vec{w}$ 之间的关系。其数学表达式为

$$d\vec{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{L} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4-28)$$

或

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} dL \quad (4-29)$$

式中 dL 为旋涡上的微段；

r 为旋涡周围任意一点 M 至微段的距离；

α 为微段 dL 和 r 之间的夹角；

Γ 为旋涡强度。

$d\vec{w}$ 方向垂直于 ONM 平面，见图 4-13 所示。

2. 直线涡束的诱导速度

(1) 有限长直涡束。

见图 4-14，有限长涡束 AB 的微元段 dL 在点 M 的诱导速度为

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \alpha dL}{r^2}$$

由于 $d\vec{w}$ 恒垂直 MAB ，所以

$$w = \int_A^B dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_A^B \frac{\sin \alpha}{r^2} dL \quad (4-30)$$

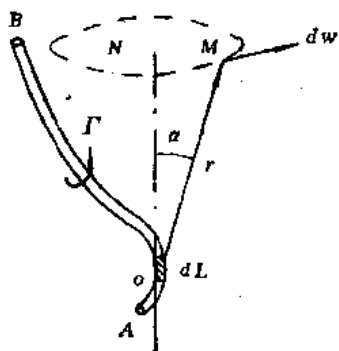


图 4-13

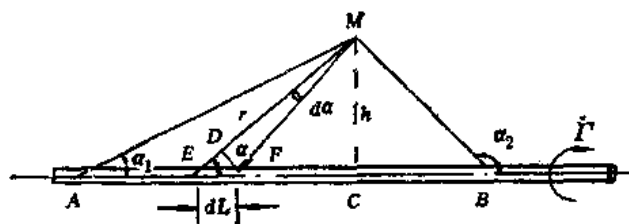


图 4-14

作 MC 垂直 AB ，设 $MC = h$ ，由图 4-14 中三角形 EDF 和 DFM 可找到

$$EF = dL = \frac{FD}{\sin \alpha}$$

$$FD = r \sin \alpha$$

由此得

$$dL = \frac{r \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

另外, 从三角形 ECM 中可得

$$r = \frac{h}{\sin \alpha}$$

把 r 及 dL 值代入式 (4-30)。

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (4-31)$$

此式表明, 有限长直涡束对任意一点 M 的诱导速度大小与 M 点至涡束的垂直距离 h 以及 α_1, α_2 的大小有关。

(2) 半无限长直涡束。

在图 4-14, 令 B 点沿 AB 向右移至无穷远,

于是

$$\alpha_2 \rightarrow \pi$$

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha_1 + 1)$$

若 M 点在过 A 且垂直于 AB 的平面内, 则 $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, 此时

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (4-32)$$

(3) 无限长直涡束。

在图 4-14 中, 令两端点 A 和 B 沿 AB 分别向左和向右移向无穷远处, 则

$$\alpha_1 \rightarrow 0 \quad \alpha_2 \rightarrow \pi$$

于是

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (4-33)$$

由以上两式看到, 半无限长涡束所引起的诱导速度, 为无限长涡束所引起的诱导速度的一半。

由式 (4-33) 可知

$$w \propto \frac{1}{h}$$

所以无限长涡束引起的诱导速度分布成双曲线规律, 如图 4-15 所示。

对于无限长涡束所引起的诱导速度场, 在与涡束轴垂直的平面上流动都是一样的, 因此这种流动可看作是平面流动, 通常称为平面涡流动。平面涡流动在空气动力学中占有重要地位, 下面将进一步对它进行讨论。

如图 4-15 所示, 涡束的截面为圆形, 由实验证明, 在涡束内部流体微团象固体, 按同一角速度旋转, 速度与半径 R 成正比, 即呈线性分布 ($R \leq R_0, V = R \cdot \omega$), 这是有旋流动。在涡束

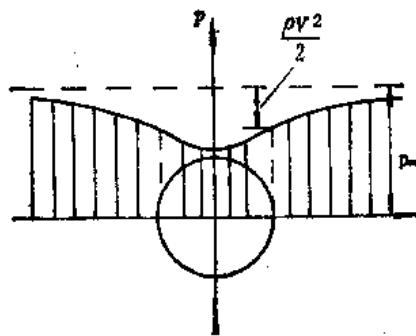
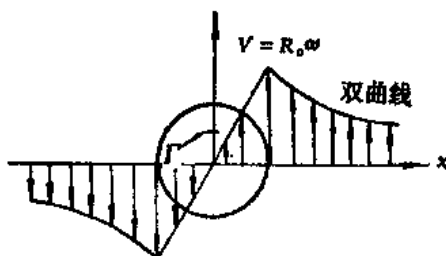


图 4-15

与其周围流体的交界面上，二者速度相同，因此平面涡的速度场是连续的。涡束外流线虽然是一族同心圆，我们可以证明，它们是无旋流动。

设在涡束外面任取扇形面积 $abcd$ ，如图 4-16 所示，沿图示箭头方向计算环量

$$\Gamma_{abcd} = \Gamma_{ab} + \Gamma_{bc} + \Gamma_{cd} + \Gamma_{da}$$

因为

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_{cd} = 0$$

所以

$$\Gamma_{abcd} = \Gamma_{bc} + \Gamma_{da} = \frac{\Gamma}{2\pi r_2} r_2 \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_1} r_1 \theta = 0$$

因此根据式 (4-26)，涡束以外流场中各点的角速度 ω_z 等于零，即为无旋流场。

3. 不可压流体中无限长直涡束外部与内部的压强分布。

在涡束外是无旋流场，考虑到空气粘性影响很小，可以视为理想流体，根据伯努利方程

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = c$$

在离旋涡无穷远处，诱导速度 $V_\infty = 0$ ，而大气压强为 p_∞ ，代入上式有 $c = p_\infty$ ，因此

$$p = p_\infty - \frac{1}{2} \rho V^2$$

由此式看出，在涡束外部，离涡束越近，诱导速度越大，压强愈小；反之，诱导速度愈小，压强愈大；于无穷远外，诱导速度趋近于零，压强增大到大气压强，见图 4-15 所示。

在涡束内部：因空气粘性影响较大，伯努利方程不能应用。理论计算和实验结果说明，涡束内速度继续降低，压强亦继续下降，亦就是越靠近涡束中心，压强愈小，在涡束中心压强最小。压强下降按抛物线规律下降，涡束中心的压强

$$p_c = p_\infty - \rho V_0^2 \quad (4-34)$$

自然界中许多现象：平地上旋风能把旋风途中东西吸进去；海洋中强大旋风能把海水吸起，都表明旋涡中心压强是很小的。

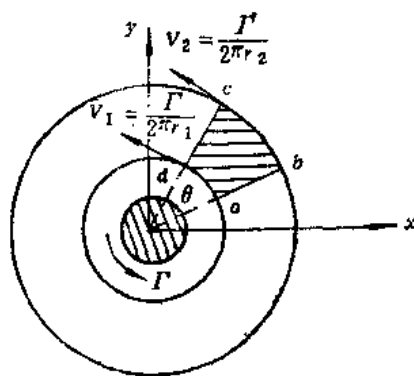


图 4-16

§ 4-4 欧拉运动方程及其积分

在第二章我们曾讨论了一维流动的欧拉运动方程，它是牛顿第二定律在理想流体运动时的微分表达式。下面我们来讨论理想流体中三维流动的欧拉运动方程。

一、欧拉运动方程

在本章第二节所建立的连续方程，说明了流体运动速度场必须满足的条件，这是运动学方程。现在，我们分析流体受力及运动之间的动力学关系，即建立动力学方程。由于是理想流体，可以不考虑由粘性而引起的内摩擦力。因而，作用在流体表面上的力只有压力。

在流场中取一矩形流体微团，其边长为 dx ， dy ， dz ，如图 4-17 所示。设 A 点 $(x$ ，

y, z) 为矩形体中心, 该点的流体静压为 p , 流速沿坐标轴的分量为 V_x, V_y, V_z , 密度为 ρ 。作用在矩形体上的力有表面力、质量力。现以 x 方向受力为例进行分析。即:

压力: 矩形体左面形心 m 点的压强为

$\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)$ 。同理右面形心 n 点的

压强为 $\left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)$ 。

质量力: 设单位质量流体的质量力在 x 轴上的分量为 X , 则矩形体质量力在 x 轴的分量为 $X \rho dx dy dz$ 。

根据牛顿第二定律, 作用在矩形体上诸力在任一轴投影的代数和应等于矩形体质量与该轴上的分加速度的乘积。对于 x 轴则有

$$X \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \frac{dV_x}{dt} \rho dx dy dz$$

上式化简

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dV_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dV_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dV_z}{dt} \end{aligned} \right\}$$

同理

(4-35)

上式右边加速度项, 写成当地加速度与迁移加速度之和, 所以有

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4-36)$$

式 (4-36) 就是理想流体的运动微分方程, 即欧拉运动微分方程。对可压缩及不可压缩理想流体的定常流动或非定常流动都适用。在不可压缩流体中密度 ρ 为常数; 在可压缩流体中密度是压强和温度的函数。

二、欧拉运动方程的积分

为了积分式 (4-36), 对该式进行变换, 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \\ &= V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} \end{aligned}$$

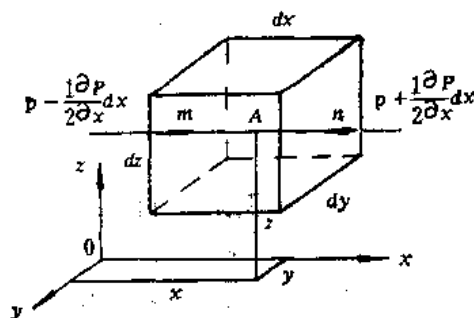


图 4-17

在式(4-36)中的第一等式左右两边减去 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)$, 得

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_z\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) - V_y\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_z(2\omega_y) - V_y(2\omega_x) \end{aligned}$$

类似地, 进行另外两方程的变换可得

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + 2(V_z\omega_y - V_y\omega_x) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + 2(V_x\omega_z - V_z\omega_x) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + 2(V_y\omega_x - V_x\omega_y) \end{aligned} \right\} \quad (4-37)$$

这种形式的欧拉方程又称格罗米柯方程。上述方程, 在一般情况下是不能积分的。只有当流体运动是无旋即有速度位或定常流动的特殊情况下, 可以找到欧拉方程或格罗米柯的积分表达式。

如果流动是无旋的, 那就有速度位存在, 即式(4-37)中的角速度都是零。再假设质量力有位, 即

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

那么式(4-37)的三个式子分别乘以 dx , dy , dz , 然后相加, 并利用微商值与微分顺序无关的性质, 得

$$d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}d(V^2) + \frac{1}{\rho}dp = dU \quad (4-38)$$

设

$$dP = \frac{dp}{\rho}$$

即

$$P = \int \frac{dp}{\rho} \quad (4-39)$$

显然, 若 ρ 与 p 的关系式给定, 函数 $P(x, y, z)$ 就确定。式(4-38)可化为

$$d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + P\right) = dU$$

这样方程积分很简单。积分可得

$$P + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U + C(t) \quad (4-40)$$

其中 C 是时间 t 的任意函数。把式(4-39)代入式(4-40), 最终得

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U + C(t) \quad (4-41)$$

此积分称为拉格朗日积分, 用于可压缩流体非定常的位流。

若流体是不可压缩流体, 即 $\rho = \text{常数}$, 拉格朗日积分成为

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U + C(t) \quad (4-42)$$

若不可压缩定常流, 即 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, 而任意函数 $C(t)$ 变为一常数, 积分式(4-41)将具有如下形式:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = U + C \quad (4-43)$$

用于气体, 质量力只限于重力时, U 可略去, 式(4-43)成为

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = C \quad (4-44)$$

这就是低速气流中经常使用的伯努利公式。 p 是静压, $\frac{\rho V^2}{2}$ 是动压, C 是总压, 可改写为

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} V^2 \quad (4-45)$$

这个公式和第二章式(2-16)形式上完全一样, 但意义略有不同。式(4-45)是在无旋条件下积分出来的, 积分常数 C (即总压 p_0), 在一个无旋流场上到处一样, 即同一个常数。如果不是无旋流, 定常流的欧拉方程仍可积分, 就要沿流线积分了。根据三维定常流动的流线关系式得

$$\left. \begin{aligned} dx &= V_x dt \\ dy &= V_y dt \\ dz &= V_z dt \end{aligned} \right\}$$

即得

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \quad (4-46)$$

以 dx, dy, dz 分别乘以式(4-36), 并考虑定常流特点, 即

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$$

得

$$\left. \begin{aligned} X dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} dx + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} dx \\ Y dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} dy + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} dy \\ Z dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} dz + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} dz + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \end{aligned} \right\}$$

把第一式等式右面第二、第三项 $V_y dx$ 和 $V_z dx$ 分别用流线方程的关系改成 $V_x dy$ 和 $V_x dz$ 。下面两个式子也做类似的替换, 总加起来就得到

$$dU - \frac{1}{\rho} dp = V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z$$

这里仍设质量力有位。在不可压流中 $\rho = \text{常数}$, 上式积分仍得式(4-43)形式。

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = U + C' \quad (4-47)$$

不过现在是利用流线方程才把积分积出来, 如果是无旋流, 那么全流场只有一个常数 C , 即 $C' = C$ 。如果有旋流, 那就只能在一条流线上用一个 C' 值, 流线改变了, C' 值也得变。

§ 4-5 定常位流的基本方程

在定常位流中, 如果能求出 $\varphi(x, y, z)$, 则速度 $V_x(x, y, z)$, $V_y(x, y, z)$, $V_z(x, y, z)$ 就可求出。然后利用 p 与 ρ 的等熵关系式与能量方程, 则流场中任一点的 $p(x, y, z)$, $\rho(x, y, z)$ 等就可求出。

一、定常位流的基本方程——速度位方程

在定常情况下的连续方程, 即式 (4-9)

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

或
$$V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (4-48)$$

在定常情况欧拉运动方程式 (4-35) 略去质量力, 则欧拉运动方程简化为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4-49)$$

由音速公式 $d p = a^2 d \rho$ 得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

把以上关系代入式 (4-49) 得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{\rho}{a^2} \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= -\frac{\rho}{a^2} \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\frac{\rho}{a^2} \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-50)$$

将式 (4-50) 代入式 (4-48), 得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) - \frac{V_x}{a^2} \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ & - \frac{V_y}{a^2} \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ & - \frac{V_z}{a^2} \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

上式中用 $V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ 代入, 整理后得

$$\left(1 - \frac{V_x^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{V_y^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{V_z^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2 \frac{V_x V_y}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{V_y V_z}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - 2 \frac{V_z V_x}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0 \quad (4-51)$$

上式各微分项系数中 a 可以通过能量方程用速度 V 来表示; V_x , V_y , V_z 可以直接用 φ 来表示, 所以 a 也可以用 φ 来表示, 因此式 (4-51) 是只含一个未知数 φ 的方程, 称为速度位方程。这就是位流的基本方程。

式 (4-51) 是一个二阶非线性偏微分方程, 一般不能求得解析解。但是, 在某些特定条件下, 上式可简化成线性偏微分方程。根据简化的偏微分方程, 和给出关于 φ 的边界条件 (见后), 可求出函数 $\varphi(x, y, z)$ 。

空气动力学中, 利用上述的方程可以从理论上来处理空气动力问题。因为这些方程反映了实际流动过程中的流动规律, 象连续方程反映了流体的质量守恒定律, 而欧拉运动方程是牛顿第二定律的数学表达式, 能量方程反映能量守恒规律。在这些方程中, 反映了气流速度、压强、密度、温度和它流经的物体几何形状之间的关系。从数学上来看, 把上面的几个方程联立求解, 就可得到未知数。对实际流动来说, 就是找出流场中任一点的速度、压强、密度和温度, 从而物体所受的总空气动力及其分布就可以求得。

二、定常不可压流的速度位方程

对于不可压流来说, $a = \infty$, 方程式 (4-51) 就简化为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-52)$$

此方程在数学上称为拉普拉斯方程。它是线性的, 因此可以叠加。求解不可压流动问题时, 只要找一个既满足该方程, 又满足给定的边界条件的速度位 φ 即可。因为有了速度位, 就可算出流场各点流速, 从而可利用伯努利公式算出各点压强。

所谓边界条件, 除了一些形状简单的边界条件 (如圆柱、圆球等) 可以直接求解上述拉普拉斯方程外, 对于形状复杂的物体 (如翼型等), 求解是相当困难的。一种常用的方法是利用线性拉普拉斯方程解的可叠加性, 利用简单流动的叠加来获得复杂物体的流动, 以下将介绍几种简单不可压位流。

三、几种简单的不可压位流

1. 平面直匀流

直匀流是指流场中各点处速度的大小、方向相同的流动。设速度在坐标轴上的投影为 V_x , V_y , 则有

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = V_x dx + V_y dy$$

积分上式

$$\varphi = V_x x + V_y y \quad (4-53)$$

求流函数 ψ 。因为

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad -V_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

所以

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -V_y dx + V_x dy$$

积分

$$\psi = V_x y - V_y x \quad (4-54)$$

给 ψ 以不同数值时, 可得到一族斜率为 $\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x}$ 的平行直线——流线, 如图 4-18 中实线所示, 图中虚线为等位线。

如果气流与坐标轴成一定角度, 且 $V_x = a$, $V_y = b$, 则

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= ax + by \\ \psi &= ay - bx \end{aligned} \right\} \quad (4-55)$$

若流动平行于 X 轴, 则其速度位和流函数分别为

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= ax \\ \psi &= ay \end{aligned} \right\} \quad (4-56)$$

若流动平行于 y 轴, 则其速度位和流函数分别为

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= by \\ \psi &= -bx \end{aligned} \right\} \quad (4-57)$$

2. 平面源和汇

源是从流场上某一点有一定的流量向四面八方流开去的一种流动, 如图 4-19(a) 所示。

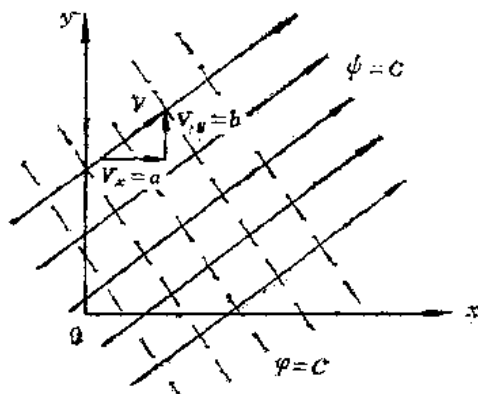


图 4-18

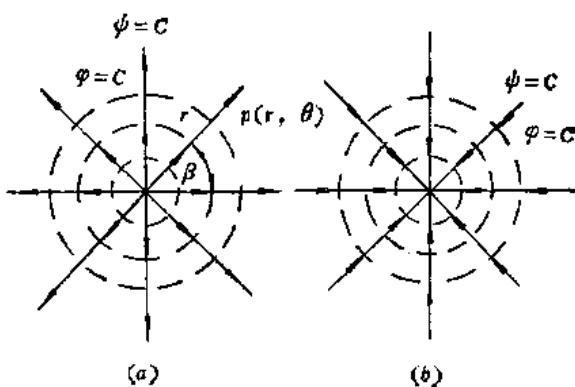


图 4-19

如果把源放在坐标原点上, 由于流动对于坐标原点对称的, 故用极坐标方便。在这个坐标系中任意一点的 $V_\theta = 0$, V_r 的大小, 则可根据质量守恒求出。设单位时间内, 从源中流出体积流量为 Q , 所以任一圆周线 (垂直纸面的高度为 1) 上的流量, 必然等于源流量 Q (Q 也称为源的强度), 即

$$V_r \cdot 2\pi r \cdot 1 = Q$$

$$V_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

由于

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad rV_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (4-58)$$

式(4-58)推导详见附录三。

所以

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta = V_r dr,$$

积分

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (4-59)$$

同样可得到流函数

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (4-60)$$

令 φ 和 ψ 等于一系列常数, 可得等位线和流线。等位线是以源为中心的一系列同心圆, 而流线则是发自源的经线, 见图 4-19(a)。

若改用直角坐标, 则有

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4-61)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \quad (4-62)$$

汇是一种和源流向相反的向心流动, 如图 4-19(b) 所示。只要将源的速度位和流函数中体和流量 Q 代之以 $-Q$, 即可得出点汇的速度位和流函数为

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4-63)$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \quad (4-64)$$

点汇的等位线和流线, 见图 4-19(b)。

如果源、汇不在坐标原点, 而在 (ξ, η) 点, 则只要作一下坐标的位移, 即可得出 φ 和 ψ 的表达式为

$$\varphi = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad (4-65)$$

$$\psi = \pm \frac{Q}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y-\eta}{x-\xi} \quad (4-66)$$

3. 平面偶极

一对彼此无限靠近的等强度源和汇合成流动, 称为偶极流。

考虑在 $(-e, 0)$ 处有一强度 Q 的源, 而在 $(e, 0)$ 处有一强度为 Q 的汇, 见图 4-20。利用叠加原理, 这一源汇对的速度位和流函数可分别表示为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right]$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$

当 $2\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 为了保留源、汇对于外部流体的作用, 必须同时增大流量 Q , 使 $2\varepsilon Q = M$ 保持不变, M 称为偶极强度。这时, 可求出偶极的速度位为

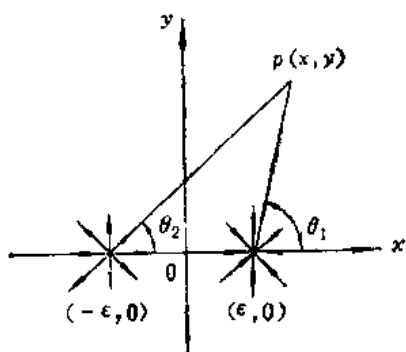


图 4-20

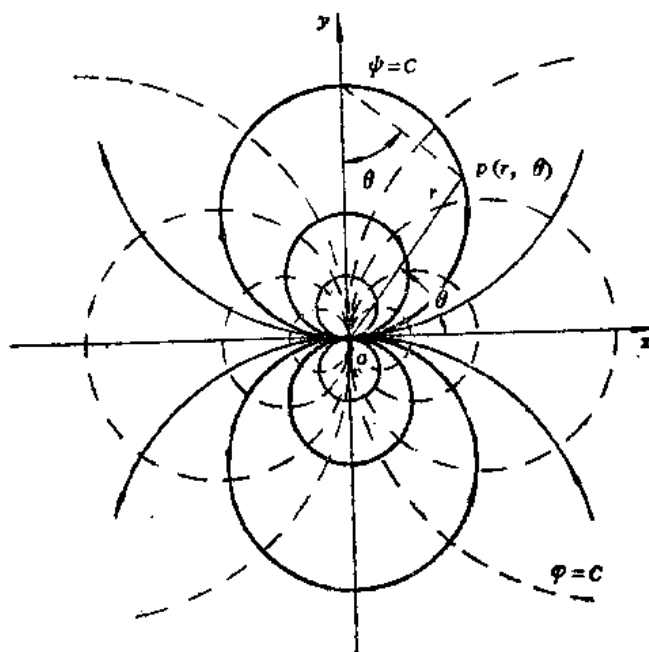


图 4-21

$$\varphi = \lim_{2\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} \left[\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2} \right]$$

$$\varphi = \lim_{2\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi} \frac{\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}}{2\varepsilon}$$

$$= \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [\ln \sqrt{x^2 + y^2}]$$

$$= \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4-67)$$

或

$$= \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (4-68)$$

偶极的流函数为

$$\psi = \lim_{2\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \lim_{2\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M}{4\pi\varepsilon} \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x-\varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{2\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi} \frac{\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

$$= \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \right]$$

$$= -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4-69)$$

$$\text{或} \quad = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} \quad (4-70)$$

对式(4-67)和式(4-69)进行变换,即可得出

$$\left(x - \frac{M}{4\pi\varphi}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{4\pi\varphi}\right)^2 \quad (4-71)$$

$$x^2 + \left(y + \frac{M}{4\pi\psi}\right)^2 = \left(\frac{M}{4\pi\psi}\right)^2 \quad (4-72)$$

式(4-71)说明偶极的等位线是圆心在 x 轴上,并与 y 轴相切的圆,而式(4-72)则表明其流线为圆心在 y 轴上,并与 x 轴相切的圆。

从汇指向源的方向,称为偶极轴。偶极轴的方向不同,则其 φ 和 ψ 的表达式也不同。式(4-67)和式(4-69)是表示负 x 方向的偶极。如正向指向正 x 方向,那末式(4-67)和式(4-69)都要改符号。如果偶极的轴线与 y 轴重合,正向指向负 y 方向,那末式(4-67)和式(4-69)的分子应对调,即

$$\varphi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad (4-73)$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} \quad (4-74)$$

4. 平面点涡

位于原点的一个点涡流动,画出图来很象图4-19(a),只是流线和等位线对调一下。流线是一些同心圆,等位线则是过中心的直线,如图4-22所示。

位于原点的点涡的位函数和流函数为:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (4-75)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (4-76)$$

式中 Γ 是个常数,称为点涡强度。在点涡流场中,

V_r 为零,而 $V_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$,即 V_θ 与半径 r 成反比。当 $\Gamma > 0$,则 $V_\theta > 0$,表示 V_θ 顺着 θ 增加方向。反之,当 $\Gamma < 0$,则 V_θ 逆着 θ 增加方向。我们从一个封闭圆作环量计算时,得

$$\begin{aligned} \oint V_\theta ds &= \oint \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta \\ &= \Gamma \end{aligned}$$

说明点涡强度即是环量。

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

这个式子与平面涡的诱导速度公式(4-33)完全一样,所以式(4-75)表示平面点涡的速度

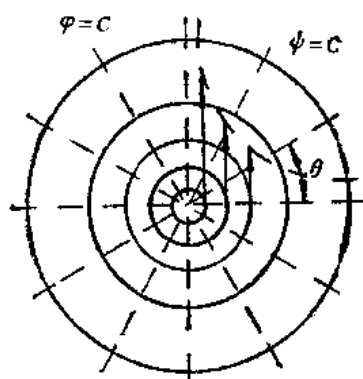


图 4-22

位，式(4-76)表示平面点涡的流函数。 V_0 这个表达式与式(4-33)一样，不适用于原点(即涡束内流体)附近。在涡束内流体象固体一样， V_0 不是与 r 成反比，而是与 r 成正比。

若点涡不在原点，而在 (ξ, η) 点，则其速度位和流函数为

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y - \eta}{x - \xi} \quad (4-77)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (4-78)$$

§ 4-6 达朗培尔疑题和儒柯夫斯基升力定理

一、绕圆柱无环量流动，达朗培尔疑题

如前所述，沿 x 轴正方向，速度为 V_∞ 的直匀流的位函数和流函数分别为

$$\varphi = V_\infty x$$

$$\psi = V_\infty y$$

如果在此直匀流中，于坐标原点叠加一负 x 方向的偶极，则可得到一新的流动，其速度位和流函数分别为

$$\varphi = V_\infty x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4-79)$$

$$\psi = V_\infty y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4-80)$$

可以证明，式(4-79)、式(4-80)代表了直匀流绕圆柱的流动。

若令偶极强度为 $M = 2\pi r_0^2 V_\infty$ ，则得

$$\varphi = V_\infty x \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) = V_\infty r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (4-81)$$

$$\psi = V_\infty y \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) = V_\infty r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (4-82)$$

式(4-82)代表了速度为 V_∞ 的直匀流绕半径为 r_0 的圆柱的流动，见图4-23所示。若 $\psi = 0$ ，则可得出零流线，它是由 x 轴和 $r = r_0$ 的周线组成。在 $r = r_0$ 外部每一点的流动都是满足无旋条件和连续方程。根据流线性质可知，若以 $r = r_0$ 的真实圆柱代表偶极子，则 $r = r_0$ 以外流场将不会发生变化。这就说明式(4-82)可以描写绕圆柱的流动。在实际问题里，我们可以调节 M 的大小来得到所需要的圆柱半径。

整个流场的速度分布为

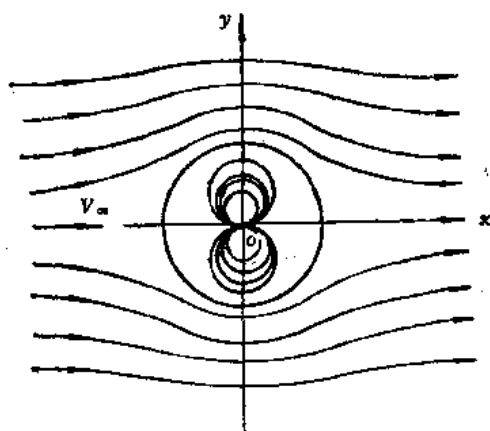


图 4-23

$$\left. \begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ V_{\theta} &= \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -V_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-83)$$

在圆柱表面上, $r=r_0$, 则有

$$\left. \begin{aligned} V_r &= 0 \\ V_{\theta} &= -2V_{\infty} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4-84)$$

V_{θ} 式中的负号的出现, 是因为 θ 的正号规定为逆时针方向。显见, 当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时,

$V_{\theta}=0$, 即说明流动中在 x 轴上有两个驻点, 而在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 和 $\theta=3\pi/2$ 处, 速度最大, 等于 $2V_{\infty}$ 。

沿 $r=r_0$ 周线上的压强分布, 可由不可压流的伯努利公式

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$$

求出。注意到 $V^2 = V_{\theta}^2$, 并将压强表示为无量纲的压强系数 C_p 形式, 可得

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (4-85)$$

上式指出, 圆柱面上的压强系数与圆柱半径、来流的速度及压强无关。故由一个圆柱面上求得的 C_p 分布, 可适用于不同来流情况及不同半径的圆柱面上。这正是引用压强系数的好处。

把式 (4-85) 求得的结果用图 4-24(a) 中标有“理论”的那条曲线表示出。

在实际的绕圆柱流动中, 由于存在粘性影响, 使气流在未达到后驻点 (B 点) 以前已离开物面, 故得不到理论上的绕流图画, 当然也得不到理论上 C_p 的分布曲线。关于分离问题, 将在第五章附面层理论中详细讨论。图 4-24 中所示的 (b), (c) 两种情况, 流体在 s 点分离, 对情况 (b), $\theta_s = \pm 120^\circ$, 对情况 (c), $\theta_s = 84^\circ$ 。对于好的绕流体如翼型, 理论结果与实验测量结果相差不是很大。

由式 (4-85) 及图 4-24 中 C_p 的理论曲线可以看出, 作用在圆柱面上的 C_p 是上下左右

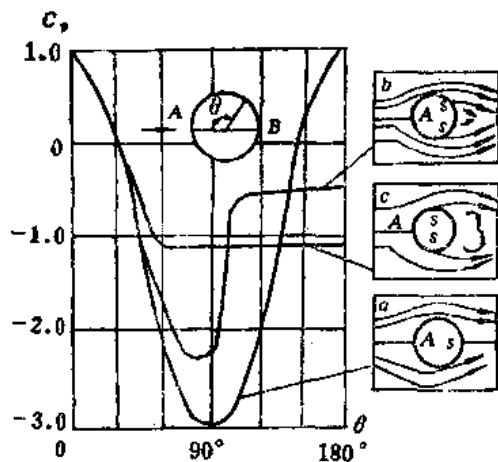


图 4-24

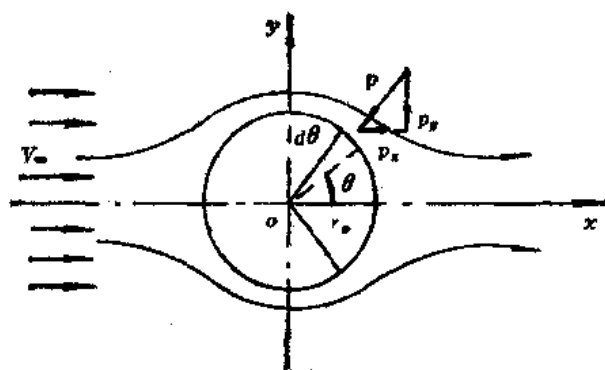


图 4-25

都是对称的, 因此可以直接看出, 作用在圆柱面上的合力等于零。我们也可以计算出作用在圆柱面的合力, 如图 4-25 所示, 取圆柱体在垂直于图纸方面为单位长度, 作用在微小面积上的压力为 dp , 该力在 x 轴及 y 轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} dp_x &= -p \cos \theta r_0 d\theta \cdot 1 \\ dp_y &= -p \sin \theta r_0 d\theta \cdot 1 \end{aligned} \right\} \quad (4-86)$$

把式 (4-85) 中 p 值改写为

$$\begin{aligned} p &= p_\infty + q C_p \\ &= p_\infty + q - 4q \sin^2 \theta \end{aligned}$$

代入式 (4-86), 再进行积分, 求得作用在圆柱面上的力

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -r_0 \int_0^{2\pi} (p_\infty + q - 4q \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = 0 \\ P_y &= -r_0 \int_0^{2\pi} (p_\infty + q - 4q \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-87)$$

式中 $q = \rho V_\infty^2 / 2$ 。上式说明作用在圆柱面上的合力等于零。

但是, 实际流动中, 一方面由图 4-24 所表明的在圆柱后面存在旋涡区, 改变了理论上该区的压强分布, 这时积分圆柱表面上的压强可得到与来流方向相同的合力, 另一方面, 由于粘性摩擦力的存在, 也增加了一部分与来流方向相同的合力。上述二部分合力组成了实际流动中圆柱所受的阻力, 这二部分阻力在理想流动中是不考虑的, 因而得出与实际情况相矛盾的结论, 称为达朗培尔疑题。虽然如此, 讨论理想流体的圆柱绕流仍然是有意义的, 因为它是一种基本解, 是研究物体阻力的起点。

二、直匀流绕有环量圆柱的流动和儒柯夫斯基升力定理

在上述流动中, 若再叠加一平面点涡, 即得到绕有环量圆柱的流动, 这对于将来说明机翼上升力产生, 具有重要意义。在绕圆柱的直匀流中, 叠加一个放在原点, 强度为 $(-\Gamma)$ 的点涡(顺时针转为负)以后, 圆柱的表面仍然是一条流线。这是因为平面点涡的流线本来就是同心圆。旋涡的方向若是顺时针, 见图 4-26, 则圆柱上表面速度就要增大, 而下表面的速度则要减小, 这样便使圆柱下表面的压强增大, 上表面的压强减小, 从而得出垂直气流方向的合力, 即 y 方向的力, 称为升力 Y 。

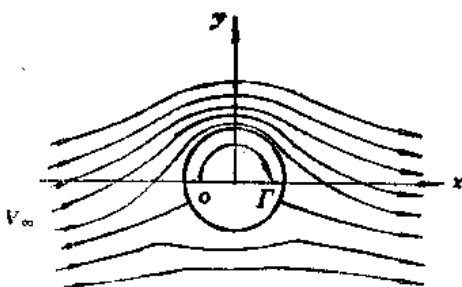


图 4-26

根据叠加原理, 由式 (4-81)、式 (4-82)、式 (4-75)、式 (4-76) 等, 得流动的速度位及流函数:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= V_\infty r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi &= V_\infty r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \right\} \quad (4-88)$$

在极坐标中, 两个分速是

$$\left. \begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \\ V_{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4-89)$$

流函数等于不同的常数，可得流线族， $r = r_0$ ， $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_0$ 代表绕物面流线。式 (4-88) 中应取 $r \geq r_0$ ，在物面上 $V_r = 0$ ，

$$V_{\theta} = -2V_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \quad (4-90)$$

将 V_r 、 V_{θ} 代入伯努利公式，可求出圆柱表面各点压强为

$$p = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} (V_{\infty}^2 - V_{\theta}^2) \quad (4-91)$$

现在求作用在圆柱上的合力，类似以前的方法，取圆柱体在垂直纸面方向的长度为 1 单位长度，在圆柱面上取微面积 ds ，见图 4-25，作用在上面的压强为 p ，则

$$dP_x = -p r_0 \cos \theta d\theta$$

$$dP_y = -p r_0 \sin \theta d\theta$$

将式 (4-90) 和式 (4-91) 代入上式，并进行积分，得作用在圆柱面上的力

$$\begin{aligned} P_x &= - \int_0^{2\pi} \left(p_{\infty} + \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \right) r_0 \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} r_0 4 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_{\infty}}{\pi r_0} \Gamma r_0 \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} r_0 \cos \theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4-92)$$

$$\begin{aligned} P_y &= - \int_0^{2\pi} \left(p_{\infty} + \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} \right) r_0 \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} 4 r_0 \sin^3 \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{\pi r_0} r_0 \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} r_0 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{\pi r_0} r_0 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{\pi} \pi \\ &= \rho V_{\infty} \Gamma \end{aligned} \quad (4-93)$$

上式表示了一个重要结论，即理想气体流过有环量的圆柱体时，作用在圆柱体上的合力只有升力。作用在单位长度圆柱体上的合力等于流体的密度、无穷远流速和速度环量三者的乘积。升力方向由 Γ 决定，当 Γ 为负值时（相当于圆柱体顺时针旋转），升力向上；当 Γ 为正值时（相当于圆柱体逆时针旋转），升力向下。理论可证明式 (4-93) 不仅适用于圆柱，而且对于任意形状的翼剖面也是适用的，这就是儒柯夫斯基升力公式。

有了环量，圆柱体上才会有 y 向的合力，这也可以从圆截面的上压强分布直接看到。图 4-27 把 $\Gamma = 0$ 及 $\Gamma = 2\pi V_{\infty} r_0$ 的压强分布作对比。无环量时，上半圆（ θ 由 0 至 π ）上的压

强分布和下半圆 (θ 由 π 至 2π) 上的压强分布对称, 结果合力为零。有环量之后, 上半圆上的负压远远超过下半圆上的负压, 所以有一个向上合力, 即升力。

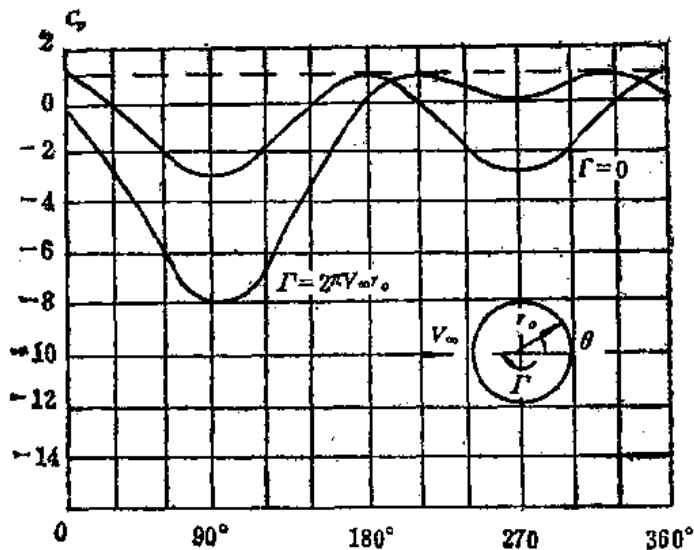


图 4-27

练习题

4.1 什么叫涡线? 什么叫涡管?

4.2 已知定常不可压平面流场的速度分布为

$$V_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad V_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

问此种流动是否有旋转角速度? 是否连续? Q 为常数。

4.3 设有空气的某个流动速度场为

$$V_x = 6(x + y^2) \quad V_y = 2y + z^3 \quad V_z = x + y + 4z$$

试分析这种流动是否连续?

4.4 流体运动具有分速

$$\begin{cases} V_x = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ V_y = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ V_z = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

试问这个流场是否有旋? 如果无旋, 求出其速度位函数。

4.5 有不可压缩流体作定常运动, 其速度场为

$$\begin{cases} V_x = ax \\ V_y = ay \\ V_z = -2az \end{cases}$$

式中 a 为常数。求:

- (1) 线变形率、角变形率;
- (2) 流场是有旋还是无旋;

(3) 有否位函数存在。

4.6 设下列几种函数, 分别代表流动的三个分速

- (1) $V_x = Kx, V_y = -Ky, V_z = 0$;
- (2) $V_x = Kx, V_y = -Ky, V_z = -Kx$;
- (3) $V_x = Kx, V_y = -Ky, V_z = Kz$;
- (4) $V_x = x(y+z), V_y = y(x+z), V_z = -z(x+y) - z^2$;
- (5) $V_x = K(x^2 + xy - y^2), V_y = y(x+z), V_z = 0$ 。

K 是常数, 问哪几种情况可以代表不可压流动?

4.7 设不可压流动 $\psi = 3x^2y - y^3$, 问是否有位函数存在? 如有, 求其位函数。

4.8 给定流场的速度分布如下

$$V_x = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{(x-3)^2 + y^2} \quad V_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x-3}{(x-3)^2 + y^2}$$

求沿给定如图 4-28 围线的环量:

- (1) 图 4-28 中 (a) 所示 $ABCD$ 围线;
- (2) 图 4-28 中 (b) 所示以 $(0, 3)$ 为圆心, 半径为 1 的圆。

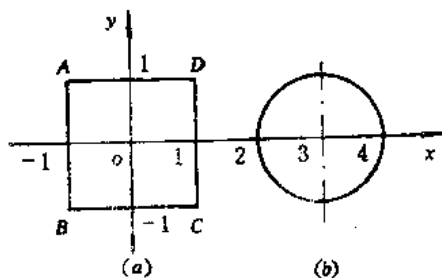


图 4-28

4.9 已知一个二维不可压位流速度位函数是

$$\varphi = -V_\infty \cos\theta \left[r + \frac{a^2}{r} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

式中 a, V_∞, Γ 均为已知正常数, r, θ 为平面极坐标。问这种流动由哪些基本流动叠加而成的?

4.10 有两个同强度 Q 的点源, 一正一负, 分别位于原点的两侧, 相距 $2a$, 其连线与正 x 轴成 45° 求证当 $a \rightarrow 0$, 而 $2aQ$ 保持为常数 M 时其流函数为

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y-x}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

第五章 附 面 层

前面几章研究的都是理想流体（忽略粘性）的流动规律。自然界中存在的流体都具有粘性。对于空气这类粘性很小的流体流过飞行器的实际流动，理论和实验表明，粘性影响只限于物体附近很薄的一层（称为附面层）内。在这种情况下，只要附面层不分离，粘性的存在对压强分布影响很小，因此可用理想流体理论来计算沿飞行器表面的压强分布及由压强分布决定的气动特性。这就是以前着重研究理想流体流动规律的理由。

但是，由于粘性的存在对飞行器的一些气动特性也要产生重要影响。首先是使飞行器受到一个摩擦阻力；其次是使飞行器表面在高速飞行时受到热的作用；再次是附面层内气流受到粘性作用，使其动能不可逆的损失，使沿飞行器表面压强分布与理想流体的理论计算值有差异。当附面层不出现分离时这种差异很小，附面层分离后这种差异就很大，发生所谓分离现象。

研究附面层的目的，在于解决估算飞行器摩擦阻力，求出气流给飞行器表面各点的热流量。通过对附面层本质的了解寻求减少摩擦阻力，压差阻力和减轻气动加热的设计措施。显然对于一个设计工作者来说，了解这些问题是很重要的。

本章先介绍粘性流动中的一些基本现象，然后引出附面层概念。在附面层概念的基础上，先讨论平板低速摩擦阻力的计算，然后讨论低亚音速绕曲面流动的附面层分离问题，最后讨论高速附面层及气动热问题。

本章讨论的摩擦阻力计算只限于平板情况，对于曲面物体（例如机翼、机身）的摩擦阻力，大多可用平板的结果加以修正而得到。

§ 5-1 附面层的基本概念

一、粘性流体与理想流体

有一真实流体（有粘性）以 V_∞ 顺着板面流过一个固定不动的平板，在平板法线上各点测量速度，则紧贴平板上的流体速度为零，然后向外逐渐增加到 V_∞ 。其速度型（法线上各点速度 V_x 的端点连线）如图5-1(a)所示。在固体边界上流体与固体之间没有相对运动，称为

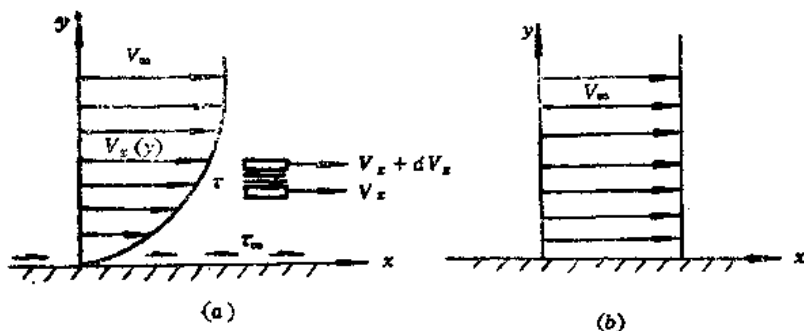


图 5-1

无滑移条件。这是由于物体表面不是绝对光滑的，且对流体分子有粘附作用，所以紧贴物体表面的一层流体受到阻滞和粘附，流体速度为零。这层速度为零的流体又通过粘性作用影响上一层流体，使上层流体速度减小，这样一层层地影响下去，在紧贴物面的地方就出现了流速沿法线方向逐渐增大的速度型。如果略去流体的粘性，即把流体视为理想流体，紧挨物体上一层流体由于没有粘性，将以某个速度滑过固体边界。对平板来说，其速度型如图 5-1(b) 所示。

在理想流体中，流体与流体之间及流体与固体边界之间只有法向应力（压强）的作用。在粘性流体中，还有切向力的作用。单位面积上的切向力称为摩擦应力，用 τ 表示。由第一章可知，根据牛顿摩擦定律

$$\tau = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (5-1)$$

式中 μ 为流体的动力粘性系数。如图 5-1(a) 所示，两层无限接近的流体之间，速度较大的上层流体给下层流体的摩擦应力 τ 指向右。下层流体给上层流体的 τ 指向左。流体给物体表面上的摩擦应力为 τ_w ，且

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_w \quad (5-2)$$

τ_w 作用的总和构成流体流过物面时，给予物面的摩擦阻力。理想流体 $\mu = 0$ ，无摩擦阻力及其它粘性效应存在。故得出与实际不符的阻力为零的结论，即第四章中所讲的达朗培疑题。

可见，在固体边界上无滑移条件和摩擦应力的存在，是粘性流体与理想流体的差异。

二、粘性流动的两种流态——层流和紊流，雷诺数

先来观察一个简单的雷诺试验。其装置如图 5-2 所示。先把节门 B 打开，水从管中流出。然后再打开阀门 A，颜色液随水流出。当管内流速不大时，管中色液规则地沿着管道流动，呈一条清晰可见的色线，如图 5-3

(a) 所示，说明流体微团都沿着管轴方向流动，相邻各层之间没有无规则的脉动，而是“层状”地流动，这种流动称为层流。如开大节门 B，流速加大，色线开始波动如图 5-3(b) 所示。如再开大节门 B，流速再加大，下游已看不到有规则的色线，色液和水混合在一起了，如图 5-3(c) 所示。这说明当流速大到一定程度后，流体微团不再作有规则成层的流动，而各层流体作复杂的、无规则的、随机的不定常的运动，这种流动称为紊流。

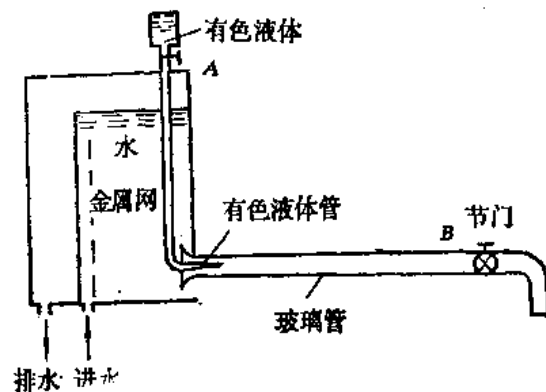


图 5-2

雷诺采用各种直径的圆管以及粘性系数不同的各种流体作了一系列实验发现，管道中紊流出现并不单纯地取决于流速、管径或流体的种类，而取决于组合参数 $(\rho V D / \mu)$ ，此数为雷诺数

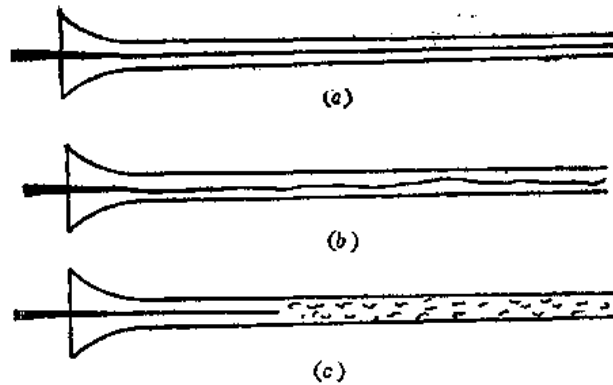


图 5-3

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (5-3)$$

式中 ρ 为流体密度;
 μ 为流体的动力粘性系数;
 D 为管子直径;
 V 为管内平均流速。

如引用运动粘性系数, $\nu = \mu/\rho$, 则 Re 数可写成

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (5-4)$$

Re 数是一无量纲(避开具体单位大小, 用一些符号来代表物理量的单位, 这些符号称为量纲, 或称因次)数。由层流转变为紊流的现象, 称为转换。这种转变, 在管内流动时 $Re > 2300$ 左右时很易发生, 一般称这一发生转变的最低雷诺数为“下临界雷诺数”, 或简称“临界雷诺数”。如果进入圆管之前的流体比较稳定, 圆管入口形状做得比较光滑, 则发生转变雷诺数可大大高于 2300 (例如, 可达 24000 以上)。一般称发生转变的最高雷诺数为“上临界雷诺数”。但是, 对上临界雷诺数很难说出一个确定的数, 因为它跟流动的原始稳定情况有关。一般来说, 当雷诺数小于下临界雷诺数 (2300) 左右时, 流动总能保持层流。所以, 下临界雷诺数有较大的实用意义。

如前所述, 紊流中流体微团作复杂的、无规则的、随机的非定常的运动, 所以紊流是一种紊乱的非定常流, 各流动物理量对于时间和空间坐标来说, 呈现着随机性的脉动 (服从统计规律), 图 5-4 表示空间某点在 x 轴方向速度随时间变化的情况。即 $V_x = \bar{V}_x(x, y, z, t)$, $\dots$ 。 $\bar{V}_x$ 不是普通函数, 而是随机函数。对于像紊流那样非定常流, 初始条件很难给定, 而追求紊流流动的结果细节是十分困难的, 而且并非总是必要, 为此我们主要研究其流动物理量的平均值。所以, 通常把各种物理量, 例如 V_x , 表示成为平均量 $\bar{v}_x$ 和脉动量 V'_x 之和

$$V_x = \bar{v}_x + V'_x$$

对流动物理量有各种取平均的方法, 我们这里

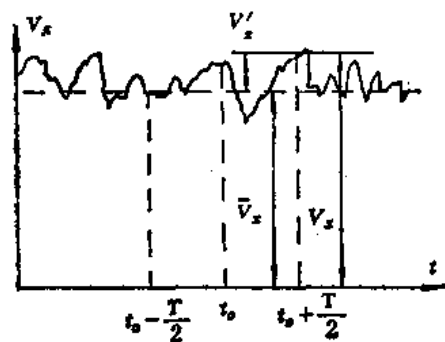


图 5-4

按时间取平均, 这种平均称为时均值。时均值定义是

$$\bar{V}_x(x, y, z, t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} V_x(x, y, z, t) dt \quad (5-5)$$

式中 T 是一个取平均用的时间间隔, 其值比脉动周期大得多, 但它应远小于平均运动的特征时间 (如流经物体长度所需时间)。一般来说, 取平均值后的物理量 $\bar{V}_x$ 仍是时间 t_0 和空间坐标的函数, 这种紊流称为非定常紊流。如果时均值 $\bar{V}_x$ 与 t_0 无关, 则称为定常紊流, 这时时均值 $\bar{V}_x$ 表示为

$$\bar{V}_x(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V_x(x, y, z, t) dt \quad (5-6)$$

本书只讨论定常紊流。 $\bar{V}_y$ 、 $\bar{V}_z$ 、 $\bar{p}$ ……也有类似的定义。因此空间任一点的物理量可写为

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \bar{V}_x + V'_x \\ V_y &= \bar{V}_y + V'_y \\ V_z &= \bar{V}_z + V'_z \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

脉动值的时间平均值显然为零, 例如

$$\begin{aligned} \bar{V}'_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V'_x(x, y, z, t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (V_x - \bar{V}_x) dt \\ &= \bar{V}_x - \bar{V}_x = 0 \end{aligned}$$

为了表示脉动量的大小, 需用脉动值平方的时均值

$$\overline{(V'_x)^2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (V'_x)^2 dt$$

通常用脉冲速度在 x 方向的分量的均方根 $\sqrt{\overline{(V'_x)^2}}$ 与速度时均值 $\bar{V} = \sqrt{\bar{V}_x^2 + \bar{V}_y^2 + \bar{V}_z^2}$ 之比来表示脉动的大小, 即

$$e = \frac{\sqrt{\overline{(V'_x)^2}}}{\bar{V}} \quad (5-8)$$

e 称为紊流度。在普通风洞中 e 小于 1%。

将紊流流动物理量的瞬时值看作为时均值和脉动值之和, 仅考虑时均值的紊流称为时均紊流。以后凡是讨论到紊流时, 都是指时均紊流, 为了叙述及书写方便, 略去“时均”两字。但是必须注意, 时均紊流毕竟是一种简化模型, 它虽然在不少问题上反映了实际情况, 但对某些在本质上涉及到紊流脉动现象的物理量来说, 还必须考虑脉动的影响, 例如紊流中的摩擦应力, 不能再用牛顿摩擦定律 (5-1) 式来计算。因为紊流中两层流体间除存在分子级的动量交换外, 还存在流体微团级动量交换, 由此产生的速度脉动量, 将增大两层间的摩擦应力, 此时摩擦应力要比 (5-1) 式计算的大得多。

三、雷诺数的物理意义

前面我们已提到量纲概念, 单位和量纲是有区别的, 如长度的量纲表示的是线位移的定挂概念, 并没有指明具体的大小, 而长度的单位——米, 就表示线位移的确实大小。同样, “尺”也是长度的一种单位, 米和尺是不同的长度单位, 但是它们具有相同的量纲。对国际

单位制，常用 L 表示长度的量纲，用 M 表示质量的量纲，用 T 表示时间的量纲。其它力学物理量的量纲由这三个基本量纲组合起来表示。用符号表示时（用方括号括起来时，表示它的量纲），长度的量纲为

$$[x] = L$$

速度的量纲为

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

力的量纲为

$$[F] = [\text{质量}][\text{加速度}] = M \frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$$

压强的量纲为

$$[p] = \frac{[\text{力}]}{[\text{面积}]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

管道直径 D 的量纲为 L ，写为

$$[D] = L$$

如果一个量是无量纲的，则写为 1，如 Re 数的量纲写为

$$[Re] = \left[\frac{VD}{\nu} \right] = \frac{\frac{L}{T} L}{L^2 T^{-1}} = L^0 T^0 = 1$$

可见 Re 数是一无量纲的量。

Re 数的大小反映了流体具有的惯性力与受到的粘性力之比。下面作粗略的说明。

惯性力 $\sim$ 质量 $\times$ 加速度 $\sim$ 密度 $\times$ 体积 $\times$ 加速度，即惯性力 $\sim \rho l^3 l/t^2 \sim \rho l^2 l^2/t^2 = \rho l^2 V^2$ ，其中 ρ 是流体的密度， l 是特征长度（如管道直径、机翼弦长等）， V 是特征速度（如管道中流体流动的平均速度、相对于飞机的来流速度等），符号 $\sim$ 表示相当于的意思。

粘性力 $\sim$ 摩擦应力 $\times$ 面积

或

$$\text{粘性力} \sim \mu \frac{V}{l} l^2 = \mu l V$$

其中 μ 为流体的动力粘性系数。

于是对于流动中的流体来说

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} \sim \frac{\rho V^2 l^2}{\mu l V} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} = Re$$

这就是说， Re 数相当于运动流体微团具有的惯性力与受到的粘性力之比。因此 Re 数越小的流动，粘性作用越大（相对于惯性作用来说）， Re 数越大的流动，粘性作用越小。

四、附面层概念

1. 定义

下面我们来观察气流流过平板时，沿平板法线方向气流的速度分布，如图 5-5 所示。正如前面所述，由于无滑移条件，紧贴着平板表面处的气流速度为零，在很小的距离内增至远前方来流的速度。我们将紧贴着物面、沿着平板法线方向速度变化很大这一层称为附面层。

在航空中有实际意义的问题都属于大 Re 数下的流动问题。例如 $V_\infty = 100$ 米/秒, 翼弦 $b = 1$ 米, 空气在 15°C 时 $\nu = 1.467 \times 10^{-6}$ 米²/秒, 则 $Re = V_\infty b / \nu \approx 6.8 \times 10^6$ 。后面我们将看到, 对应大雷诺数的情况下, 紧贴物面法线方向速度变化很大这一层, 将是十分薄的。在这个很小距离内, 速度梯度很大, 因而摩擦应力 τ (粘性作用的体现) 是不能忽略的。所以附面层是紧贴物体表面受粘性影响显著的一薄层。通常取流速达到 $0.99V_\infty$ 处, 为附面层外部边界。由平板表面到该处的距离称为附面层厚度, 用 δ 表示, 如图 5-6 所示。空气沿物面流过距离越长, 附面层也越厚。在附面层外部, 由于法向速度梯度很小, 所以可以把粘性力略去不计。

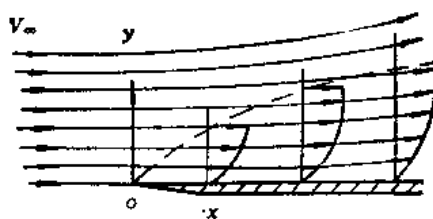


图 5-6

可见在大雷诺数情况下, 粘性力不可忽略的流动只限于物面附近一薄层内——附面层。除此薄层及物体后面遗留下的充满旋涡的“尾流区”外, 如图 5-7 所示, 流场整体可以当作无粘性流动处理。引入了附面层概念之后, 这样就肯定了理想流体有关理论 (如位流理论) 是有意义的, 它可以用来处理附面层外的主流流场, 薄薄的附面层的存在并不会改变主流的基本面貌, 只是相当于物体轮廓略为放大了一点, 这只要略作修正就行了。在附面层里按粘性流体处理。

2. 附面层内沿物面法线压强不变

在附面层内有一个极其重要特点。如果沿垂直于平板或机翼表面的法线方向 (以 y 表示) 测量附面层沿着 y 方向的静压强 p 的变化, 其结果是压强 p 在附面层内沿着 y 方向几乎是不变的, 即

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5-9)$$

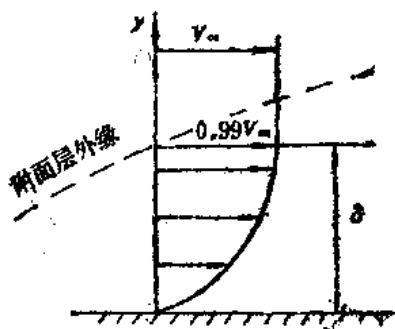


图 5-8



图 5-7

这是一个非常重要的结论, 它使得理想流体的结论有实际意义。我们可以用理想流体理论计算出附面层外缘各点的压强, 因有 $\partial p / \partial y = 0$, 得到物面上各点对应点的压强。

3. 附面层对附面层外流体的影响, 位移厚度

附面层厚度 δ 是人为规定的, 有任意性。现在再定义一个位移厚度 δ^* , 这个厚度含义确切, 物理意义明确。所谓位移厚度 δ^* 就是由于在附面层内速度降低而要求通道加宽, 即全部粘流所占的通道比无粘 (理想流体) 流动应占通道所加宽的部分就是位移厚度, 如图

5-8所示。就是说粘性流体与理想流体同时流过相同的物面时，由于粘性流体中附面层的影响，使物面流线被挤出去 δ^* 距离。设有速度 V_∞ ，密度为 ρ_∞ 的气流流过一平板，在 x_1 点处因粘性影响，而减少的质量流量是 $\int_0^\infty (\rho_\infty V_\infty - \rho V_x) dy$ ，这些减少的质量流量要在主流中挤出 δ^* 距离而流过去。因两个质量流量相等得 δ^*

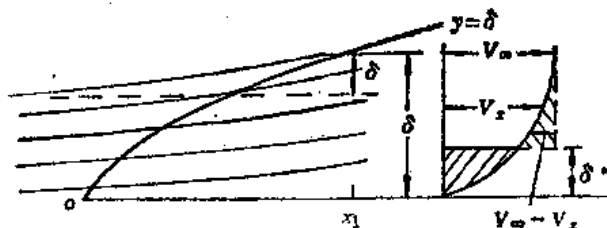


图 5-8

$$\rho_\infty V_\infty \delta^* = \int_0^\infty (\rho_\infty V_\infty - \rho V_x) dy$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho V_x}{\rho_\infty V_\infty} \right) dy \quad (5-10)$$

δ^* 称位移厚度。它的大小表示了由于粘性作用附面层内质量流量减小（与理想流体相比）的程度。由于这种减少将迫使流线外移。如果是不可压流，位移厚度式 (5-10) 改写为

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{V_x}{V_\infty} \right) dy \quad (5-11)$$

由图 5-8 右边画有阴影线的两块面积相等，同样说明了上述等式。注意 δ^* 是指物体表面上流线外移的值。

物面为曲面物体时，位移厚度为

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho V_x}{\rho_s V_s} \right) dy \quad (5-12)$$

式中 ρ_s 和 V_s 分别是理想流体理论求得的物面上对应的密度和速度，也可以近似认为附面层外边界上的速度和密度。

显然位移厚度是 x 的函数， $\delta^* = \delta^*(x)$ ，离前端越远，位移厚度越大。

根据上述可知，对于理想流体有关理论（如位流理论）计算得到的物面压强分布，考虑到实际流动的粘性影响，只需在物面上加上 δ^* 位移厚度。经过修正后的物面，用位流理论计算得到的结果，便是计及了粘性影响的压强分布。一般情况下 δ^* 仅是 δ 的几分之一。

4. 层流附面层与紊流附面层

附面层内的流态亦有层流与紊流二种。附面层内流态受许多因素影响，例如 Re 数增加，来流的紊流度增加，表面粗糙度增加，主流的逆压梯度以及激波干扰或压强的脉动等因素，促使层流变成紊流。因此流体流过物面时不象管内流动那样存在一个固定不变的临界 Re 数（圆管 $Re_{临} = 2300$ ），可以依此来判定附面层内的流态。

当附面层内的流态为层流时，称层流附面层。当附面层的流态为紊流时，称紊流附面层。但更多的情况是：前面一小段为层流，后面一长段为紊流，中间有一个很短的过渡区，称为转换区，如图 5-9 所示。值得注意的是在紊流区中，紧靠物面的一层仍然保持层流，称层流底层。这是由于物面存在迫使流体微团只能作平行物面的运动的结果。

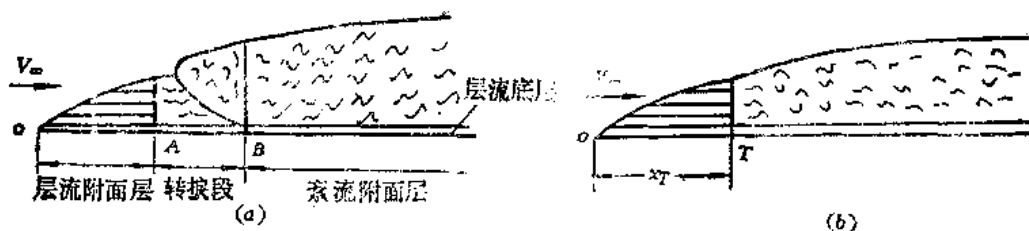


图 5-9

层流附面层和紊流附面层有许多重要差别。首先是紊流附面层较层流为厚，且增长得快。这是由于紊流附面层中流体微团在横向有脉动，从而加大了粘性影响范围的结果。如在低速平板时，层流 $\delta \sim x^{1/2}$ ；紊流 $\delta \sim x^{1/5}$ ；层流 $\delta/x \sim Re^{-1/2}$ ；紊流 $\delta/x \sim Re^{-1/5}$ 。从这里可以看到，在相同 Re 数下，紊流附面层的厚度比层流的厚；随 x 增大，紊流附面层厚度比层流增长得快（详见本章第二节）。

其次，紊流附面层的速度型较层流的丰满，见图 5-10 所示。这也是紊流中的流体微团横向脉动，从而使附面层内速度分布趋于均匀的结果。

紊流附面层对物体产生的摩擦力要比层流大得多。这也是紊流中各层之间有流体微团级的动量交换，而层流各流层之间仅有分子级的动量交换之故。

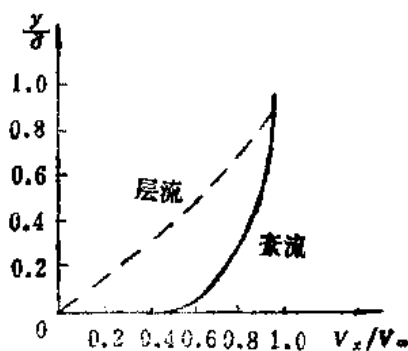


图 5-10

§ 5-2 不可压流平板附面层

研究附面层的目的之一是要计算气流作用于物体表面上的摩擦力。计算附面层内的摩擦阻力，通常有两种方法，一种是求解附面层内的微分方程组，计算复杂；另一种是对附面层中建立动量关系式，由此导出一个基本积分关系式，这种方法是一种比较简单的近似方法，工程实用上采用这种方法。下面讨论这种方法。

一、不可压流附面层的动量积分关系式

设有气流流过二维物面如图 5-11 所示。取 x 轴沿物面， y 轴与之相垂直。在附面层中取长为 dx 的微小控制区 $ABCD$ （垂直纸面的宽度为 1）。设附面层中的流动为定常流动，则从 AB 每秒流进控制区的质量为

$$m_{AB} = \rho \int_0^{\delta} V_x dy$$

从 $CD (= \delta + d\delta)$ 每秒流出控制区的质量为

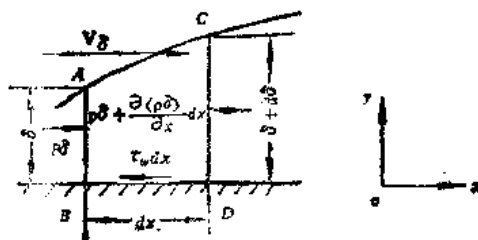


图 5-11

$$m_{CD} = m_{AB} + \frac{dm_{AB}}{dx} dx$$

根据质量守恒, 通过 AC 每秒流进这控制区的质量必为

$$m_{AC} = m_{CD} - m_{AB} = \frac{dm_{AB}}{dx} dx = \rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta V_x dy \right] dx$$

将动量定理应用于这控制区。根据定常流中的动量定理, 每秒钟流出去的动量减去流进来的动量等于控制区外边界上作用的力的合力 (忽略质量力)。我们将用其在 x 方向上的投影形式。

通过 AB 每秒在 x 方向流进的动量为

$$K_{AB} = \rho \int_0^\delta V_x^2 dy$$

通过 CD 每秒在 x 方向流出的动量为

$$K_{CD} = K_{AB} + \frac{dK_{AB}}{dx} dx$$

AC 面为附面层的外边界, 在外边界的 x 向分速度为 V_δ , 则通过 AC 每秒在 x 方向流进的动量为

$$K_{AC} = m_{AC} \cdot V_\delta$$

这样, 我们就得出每秒流过控制区净流出 x 方向的动量为

$$\begin{aligned} K_{CD} - K_{AB} - K_{AC} &= \frac{dK_{AB}}{dx} dx - V_\delta \frac{dm_{AB}}{dx} dx \\ &= \rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta V_x^2 dy \right] dx - \rho V_\delta \frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta V_x dy \right] dx \end{aligned} \quad (5-13)$$

再计算作用于这控制区外边界处的外力在 x 方向的投影。各边界处作用的 x 向力如下:

AB 面: $p\delta$,

$$CD \text{ 面: } - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta) \approx -p\delta - p d\delta - \delta \frac{\partial p}{\partial x} dx,$$

BD 面: $-\tau_w dx$,

式中 τ_w 为壁面处单位面积上的摩擦力。

$$AC \text{ 面: } p ds \frac{d\delta}{ds} = p d\delta,$$

AC 面为附面层外边界, 作用在它上面的力只有压强 p , 无摩擦力。 ds 为 AC 的长度, $d\delta/ds$ 是 AC 与 x 轴夹角的正弦。

作用在控制区外边界上的外力在 x 方向的投影之和为

$$\begin{aligned} p\delta - p\delta - p d\delta - \delta \frac{\partial p}{\partial x} dx - \tau_w dx + p d\delta \\ = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} dx - \tau_w dx \end{aligned} \quad (5-14)$$

引用动量定理, 式(5-13)与式(5-14)相等, 得

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x^2 dy - \rho V_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w \quad (5-15)$$

上式中的 $\partial p / \partial x$ 换成了 dp/dx ，是因为附面层内 p 只是 x 的函数。式 (5-15) 就是动量积分关系式。这关系式对层流或紊流均适用。

二、平板层流附面层的计算

设来流速度为 V_∞ 的气流平行于平板流过，在平板上形成层流附面层如图 5-12 所示。顺流动方向放置的平板是最简单的流线

体，其阻力是唯一地由摩擦应力构成。由平板所求得的关系式，如 $\delta = \delta(x)$ 和摩擦阻力系数，可近似地估算其它流线形物体，如薄翼的摩擦阻力。因此我们研究平板附面层的计算。

由于附面层很薄，它对层外理想流体的运动的影响可以忽略不计，即可认为

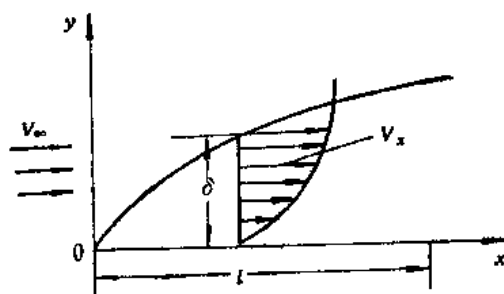


图 5-12

$$p \approx \text{常数} = p_\infty$$

$$V_\infty \approx V_\infty$$

按照牛顿粘性定律

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

将这些式子代入式 (5-15) 得到平板的动量积分关系式

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x^2 dy - \rho V_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x dy = -\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5-16)$$

此式含有二个未知函数 $\delta(x)$ 和 $V_x(x, y)$ ，要解出它们，还须找一个补充关系式。补充关系式通常是根据实验结果，假设一附面层内的速度分布，即假设一个函数

$$V_x = f(x, y)$$

代入式 (5-16) 解出 $\delta(x)$ 来，从而解决附面层内其它参数的计算。

由于假设的速度分布很难完全符合真实情况，这就是积分关系式的近似之处。但由于它简单，工程上应用很广。

1. 附面层内速度分布

由图 5-12 所示，在一定 x 处，附面层内的速度分布 $V_x = f(x, y)$ ，假设为这样一个多项式

$$V_x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \dots$$

实验证明，在这多项式中，保留前三项，即可与实验测得流速分布曲线吻合较好。即

$$V_x = f(x, y) = a + by + cy^2 \quad (5-17)$$

式中 a, b 与 c 只是 x 的待定函数，与 y 无关。利用附面层外缘处的边界条件可确定 a, b 与 c 。

(1) 在物面上, 速度为零, 即

当 $y=0$ 时, $V_x=0$;

(2) 在附面层外边界处, 速度必须与层外理想流体速度相等, 对于平板

当 $y=\delta$ 时, $V_x=V_\infty$;

(3) 在附面层外边界上, 摩擦应力为零, 即

$$\text{当 } y=\delta \text{ 时, } \frac{\partial V_x}{\partial y}=0。$$

将这三个条件, 代入式(5-17)求出

$$a=0, \quad b=\frac{2V_\infty}{\delta}, \quad c=-\frac{V_\infty}{\delta^2}。$$

这样就得出了近似的速度分布

$$\frac{V_x}{V_\infty} = \frac{2}{\delta} y - \frac{1}{\delta^2} y^2 \quad (5-18)$$

2. 附面层厚度 $\delta(x)$ 与位移厚度 $\delta^*(x)$

将式(5-18)代入式(5-16)确定 $\delta(x)$ 。先分别算出下列二个积分

$$\int_0^\delta V_x dy = V_\infty \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) dy = \frac{2}{3} V_\infty \delta$$

$$\int_0^\delta V_x^2 dy = V_\infty^2 \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) dy = \frac{8}{15} V_\infty^2 \delta$$

又
$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=0} = b = \frac{2}{\delta} V_\infty$$

代入式(5-16)得

$$\frac{1}{15} \rho V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu}{\delta} V_\infty$$

分离变量, 积分 ($x=0$ 时, 在平板前缘 $\delta=0$)

$$\int_0^\delta \delta d\delta = \int_0^x \frac{15\mu}{\rho V_\infty} dx$$

$$\delta^2 = \frac{30\mu x}{\rho V_\infty}$$

$$\delta = 5.477 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_\infty}} = \frac{5.477 x}{\sqrt{Re_x}} \quad (5-19a)$$

或

$$\frac{\delta}{l} = 5.477 \sqrt{\frac{x}{l}} \sqrt{\frac{1}{Re}} \quad (5-19b)$$

式中: l = 平板长度;

$$Re = \frac{\rho V_\infty l}{\mu} \text{——平板雷诺数,}$$

$$Re_x = \frac{\rho V_\infty x}{\mu} \text{——当地雷诺数,}$$

由上式可看出, 平板层流附面层的厚度 δ 随 x 的增加, 按 $(x)^{1/2}$ 的比例增加。还看出 $(\delta/l) = Re^{-1/2}$, 当 $Re \gg 1$ 时, $\delta \ll l$, 这与附面层很薄的前提是相符合的。

下面来计算 $\delta^*(x)$, 由式(5-11)改写为

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{V_x}{V_{\infty}}\right) dy + \int_{\delta}^{\infty} \left(1 - \frac{V_x}{V_{\infty}}\right) dy$$

在 $y \geq \delta$ 处, $V_x \approx V_{\infty}$, 则上式为

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{V_x}{V_{\infty}}\right) dy \quad (5-20)$$

将式(5-18)代入式(5-20), 得

$$\begin{aligned} \delta^* &= \delta - \int_0^{\delta} \left(\frac{2}{\delta}y - \frac{1}{\delta^2}y^2\right) dy = \frac{1}{3}\delta \\ \therefore \delta^* &= 1.826 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_{\infty}}} \end{aligned} \quad (5-21)$$

注意位移厚度 δ^* , 在本情况下只有附面层厚度 δ 的 $1/3$ 。

3. 当地摩擦系数

求得了 $\delta(x)$ 后, 就可求得平板的表面摩擦应力 τ_w 。

$$\tau_w(x) = 2\mu \frac{V_{\infty}}{\delta} = 0.365 \sqrt{\frac{\mu \rho V_{\infty}^3}{x}} \quad (5-22)$$

由上式看出, τ_w 随 x 的增加按 $1/(x)^{1/2}$ 的比例减小, 这是因为越往下游附面层越厚。速度梯度 $(\partial V_x / \partial y)$ 就越小, 从而 τ_w 就下降。通常用无量纲的当地摩擦系数 c_f 来表示, c_f 的定义是

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} \quad (5-23)$$

应用式(5-22)得

$$c_{f\text{层}} = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}} = 0.730 \sqrt{\frac{l}{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (5-24)$$

从上式看出, 平板雷诺数 Re 越大, c_f 越小; 其次, 在一定 Re 下, 越靠近前缘, l/x 越大, c_f 越大。这是因为外边界处速度总是 V_{∞} , 所以离前缘近的地方, $\partial V_x / \partial y$ 较大, 因而 c_f 较大。 $\delta(x)$, $c_f(x)$ 与 x 的曲线如图 5-13 所示。

4. 平板摩擦阻力系数 C_F

现在来求宽为 b 的平板一个表面所受的摩擦阻力 X_F 。作用在微面积 $dS = bdx$ 上的摩擦力为

$$\tau_w dS = \tau_w b dx$$

作用于平板一个表面的总摩擦力为

$$\begin{aligned} X_F &= \int_0^l \tau_w b dx = b \int_0^l 0.365 \sqrt{\frac{\mu \rho V_{\infty}^3}{x}} dx \\ \therefore X_F &= \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S \frac{1.46}{\sqrt{Re}} \end{aligned}$$

式中 $S = b \cdot l$ 是平板一个表面的面积。定义平板摩擦阻力系数 C_F 为

$$C_F = \frac{X_F}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}$$

于是,得

$$C_{F\text{层}} = \frac{1.46}{\sqrt{Re}} \quad (5-25)$$

由上式可见,平板层流附面层摩擦阻力系数 C_F 与 Re 的平方根成反比。

综上所述,平板层流附面层近似解为

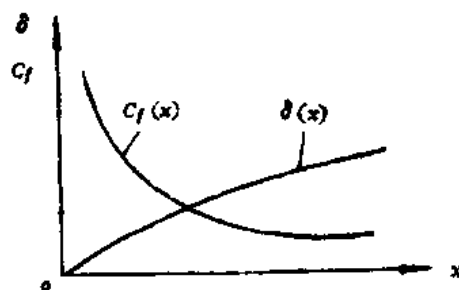


图 5-13

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 5.477 \sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}} \\ c_{f\text{层}} &= \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}} \\ C_{F\text{层}} &= \frac{1.46}{\sqrt{Re}} \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

根据附面层微分方程所求得的平板层流附面层的精确解

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 5.2 \sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}} \\ c_{f\text{层}} &= \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \\ C_{F\text{层}} &= \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

式(5-26)与式(5-27)相比较十分接近。精确理论计算结果已为实验证明是很符合实际的。可见,运用附面层积分关系式计算,方法简单,具有相当准确性。

三、平板紊流附面层

如图 5-12 所示一样,直匀流 V_∞ 平行于平板流过。假定从前缘开始就是紊流附面层,和层流时一样,紊流附面层对层外理想流体的流动的影响,也可忽略不计,即仍可近似认为

$$p = \text{常数} = p_\infty, \quad V_\delta = V_\infty$$

于是平板紊流附面层的积分关系式(5-16)变为

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x^2 dy - \rho V_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_x dy = -\tau_w \quad (5-28)$$

上式中有三个未知数 δ , V_x 与 τ_w , 需要找二个补充关系式,才能将它们解出。这二个补充关系式目前只能借助于半经验的方法。

1. 紊流附面层内的速度分布与 $\tau_w(x)$

根据实验,紊流附面层的速度型在底部较丰满。作以下假设,即以所谓七分之一次方定律来表示,即

$$V_x = V_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (5-29)$$

实验证明, 对于光滑平板, 这个假定在雷诺数小于 10^7 是符合实际情况的。

第二个假设, 也是来自实验的, 即

$$\tau_w = 0.0225 \rho V_\infty^{7/4} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{1/4} \quad (5-30)$$

2. 厚度 $\delta(x)$ 分布

将以上二式代入式(5-28)后, 得

$$\begin{aligned} \rho V_\infty^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{2/7} dy - \rho V_\infty^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} dy \\ = -0.0225 \rho V_\infty^2 \left(\frac{\nu}{\delta V_\infty} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

由于

$$\int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{2/7} dy = \frac{7}{9} \delta, \quad \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} dy = \frac{7}{8} \delta$$

所以前式变成

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{V_\infty \delta} \right)^{1/4} \quad (5-31)$$

因而

$$\delta^{1/4} d\delta = \frac{72}{7} \times 0.0225 \left(\frac{\nu}{V_\infty} \right)^{1/4} dx$$

从 $x=0$ (对应的 $\delta=0$) 积分到 x (对应的 $\delta=\delta$), 得紊流附面层厚度分布为

$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{V_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5} = 0.37 \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/5} x \quad (5-32)$$

用雷诺数表示时, 为

$$\delta = \frac{0.37x}{(Re_x)^{1/5}} \quad (5-33a)$$

或

$$\frac{\delta}{l} = 0.37 \left(\frac{x}{l} \right)^{4/5} \frac{1}{Re^{1/5}} \quad (5-33b)$$

由上式看出, 平板紊流附面层的厚度 δ 随 x 的增加, 按 $(x)^{4/5}$ 的比例增加。

3. 当地摩擦系数 $c_{f\text{紊}}$

将式(5-32)代入式(5-31)得出平板紊流附面层的摩擦应力 τ_w 为

$$\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{7}{72} \times 0.37 \times \frac{4}{5} \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/5}$$

故平板紊流附面层时的当地摩擦系数

$$c_{f\text{紊}} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = \frac{0.0576}{(Re_x)^{1/5}} \quad (5-34)$$

4. 摩擦阻力系数 $C_{F\text{紊}}$

与层流类似, 平板一个表面所受的摩擦阻力是

$$\begin{aligned} X_{F\text{紊}} &= \int_0^l \tau_w \cdot b \cdot dx = \frac{\rho V_\infty^2}{2} b \int_0^l c_{f\text{紊}} dx \\ &= \frac{\rho V_\infty^2}{2} b \int_0^l 0.0576 \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/5} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} b \times 0.0576 \times \frac{5}{4} \left(\frac{\nu}{V_{\infty} l} \right)^{1/6} \cdot l$$

故紊流平板摩擦系数

$$C_F = \frac{X_{F\text{紊}}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S} = \frac{0.072}{(Re)^{1/5}} \quad (5-35)$$

在相同的 Re 数下，紊流的 C_F 比层流大得多。如当 $Re = 10^6$ ，层流的 $C_F = 0.00146$ ，紊流的 $C_F = 0.00455$ ，紊流的 C_F 为层流的三倍多。这给我们一个重要启示，为减少摩擦阻力，应尽量设法使附面层保持为层流。

实验证明取以下值更好

$$\left. \begin{aligned} C_{F\text{紊}} &= \frac{0.0592}{(Re_s)^{1/5}} \\ C_{F\text{紊}} &= \frac{0.074}{(Re)^{1/5}} \end{aligned} \right\} \quad (5-36)$$

这说明上述计算结果相当好，与实验误差不大。如果 Re 数很大，如 $Re > 10^7$ ，则用以下经验公式更好

$$\left. \begin{aligned} c_{f\text{紊}} &= \frac{0.37}{(\lg Re_s)^{2.68}} \\ C_{F\text{紊}} &= \frac{0.455}{(\lg Re)^{2.68}} \end{aligned} \right\} \quad (5-37)$$

上述情况是在光滑平板下的 C_F 与 Re 数关系，前人已算好并载在手册中。图 5-14 上画了光滑平板层流附面层和紊流附面层的整个平板平均摩擦系数的曲线。过渡曲线是平板上既有层流附面层又有紊流附面层时的平均摩擦系数。

四、平板混合附面层

前面讨论的层流附面层计算和紊流附面层计算都是在假设自前缘至后缘全为层流或全为紊流情况下进行的。实际中更常见的是前部为层流然后经过一过渡区（即转换区）变为紊流，这称为混合附面层。因转换区通常很短故可视为一点，称为转换点。

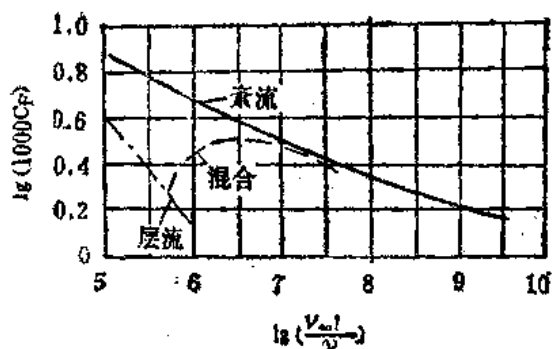


图 5-14

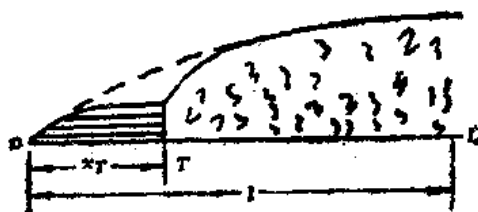


图 5-15

如图 5-15 所示，设平板长为 l ，转换点 T 到平板前缘的距离为 $OT = x_T$ ，它的摩擦可

视为前面层流段的摩阻与后面紊流段的摩阻之和。层流段摩阻计算方法如前述。因为平板上的附面层不全部为紊流,前述紊流附面层计算方法不能直接引用而须加以修改后才能应用。修改方法有几种,下面介绍一种。这种方法假设 T 点以后的这段紊流附面层的摩阻,和全部附面层都是紊流时,这段的摩阻一样。这样,只要用整个平板(长为 l)的紊流摩阻,减去 T 点以前这一段平板(长为 x_T)的紊流摩阻,就可以求出混合附面层中紊流段的摩阻了。这样整个平板混合附面层的摩阻 X_F 为

$$X_F = (X_{OT})_{\text{层}} + (X_{OL})_{\text{紊}} - (X_{OT})_{\text{紊}} \quad (5-38)$$

由式(5-27)得

$$(C_{F\text{层}})_{OT} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_T}}$$

式中 Re_T 为对应于转换点雷诺数称为临界雷诺数,即

$$Re_T = \frac{\rho V_{\infty} x_T}{\mu} \quad (5-39)$$

如果平板雷诺数 $Re < 10^7$, 则由式(5-36)可得

$$\left. \begin{aligned} (C_{F\text{紊}})_{OL} &= \frac{0.074}{(Re)^{1/5}} \\ (C_{F\text{紊}})_{OT} &= \frac{0.074}{(Re_T)^{1/5}} \end{aligned} \right\} \quad (5-40)$$

如果 $Re \geq 10^7$, 则由式(5-37)

$$\left. \begin{aligned} (C_{F\text{紊}})_{OL} &= \frac{0.455}{(\lg Re)^{2.58}} \\ (C_{F\text{紊}})_{OT} &= \frac{0.455}{(\lg Re_T)^{2.58}} \end{aligned} \right\} \quad (5-41)$$

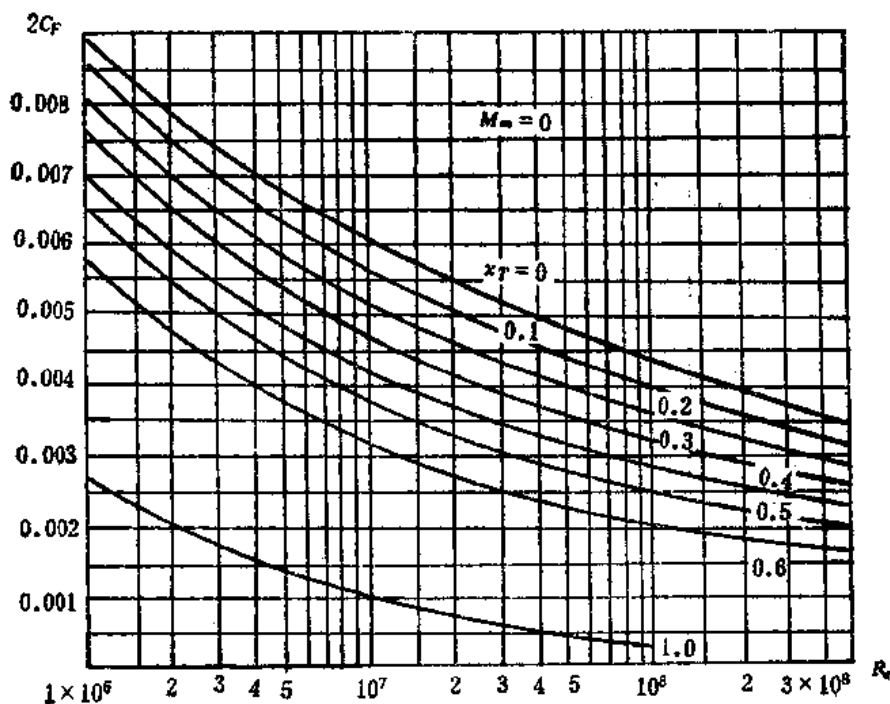


图 5-16

这样，混合附面层时，平板摩阻就可表示为

$$X_F = (C_{F\text{层}})_{OT} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b x_T + (C_{F\text{紊}})_{OL} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b l - (C_{F\text{紊}})_{OT} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 x_T b$$

式中 b 为平板宽度。换成摩阻系数

$$C_F = \frac{X_F}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b l} = (C_{F\text{紊}})_{OL} - (C_{F\text{紊}})_{OT} \frac{x_T}{l} + (C_{F\text{层}})_{OT} \frac{x_T}{l}$$

这样，在平板雷诺数 Re ，临界雷诺数 Re_T 已知后，具有混合附面层的平板摩阻系数就可自上式算出来。实际应用中，可查图 5-16 的曲线，它是在上述结果的基础上加以实验修正得到的。图中 $x_T = x_T/l = 0$ 对应全紊流情况， $x_T = 1$ ，对应全层流情况。图中的 $2C_F$ 代表平板摩擦阻力系数，平板有上下两面，所以用 2 倍 C_F 。

§ 5-3 曲面附面层的分离现象及压差阻力

前面讨论的是平板附面层，此时沿物面的压强为常数，即 $\partial p/\partial x = 0$ 。当为曲面时，沿物面存在着压强梯度，即 $\partial p/\partial x \neq 0$ 。压强梯度对低、亚音速附面层的一个重要影响是当 $\partial p/\partial x > 0$ 时可能使附面层分离。所谓附面层分离是指沿物面附面层内的气流由于粘性作用消耗了动能，在压强沿流动方向增高区域中，无法继续沿着物面流动，以致发生倒流，使气流离开物面的现象。

一、附面层的分离

取不可压流绕一圆柱体的情况来看，见图 5-17。取 x 为沿物面方向， y 为垂直物面方向。

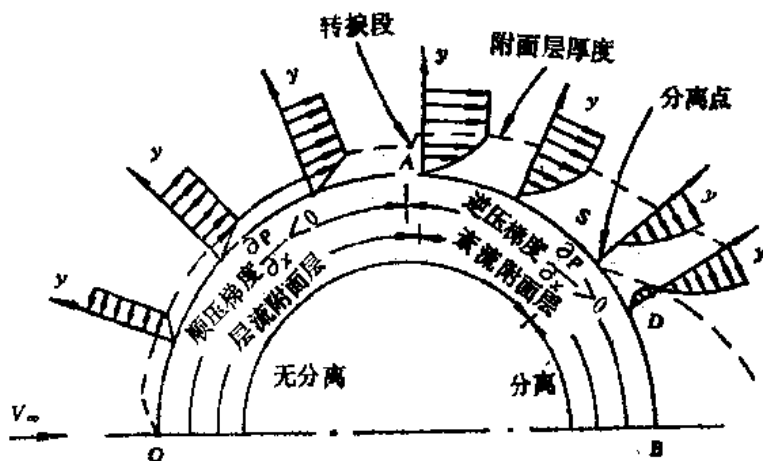


图 5-17

如果是理想流体，则其流动情况如图 4-24(a) 所示（参看第四章 § 4-6）。在 O 点压强最高，速度为零。由 O 至 A ，压强由高到低，即 $\partial p/\partial x < 0$ ，称顺压区，气流做加速运动，速度由零增至最大。由 A 至 B ，压强由低到高，即 $\partial p/\partial x > 0$ ，称为逆压区，气流作减速运动，速度由最大值减为零。由于在理想不可压流中没有能量损失，各点之压力能和动能之和为一常数，即 $p + \rho V^2/2 = \text{常数}$ ，只有到后驻点 B 时，速度（动能）才为零。

实际流体是有粘性的，有附面层存在。在顺压中，虽然粘性的作用使附面层内的气流减速，但顺压梯度的作用，使流动比较顺利。在逆压区中，粘性及逆压梯度都要使附面层内气流减速，因而使流动比较困难，以致在 S 点达到 $(\partial v_x / \partial y)_{y=0} = 0$ 。在 S 点以后，靠近物面的气流在逆压的继续作用下向前倒流，倒流而上的气流与顺流而下的气流在 S 点相遇，使附面层拱起脱离物面，而形成旋涡，如图 5-18 所示（此图是图 5-17 中 S 点附近放大）。于是形成了附面层分离。通常称附面层气流开始离体的 S 点为分离点。

附面层分离的内因是空气具有粘性；外因则是物面弯曲而出现的逆压梯度。

气流分离后，附面层概念就不适用了。一般来说，在流动严重分离情况下，要精确计算物体的阻力是很困难的，目前主要通过实验方法来确定。

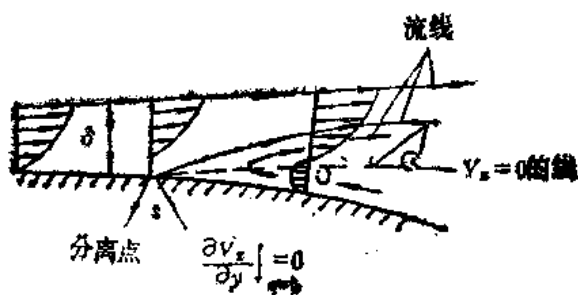


图 5-18

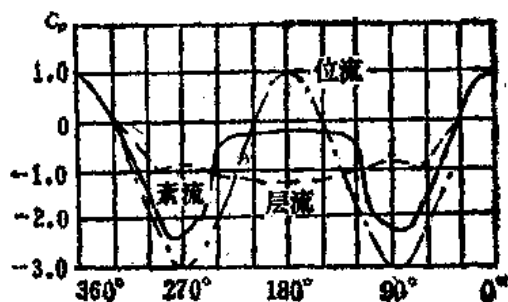


图 5-19

二、分离与压差阻力

附面层分离后在分离区 (SB 地区) 常形成许多杂乱的旋涡，旋涡消耗了能量使分离区内的压强降低。分离后沿圆柱表面的压强分布 (以压强系数表示) 如图 5-19 实线及虚线所示。由图看出，物体背面的压强低于前部压强，故有一个压差阻力存在。这是附面层分离后的结果。

压差阻力的大小，一般只能由实验得出。实验结果表明，附面层的分离区越大，压差阻力也愈大；反之，压差阻力愈小。因此要减少压差阻力，就要减小气流分离区，使附面层分离点后移。由于分离点 S 位置与逆压梯度及附面层流态有关。通常，为减小物面的逆压梯度，将飞机的机身、机翼、挂弹架等都做成圆头尖尾的形状，圆头作用是适应不同来流方向，尖尾作用使翼型后部附面层不易出现分离，我们就把这样的形状称为流线型。例如一根直径为机翼最大厚度的 $1/10$ 的钢丝，在每小时 320 公里速度时，钢丝的阻力是机翼剖面阻力的 1.1 倍，说明形状 (决定逆压梯度的大小) 对减小压差阻力的作用。

前述已知，理想流体绕物体流动时，作用于物面压强在沿来流方向之合力为零，即没有压差阻力。真实流体绕物体流动时即使还未分离，由于粘性，使气流的总压在沿物面的流动中不断损失，致使作用于物面上的压强分布不同于理想流体。由于附面层自物体前部逐渐向后扩展，因此压强分布与理想流体相比前部改变少，后部改变大 (对应同样速度值压强数值偏小)，从而产生了一个沿气流方向的压差阻力。有时称为“附面层压差阻力” (或粘性压差阻力)。对于流线形的翼剖面，在小迎角下，这部分压差阻力相当小。随着迎角增大，压差阻力将增大，当翼型上绕流分离时，压差阻力将陡增。

由上述可知，真实流体绕物体流动时，由于粘性将产生两种阻力，一种是摩擦阻力，一种是压差阻力。

三、流动状态对分离的影响

前面讨论附面层分离现象，没有涉及附面层内的流态。如在分离点之前附面层已成紊流，则称这种分离为紊流分离。如在分离点之前附面层为层流，我们称这种分离为层流分离。当物体的雷诺数 Re 较小时，物体表面只可能出现层流分离。随着雷诺数 Re 的增大，将出现紊流分离。下面我们介绍著名的圆球阻力实验。由于圆球后部发生分离，所引起的压差阻力，把这部分阻力加上粘性引起的摩擦阻力为总阻力 D 。总阻力被迎风面积 $(\pi d^2/4)$ 和动压 $(\rho V^2/2)$ 相除称为圆球的阻力系数

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}$$

式中 d 为圆球直径。

实验发现，在雷诺数 $Re = V_\infty d / \nu$ 较小时， C_D 约为 0.5，而在 Re 较大时， C_D 可降为 0.11。 C_D 开始变小时的 Re 数还与来流的紊流度有关，来流紊流度愈大则 C_D 开始变小的 Re 数愈小，如图 5-20 所示。这种有意思的现象，可以用球面上附面层的类型来解释。在层流附面层分离时，分离点靠前，球后分离区较大，所以压差阻力较大，而在紊流附面层分离时，分离点靠后，球后分离区较小，见图 5-21 所示。来流紊流度可以影响球面上的附面层类型。若来流紊流度较大，则球面上附面层在分离前已变为紊流，由于紊流附面层内的速度分布曲线比层流附面层丰满（见图 5-10），即紊流附面层内靠物面的流体层的动能比层流大，可以更多地克服逆压梯度作用，而不致过早发生分离，所以球后分离区较小，这样， C_D 在较小 Re 数下即已开始减少。图 5-19 表示了圆柱体层流及紊流分离时的 C_D 分布曲线，也同样说明了上述结论。

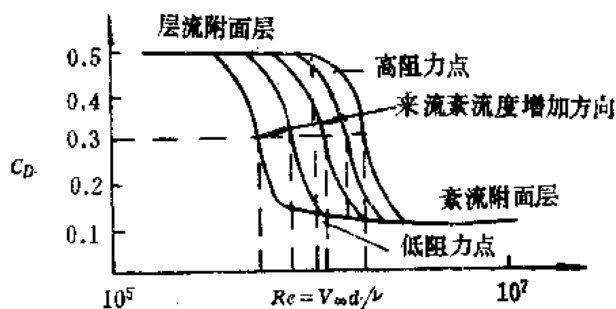


图 5-20

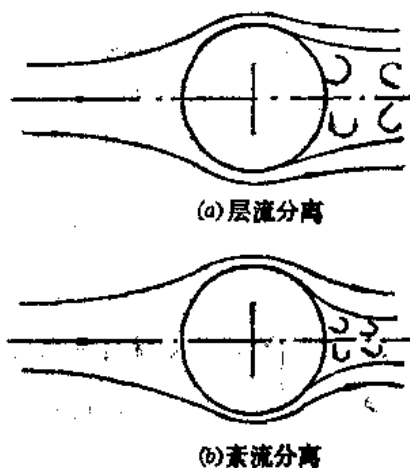


图 5-21

值得注意的是，圆球或圆柱那样非流线型物体的阻力由摩擦阻力和压差阻力两部分组成，其中压差阻力所占的成份远远大于摩擦阻力，所以才有上述结果。就摩擦阻力来说，层流摩擦阻力远比紊流的小。而紊流的压差阻力则比层流的小，由于它占据总阻力中绝大部分，所以紊流分离时，物体的总阻力比层流分离时小。

§ 5-4 高速附面层及气动热

由于空气有粘性,当物体以很高的速度在空气中运动时会产生很大的热量,甚至把物体烧毁。例如陨石在坠入大气时产生的热量常使陨石熔化。飞行器以很高的速度在空气中运动时,在其表面上也会产生很大热量。本节主要讨论飞行器高速飞行时,物面将产生的热现象及其对物面摩擦力的影响,最后介绍工程的估算方法。

一、气动热

设有一气流流过一对称翼型,如图 5-22 所示,在对称线上气流受到物体的压缩作用在前缘处速度降为零,温度增高到 $T_{0\infty}$ (滞点温度)。如各流线之间视为绝能(即各流线之间没有热及能量交换)。则可用绝能流动的能量方程来计算

$$T_{0\infty} = T_{\infty} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2 \right) \quad (5-42)$$

例如当 $M_{\infty} = 5$, $T_{\infty} = 288 \text{ K}$ 时, $T_{0\infty} = 1700 \text{ K}$ 。 $T_{0\infty}$ 将约为 T_{∞} 的 6 倍。滞点处这么高的温度实际上是由于气流受到压缩(速度减为零)由动能转换而来的。在低速流中($M_{\infty} < 0.3$)即使在温度最高的滞点处, $T_{0\infty}$ 与 T_{∞} 也差不多,全流场的温度都可看作为 T_{∞} ,所以气流受压缩而产生热的问题不突出。在平板附面层中,由于粘性摩擦作用为物面无滑移条件,物面上的速度为零,向外逐渐增加到 V_{∞} 。我们把附面层内各层流体看作为绝能的,则绝能流动的能量方程也可以用于附面层内各层流体。于是物面温度就等于滞点温度 $T_{0\infty}$,向外逐渐减少到 T_{∞} 。这与前一种情况不同之处在于附面层中气流粘性作用,使气流速度降低而温度升高。由上述分析看出,气流受到阻滞,温度就要升高。我们把由气流受阻滞产生的热称为气动热。气流受阻滞可以是由压缩引起的,也可以是由摩擦引起的。当然也可以是由压缩和摩擦两者共同引起的。例如超音速气流流过一物体,先产生一激波(是压缩过程),使温度升高,然后进入附面层的气流受到摩擦作用温度进一步提高。

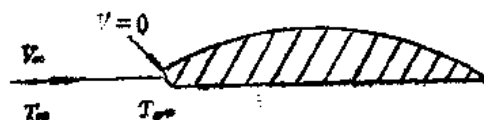


图 5-22

二、绝热壁的恢复温度及恢复温度系数

假设气流流过物面时,物面不从气流中吸收热量,也不输送热量给气流,即物面为一绝热壁。且不考虑壁面的辐射作用。若气流各部分之间没有热交换,则根据上述讨论,得出物面温度等于滞点温度 $T_{0\infty}$ 。实际上附面层内各流体层之间存在热和功交换,因此物面温度不等于滞点温度 $T_{0\infty}$ 。

在附面层内各流体层之间有摩擦力作用,而上层流体较下层流体运动得快,因而上层流体要对下层流体作摩擦功。这些摩擦功所转换成的热加给了下层流体,使下层流体的温度增高。这是问题的一个方面。问题的另一方面,下层流体的温度比上层高,这就要引起热量由下向上传递。可见,附面层内存在着由上而下传递摩擦功,由下而上传递热能,两者方向相

反, 对空气来说, 热能向上传递占主要地位。因此物面温度就不是滞点温度 $T_{0\infty}$, 而是小于 $T_{0\infty}$ 的某个温度, 我们称此温度为恢复温度, 并记为 T_r 。附面层温度分布如图5-23所示。

为了估算出恢复温度 T_r , 我们引入系数 R , 称为恢复温度系数。对于平板, 它的定义是

$$R = \frac{T_r - T_\infty}{T_{0\infty} - T_\infty} \quad (5-43)$$

$(T_{0\infty} - T_\infty)$ 是气流绝能滞止时的温度增高量, 也就是来流的动能 (以温度表示为 $V_\infty^2/2C_p$)。 $(T_r - T_\infty)$ 是有摩擦及热传导时, 气流在绝热壁面上滞止时温度的实际增高量。当 $R = 1$ 时, 说明来流的动能全部保留在物面上, 当 $R < 1$, 说明来流的动能只有一部分保留在物面上。所以恢复温度系数表示了物面上实际保留下来动能的大小。对于空气来说, 热量向外传占优势, 故 $T_r < T_{0\infty}$, 因而 $R < 1$ 。知道了 R , 即可求出 T_r , 即

$$T_r = R(T_{0\infty} - T_\infty) + T_\infty = T_\infty \left(1 + R \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right) \quad (5-44)$$

理论和实验表明, 如果附面层是层流时, R 之值约为

$$R = \sqrt{p_r} \quad (5-45)$$

式中 p_r 称普郎佗数。

对于空气 $p_r \approx 0.72$, 层流附面层时

$$R = \sqrt{p_r} = 0.85$$

如果附面层是紊流, 紊流的普郎佗数近似等于层流的值, 不过恢复温度系数为

$$R = \sqrt[3]{p_r} \quad (5-46)$$

对于空气, 紊流附面层

$$R = \sqrt[3]{p_r} = 0.88。$$

三、温度附面层

上述讨论中可知, 当高速粘性流体绕过物体时, 在物体附近的流体层之间不仅存在着很大速度梯度, 而且还存在着很大温度梯度, 如图5-23所示。仿照附面层概念, 我们把物体表面附近温度梯度很大的一层, 即热传导作用显著的一层称为温度附面层。温度附面层的厚度与速度附面层的厚度不相等, 但相差不多。

附面层内的温度型分布在很大程度上取决于壁面的传热情况。如物面温度比温度附面层温度高, 即 $(\partial T / \partial y)_{y=0} < 0$, 见图5-24, 此时物体向附面层气流传热, 这种物面叫热壁。物面温度比温度附面层底层温度低, 即 $(\partial T / \partial y)_{y=0} > 0$, 见图5-24, 此时附面层气流向物体传热, 这种物面叫冷壁。物面温度与温度附面层底层温度相等, 即 $(\partial T / \partial y)_{y=0} = 0$, 见图

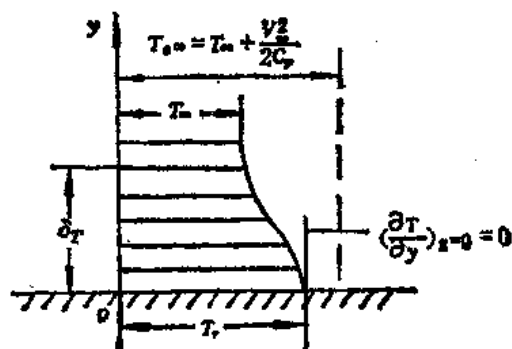


图 5-23

5-24, 此时物体与附面层气流没有热传导, 这种物面叫绝热壁。

真实飞行器的表面属于哪一种壁面, 主要由飞行状态及飞行器内部结构的传热情况来决定。

四、二维平板高速摩擦阻力的计算

不可压流流过一平板时, 附面层内的温度与来流的温度 T_∞ 基本上相等, 粘性系数 (它仅取决于温度) 也就与来流的粘性系数相等。流体给平板单位面积的摩擦力可写为

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_w = \mu_\infty \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_w$$

高速 (可压) 流流过一平板时, 附面层内的温度通常比来流的温度高得多。现在我们来考察附面层内温度增高后对摩擦阻力的影响。高速气流给物体单位面积的摩擦力仍可写为

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_w$$

式中 μ_w 为紧靠物面一层气体的粘性系数。附面层内的温度升高后一方面要使 μ_w 增加, 从而有增加 τ_w 的趋势; 另一方面要使附面层内密度减小及 μ 的增加将使得当地雷诺数 $Re_w = \rho V_w x / \mu$ 减小 (V_∞ 值不变), 从而附面层厚度增加。附面层厚度增加将使得 $(\partial V_x / \partial y)_{y=0}$ 减小, 从而使 τ_w 减小。这两种影响, 后者为主, 结果使 τ_w 减小。所以随着 M 数增加, 相应的摩擦系数减小。

现在我们再来看不可压流流过一平板的情况。假若我们让来流的温度 T_∞ 增高, 则 μ_∞ 也要增加, $(\partial V_x / \partial y)_w$ 也要减小。结果 τ_w 也要改变。于是我们总可以找到某一个温度 T^* , 称为参考温度。当不可压流以这个温度流过平板时所产生的 τ_w 恰好与可压流流过此平板时产生的 τ_w 相等。这样构成了与可压流流过一平板相等价的假拟的不可压流流过一平板的情况。

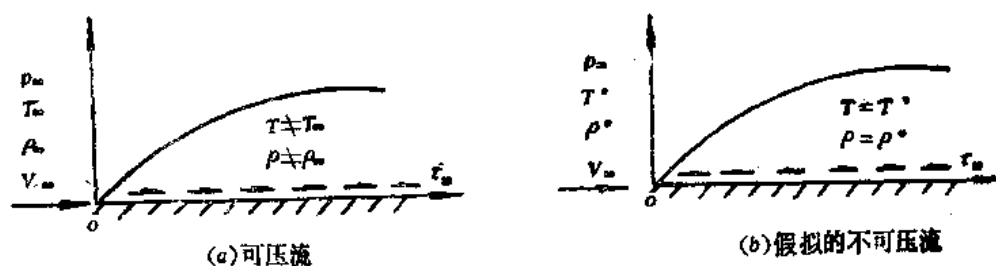


图 5-26

如果知道了 T^* , 则可按不可压流的公式型式来求可压流的 τ_w 。只是把该公式中那些与温度有关的物理量, 如 ρ , μ 等, 用参考温度 T^* 来确定。此法称为参考温度法, 是工程估算中常用的方法。

具体过程如下:

1. 计算 T^*

由大量的理论计算与实验结果, 得出决定 T^* 的经验公式如下:

$$T^* = T_\infty + 0.5(T_w - T_\infty) + 0.22(T_r - T_\infty) \quad (5-47)$$

式中 T_∞ 为来流的温度;

T_w 为壁面温度;

T_r 为恢复温度。

此式不论物面是否绝热, 附面层是层流还是紊流均适用。绝热物面时, $T_w = T_r$, 上式化简为

$$T^* = T_\infty + 0.5(T_r - T_\infty) + 0.22(T_r - T_\infty) = T_\infty + 0.72(T_r - T_\infty) \quad (5-48)$$

上面已介绍过 T_r 的求法, 故 T^* 很易求得。

2. 由 T^* 确定 μ^* 及 ρ^*

温度对粘性系数影响可由下列经验公式计算

$$\frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^n \quad (5-49)$$

上式 $n = \frac{8}{9} (90\text{K} < T < 300\text{K})$, $n = 0.76 (300\text{K} < T < 600\text{K})$ 。由状态方程确定

$$\rho^* = \frac{p_\infty}{RT^*}$$

3. 确定当地摩擦系数 c_f^*

如是层流, 用式 (5-27)

$$c_f^* = \frac{0.664}{\sqrt{Re_\delta^*}} = 0.664 \left(\frac{V_\infty \rho^* x}{\mu} \right)^{-1/2} \quad (5-50)$$

从而得

$$\begin{aligned} \tau_w &= c_f^* \frac{1}{2} \rho^* V_\infty^2 = c_{f\text{可}} \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \\ \therefore c_{f\text{可}} &= c_f^* \frac{T_\infty}{T^*} \end{aligned} \quad (5-51)$$

如果是紊流, 用式 (5-27)

$$c_f^* = \frac{0.37}{(\lg Re_\delta^*)^{2.58}} = 0.37 \left(\lg \frac{V_\infty \rho^* x}{\mu^*} \right)^{-2.58} \quad (5-52)$$

因而

$$\begin{aligned} \tau_w &= c_f^* \frac{1}{2} \rho^* V_\infty^2 = c_{f\text{可}} \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \\ c_{f\text{可}} &= c_f^* \frac{T_\infty}{T^*} \end{aligned}$$

4. 确定平板的摩擦系数

根据参考温度法, 如是层流, 式 (5-27) 形式上可用于可压流

$$C_F^* = \frac{1.328}{\sqrt{Re^*}} \quad (5-53)$$

式中 $Re^* = \frac{\rho^* V_\infty l}{\mu^*}$ 。在 C_F^* 求出后, 可用下式求出平板的摩阻系数 C_F (一个表面)

$$X_F = C_F \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot b \cdot l = C_F^* \frac{1}{2} \rho^* V_\infty^2 \cdot b \cdot l$$

所以
$$C_{F可} = C_F^* \frac{\rho^*}{\rho_\infty} = C_F^* \frac{T_\infty}{T^*} \quad (5-54)$$

如果是紊流, 式 (5-36)、式 (5-37) 形式上可用于可压流

$$C_F^*_{紊} = \frac{0.014}{(Re^*)^{1/5}} \quad (5-55)$$

$$C_F^*_{紊} = \frac{0.455}{(\lg Re^*)^{2.58}} \quad (Re > 10^7) \quad (5-56)$$

同理平板的摩阻系数 $C_{F紊}$ (一个表面)

$$C_{F紊可} = C_F^*_{紊} \frac{T_\infty}{T^*}$$

例 1 绝热平板处于 $M_\infty = 3$, $T_\infty = 223K$, $p_\infty = 26460$ 牛顿/米² 的气流中, 求距离前缘 $x = 0.3$ 米处的恢复温度 T_r , 参考温度 T^* 及当地摩擦系数 $c_{f可}$, 假设该处附面层是层流的。

解 对空气, 取 $P_r = 0.72$, 故 $R = \sqrt{P_r} = 0.85$

$$T_r = 223 \left(1 + \frac{1.4-1}{2} \times 0.85 \times 3^2 \right) = 564 K$$

$$T^* = 223 + 0.72(564 - 223) = 468.5 K$$

对应于 $T_\infty = 223K$, $p_\infty = 26460$ 牛/米² 的空气运动粘性系数 $\nu_\infty = 0.3519 \times 10^{-4}$ 米²/秒, $a_\infty = 300$ 米/秒, 故在 $x = 0.3$ 米处的当地雷诺数为

$$Re_x = \frac{V_\infty x}{\nu_\infty} = \frac{3 \times 300 \times 0.3}{0.3519 \times 10^{-4}} = 7.67 \times 10^6$$

又
$$\frac{Re_x}{Re_x^*} = \frac{\rho_\infty}{\rho^*} \frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \frac{T^*}{T_\infty} \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^n = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{n+1}$$

取 $n = 0.88$, 故

$$Re_x^* = Re_x \left(\frac{T_\infty}{T^*} \right)^{n+1} = 7.67 \times 10^6 \times \left(\frac{223}{468.5} \right)^{1.88} = 1.90 \times 10^6$$

$$c_f^* = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x^*}} = 0.00048$$

$$c_{f可} = c_f^* \frac{T_\infty}{T^*} = 0.00023$$

设从平板前缘一直到 $x = 0.3$ 米处, 均为层流附面层, 则该段板长的摩阻系数为

$$C_F^* = \frac{1.328}{\sqrt{Re_x^*}} = 0.00096$$

$$C_{F可} = C_F^* \frac{T_\infty}{T^*} = 0.00048$$

例 2 如果前例中附面层是紊流, 仍求前缘 $x = 0.3$ 米处的 T_r , T^* 及 $c_{f可}$

解 因为是紊流, 故 $R = \sqrt{P_r} \approx 0.89$

$$T_r = 223 \left(1 + \frac{1.4-1}{2} \times 0.89 \times 3^2 \right) = 580.2 \text{ K}$$

$$T^* = T_\infty + 0.72(T_r - T_\infty) = 223 + 0.72(580.2 - 223) = 480.2 \text{ K}$$

$$Re_s^* = Re_s \left(\frac{T_\infty}{T^*} \right)^{n+1} = 7.67 \times 10^6 \times \left(\frac{223}{480.2} \right)^{1.83} = 1.81 \times 10^6$$

因为 $Re_s < 10^7$, 故

$$C_f^* = \frac{0.0592}{(Re_s^*)^{1/5}} = 0.00332$$

$$c_{f可} = c_f^* \left(\frac{223}{480.2} \right) = 0.00154$$

如果从平板前缘一直到 $x = 0.3$ 米处, 均为紊流附面层, 且板长也为 0.3 米, 则该板的摩擦系数为

$$C_{F紊}^* = \frac{0.074}{(Re_s^*)^{1/5}} = 0.00415$$

$$C_{F紊可} = C_{F紊}^* \frac{T_\infty}{T^*} = 0.00193$$

最后我们来讨论 M 数对平板摩擦系数的影响。前面我们提到 M 数增加, 摩擦系数减小的结论。下面我们数学式子说明之。

以 $Re > 10^7$ 的紊流附面层为例,

$$C_{F不} = \frac{0.074}{(Re)^{1/5}}$$

$$C_F^* = \frac{0.074}{(Re^*)^{1/5}}$$

$$\frac{Re}{Re^*} = \frac{\rho_\infty \mu^*}{\rho^* \mu_\infty} = \frac{T^*}{T_\infty} \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^n = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} C_{F可} &= C_F^* \frac{T_\infty}{T^*} = \left[\frac{0.074}{(Re)^{1/5}} \right] \left(\frac{Re}{Re^*} \right)^{1/5} \frac{T_\infty}{T^*} \\ &= C_{F不} \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{(n+1)/5} \left(\frac{T_\infty}{T^*} \right) \\ &= C_{F不} \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{(n-4)/5} = C_{F不} \cdot \eta_M \end{aligned}$$

式中 $\eta_M = (T^*/T_\infty)^{(n-4)/5}$ 表示 M 数的影响的修正系数。对于空气 $n = 8/9$ 或 $n = 0.76$, $(n-4)/5$ 是负数, 绝热平板由式 (5-48) 可知 $T^* > T_\infty$, 故 η_M 总是小于 1 的, 而且 M 数越大, η_M 越小。这就是说, M 数增加是使绝热平板的摩擦系数减小。

用同样的方法, 可以求出层流附面层时的 η_M 如下

$$C_{F不} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}$$

$$C_F^* = \frac{1.328}{\sqrt{Re^*}}$$

$$\frac{Re}{Re^*} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{n+1}$$

$$C_{F\text{可}} = C_F^* \frac{T_\infty}{T^*} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \frac{\sqrt{Re}}{\sqrt{Re^*}} \frac{T_\infty}{T^*}$$

$$C_{F\text{可}} = C_{F\text{不可}} \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{(n-1)/2} = C_{F\text{不可}} \eta_M$$

故 $\eta_M = (T^*/T_\infty)^{(n-1)/2}$ 。因为对空气而言 $(n-1)/2$ 为负数， T^* 总是大于 T_∞ ，故 η_M 也总是小于 1 的。

下面我们分别来计算上述例子中层流和紊流的 η_M 值。层流附面层时 $T_\infty = 223\text{K}$ ， $T^* = 468.5\text{K}$ ，故

$$\eta_{M\text{层}} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{(n-1)/2},$$

这时 $n = \frac{8}{9} \approx 0.88$

$$\eta_{M\text{层}} = \left(\frac{468.5}{223} \right)^{(0.88-1)/2} = 0.956$$

而紊流附面层时， $T_\infty = 223\text{K}$ ， $T^* = 480.2\text{K}$ ，故

$$\eta_{M\text{紊}} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{(n-4)/5}$$

这时 $n \approx 0.88$

$$\eta_{M\text{紊}} = \left(\frac{480.2}{223} \right)^{(0.88-4)/5} = 0.619$$

这就是说，层流附面层时 M 的影响使得平板摩阻系数减少不到 5%（对本算例而言），而紊流附面层时则可接近 40%。

在实际工程计算中，常用现成曲线，对绝热平板

$$C_{F\text{可}} = C_{F\text{不可}} \eta_M \quad (5-57)$$

η_M 为压缩性修正系数，可自图 5-26 查得。

五、热流量的估算

通过上面讨论我们知道，物面是绝热壁的情况，贴近物面的空气温度为 T_r 。如果真实物面的温度 T_w 高于 T_r ，则将有热量由物面传给气流。反之，如果 T_w 低于 T_r ，则有热量由气流传给物面。根据理论和实验结果，单位时间内附面层传给单位面积壁面的热流量 q 为

$$q = \alpha(T_r - T_w) \quad (5-58)$$

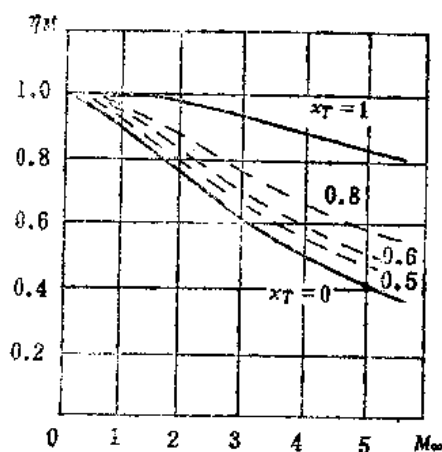


图 5-26

式中 α ——热交换系数,

T_r ——恢复温度,

T_w ——飞行器表面温度(又称壁温)。

热交换系数 α 是一个有单位的量

$$\alpha = (P_r)^{-2/3} \frac{c_l - c_p}{2} \rho_\infty V_\infty \quad (5-59)$$

式中 c_p 为定压比热,

V_∞ 为来流速度,

ρ_∞ 为来流密度。

因此单位时间内附面层传给单位面积壁面的热流量 q 为

$$q = (P_r)^{-2/3} \frac{c_l - c_p}{2} \rho_\infty V_\infty (T_r - T_w) \quad (5-60)$$

由此可见,热流量直接随局部摩擦系数 c_f 而变化,由于紊流的 c_f 是层流的好几倍。因此,为了减少热流量,应尽量使飞行器表面附面层保持层流。

用式(5-60)计算时, T_r 按式(5-15)计算,物面的 T_w 受许多因素影响,除气流要向物面加热外,物面与飞行器内部结构间的传热情况,太阳给物面的辐射热以及物面向外的辐射热等都影响物面温度 T_w 。 T_w 的计算已超过本课程范围,在这里作为已知量。

飞行器速度愈大,飞行时间愈长,则表面温度也升高愈多。热流量的增大,将引起结构强度减弱,油料的挥发变稀,座舱温度升高等后果。为此,在气动设计上,尽量使飞行器表面加长顺压梯度段($dp/dx < 0$),表面光滑,以便保持层流附面层,一来降低摩阻,二来降低热流量。在构造上往往采用耐热材料,如不锈钢和钛合金;加装隔热装置,减少由外界传入飞行器内部的热量;设置冷却系统,加速热量散逸。

练 习 题

5.1 什么叫紊流?什么叫紊流度?

5.2 雷诺数的物理意义是什么?

5.3 附面层的厚度 δ 与附面层的位移厚度 δ^* 的区别是什么?

5.4 气流流过平板,其附面层如图 5-27 所示,点 A 在平板附面层边界上,点 B 在平板上,且 AB 垂直于平板,则

(1) $V_A =$

(2) $p_A \approx$

(3) $V_B =$

(3) $p_B =$

5.5 附面层分离的原因是什么?

5.6 已知 $Re = 10^8$, $x_r/l = 0.1$, 求平板的 $c_{x摩}$ 。

5.7 根据能量方程求证, $T_0 = T \left(1 + \frac{M^2}{5} \right)$, 并计算当 $t = 30^\circ\text{C}$ 时 $M = 2, \sqrt{5}$, 3 时的驻点(滞点)温度值? 比外界气温高多少?

5.8 有一速度为 100 米/秒的空气流过一块长 $L = 1$ 米的单位宽度二维平板。试求在高度 $H = 0$ 公里和 $H = 11$ 公里两种情况下的层流附面层变为紊流附面层转换点位置及相应的摩擦阻力(双面), 转换雷诺数 $Re_x = 6 \times 10^5$ 。

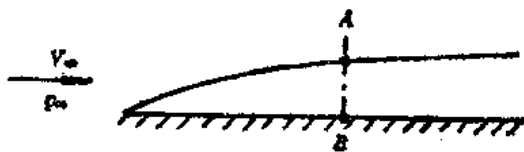


图 5-27

第六章 低速机翼空气动力特性

飞机在大气中飞行时,不同的飞行速度范围,空气动力各有不同特点,本章讨论在低速时的空气动力特性。

飞机由机翼、机身、尾翼等部件组成,流动情况比较复杂,为了阐明飞机空气动力特性,我们先分别讨论各部件的空气动力特性,然后再讨论整架飞机的空气动力特性。

因为机翼是飞机产生升力的主要部件,作用在机翼上的空气动力特性与飞机性能密切相关,所以我们首先来讨论机翼的空气动力特性。

飞机空气动力学是研究飞机与空气发生相对运动时,空气作用于飞机表面上的力的产生和变化。所以空气动力的大小取决于空气的流动状态和飞机本身的几何形状。显然,机翼的几何形状对机翼的空气动力特性起着决定性的作用。机翼的几何形状主要取决于平面形状和剖面形状。我们先讨论翼型(机翼的翼剖面)的空气动力特性,然后再讨论整个机翼的空气动力特性。

§ 6-1 机翼的外形及几何参数

一般机翼,有一个与飞机对称面重合的对称面。机翼的外形主要指的机翼的平面形状,剖面形状,扭转角和上反角等。

一、翼型及其几何参数

所谓翼型,通常指的是平行于飞机(机翼)对称平面的机翼剖面,有时也指与机翼前缘相垂直的剖面,见图 6-1。翼型的形状一般地如图 6-2 所示。

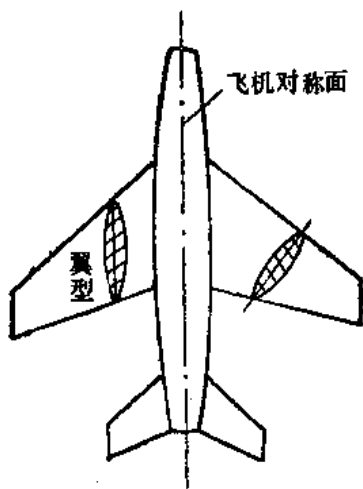


图 6-1

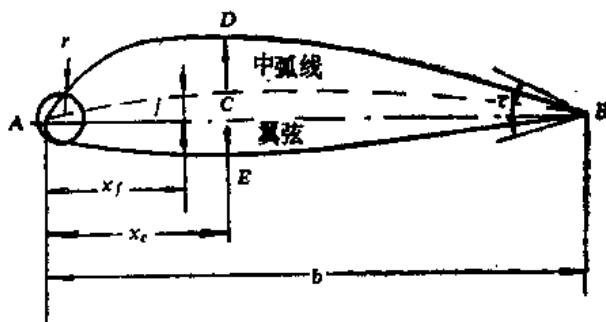


图 6-2

翼型的主要几何参数有

翼弦：翼型最前点 A 与翼型最后点 B 的连线，称为翼弦。它的长度 AB ，称为弦长，用 b 表示。翼弦上部的机翼表面 ADB 称为上翼面，翼弦下部机翼 AEB 称为下翼面。

相对厚度：上下翼面在垂直翼弦方向的距离称为翼型的厚度，其中最大者 DE 称为翼型的最大厚度，并记为 c 。显然翼型最大厚度 c 的值不足以表示翼型的厚薄。翼型的厚薄用相对厚度 $\bar{c}$ (有时也称最大相对厚度) 表示。 $\bar{c} = \frac{c}{b}$ 。

最大厚度的相对位置：前缘到最大厚度线 DE 的弦向距离称为最大厚度位置，记为 x_c 。最大厚度相对位置记为 $\bar{x}_c = \frac{x_c}{b}$ 。

中弧线：翼型厚度中点的连线称为中弧线。如图 6-2 中的虚线所示。对称翼型的中弧线与翼弦重合。

相对弯度：中弧线与翼弦之间的最大距离，称为最大弧高 f ，它反映了翼型的弯曲情况，故常将最大弧高 f 称为翼型的弯度。翼型的弯曲程度用相对弯度 $\bar{f}$ 表示。 $\bar{f} = \frac{f}{b}$ 。对称翼型的 $\bar{f} = 0$ 。

最大弯度的相对位置：前缘到最大弯度位置的弦向距离称为最大弯度位置，并记为 x_f 。最大弯度的相对位置记为 $\bar{x}_f = \frac{x_f}{b}$ 。

相对前缘半径：翼型轮廓线在前缘处的曲率半径称为前缘半径，并记为 r 。相对前缘半径记为 $\bar{r} = \frac{r}{b}$ 。

后缘角：上下翼面在后缘处的切线的夹角称为后缘角，并记为 τ 。由于强度关系，实际采用的翼型 $\tau > 0$ 。

低速飞机采用的翼型通常是，圆头 ($\bar{r} \neq 0$)，尖尾、微弯 ($\bar{f} = 0.02 - 0.05$)，中等厚度 ($\bar{c} = 0.09 - 0.15$) 的翼型。

超音速飞机采用的翼型通常是，小圆头 (或尖头)，对称 ($\bar{f} = 0$)，较薄 ($\bar{c} = 0.04 - 0.09$) 的翼型。

翼型的几何参数对飞机的空气动力特性有很大影响。飞机的设计人员的主要任务之一是根据设计要求正确地选择或设计翼型。

二、翼型编号介绍

为了便于表明不同翼型的特征，一些国家以不同编号代表各种翼型。现举例如下。

1. 美国 NACA (是“国家航空咨询委员会”的英语缩写) 翼型系统

(1) 四位数翼型；

这是中弧线由两段在最大弯度位置处相切的二次抛物线构成的翼型。四位数字代表的意义举例如下：

NACA 4415

第一位数字：相对弯度的百分数。在此例中， $\bar{f} = 4\%$ 。

第二位数字：弯度相对位置的十分数。在此例中， $\bar{x}_f = 40\%$ 。

第三位数字和第四位数字：最大厚度的百分数。在此例中 $\bar{c} = 15\%$ 。

所有翼型的最大厚度相对位置均为 $\bar{x}_c = 30\%$ 。

(2) 五位数翼型；

这种翼型的中弧线也由两段构成，前一段为一三次曲线，后一段为一直线或为一上翘曲线。各数字代表意义举例如下：

NACA23012

第一位数字：这位数字表示与弯度有关的值（具体数值见表 6-1）。本例中， $\bar{f} = 1.8\%$ 。

第二位数字：最大弯度相对位置十分数的两倍。在本例中 $\bar{x}_f = \frac{30}{2}\% = 15\%$ 。

第三位数字：指中弧线的形状。“0”表示中弧线后段是直线，“1”表示中弧线为上翘曲线。本例的中弧线为一直线。

第四位数字和第五位数字：相对厚度的百分数。本例中 $\bar{c} = 12\%$ 。

表 6-1 NACA 五位数翼型 $\bar{f}$ 与第一位数字对照表

第二位数	1	2	3	4	5	注
$\bar{x}_f$ (%)	5	10	15	20	25	
$\bar{f}$ (%)	1.1	1.5	1.8	2.1	2.3	(第一位数=2)
$\bar{f}$ (%)	1.1	2.3	2.8	3.1	2.3	(第一位数=3)
$\bar{f}$ (%)	1.1	3.1	3.7	4.2	2.3	(第一位数=4)
$\bar{f}$ (%)	1.1	4.8	5.5	6.2	2.3	(第一位数=6)

(3) 第六族层流翼型。

在第五章中我们知道，在同一雷诺数下，物体的摩擦阻力系数还要决定于附面层中的流态，紊流的摩阻系数可以比层流的大好几倍。促使流态转换的因素中，压强梯度是很重要的，在顺压梯度 ($dp/dx < 0$) 下，流态不易变为紊流，而在逆压梯度 ($dp/dx > 0$) 下，流态容易变为紊流。就这个因素来说，上述的翼型是很不好的，因为这些翼型不论迎角大小，上翼面的最低压强点都十分靠近前缘，气流流过最低压强点就减速，这些翼型的上翼面的附面层中气流所走过绝大部分路程是逆压梯度。为此设计了一种使最低压强点向后靠，以加长顺压梯度段的长度，减少紊流摩阻所占比重的层流翼型，各数字代表意义如下：

NACA 65₃-421

第 1 位数字：表示层流翼型的族号。本例中为第 6 族。

第 2 位数字：表示厚度分布与之相同而弯度为零的翼型，在零迎角下的最低压强点的弦向位置的十分数。本例中，最低压强点在 0.56 处。

第 3 位数字：为保持最小阻力而设计升力系数的某个上下范围。该数字的 1/10 即表示上下范围。本例中设计升力系数的上下范围为 ± 0.3 。

第 4 位数字：为设计升力系数的十分数。本例中的设计升力系数为 0.4。

第 5 位数字和第 6 位数字：表示相对厚度的百分数。本例中的相对厚度为 21%。

其它翼型族不一一列举，所有这些翼型的坐标和气动性能都是有资料可查，例如查 NACA TR 824。

2. 苏联 ЧАГИ (“中央空气流体研究院”的俄语缩写)翼型, 德国 Göttingen 翼型, 英国 R.A.E (“皇家飞机研究院”的英语缩写)翼型, 限于资料不全, 不作介绍。

随着飞机的发展, 为满足不同的飞行要求, 新型的翼型不断出现, 我国自己研制翼型的工作正在进行之中。

三、机翼的平面形状和几何参数

为了说明机翼的几何参数, 以图 6-3 的坐标系为准。原点 O 取在机翼对称面翼剖面的前缘上; Ox_1 轴与对称面翼型的翼弦重合, 向后为正; Oy_1 轴与 Ox_1 轴组成的平面与机翼对称面重合, Oy_1 轴向上为正; Oz_1 轴由右手法则确定。机翼的平面形状是指机翼在 x_1Oz_1 平面内的投影形状。

机翼的平面形状常见的有矩形、梯形和三角形等, 如图 6-4 所示。机翼前面边缘叫前缘, 后面边缘叫后缘, 侧面的边缘叫侧缘。机翼平面形状用以下几何参数表示:

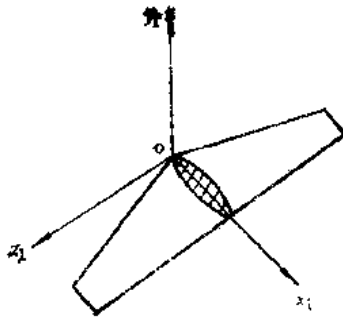


图 6-3

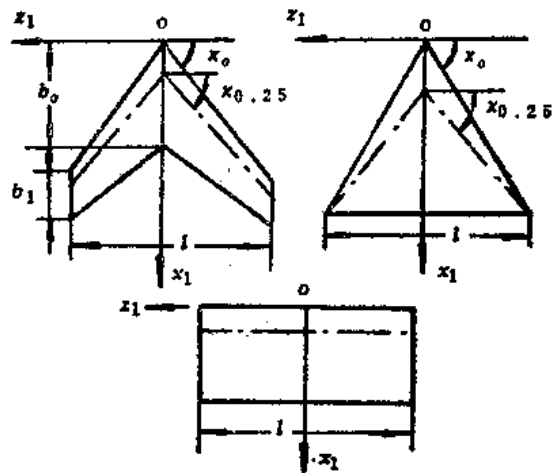


图 6-4

翼展: 机翼左右两端在 Oz_1 轴方向的最大距离, 以 l 表示。

翼面积: 机翼在 x_1Oz_1 平面上的投影面积, 记为 S 。

展弦比: 翼展与机翼的几何平均弦长 $b_{\text{平均}}$ 之比称为展弦比, 并记为 λ 。几何平均弦长 $b_{\text{平均}} = \frac{S}{l}$, 于是 $\lambda = \frac{l}{b_{\text{平均}}} = \frac{l^2}{S}$ 。

梢根比: 是机翼的梢弦 b_1 和根弦 b_0 之比, 记为 ξ 。 $\xi = \frac{b_1}{b_0}$ 。

根梢比: 是梢根比 ξ 的倒数。 $\eta = \frac{1}{\xi} = \frac{b_0}{b_1}$ 。

后掠角: 机翼沿翼展方向各翼剖面等百分比弦长的连线在 x_1Oz_1 平面的投影与机翼对称面法线 (Oz_1 轴) 的夹角称为后掠角, 规定后掠为正。前缘线或 $\frac{1}{4}$ 弦线或后缘线测量的后掠角, 分别称为前缘后掠角 α_0 、 $\frac{1}{4}$ 弦线后掠角 $\alpha_{0.25}$ 和后缘后掠角 $\alpha_{1.00}$ 。

四、机翼的其它几何参数

机翼的几何扭转：机翼上平行于对称面的翼剖面弦线相对于翼根剖面弦线的角度称为机翼的几何扭转角 φ ，如图 6-5 所示。若该翼剖面的局部迎角大于翼根翼剖面的迎角，则扭转

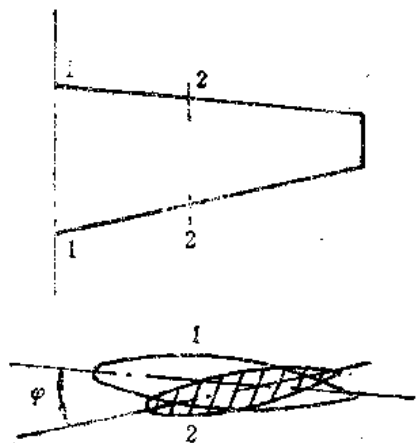


图 6-5

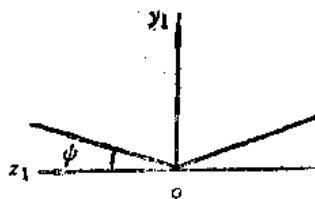


图 6-6

角为正，图 6-5 所示的扭转角为负。即沿展向翼剖面的局部迎角从翼根到翼梢是减少的，此扭转称为外洗。反之为内洗。

机翼的上(下)反角：机翼 1/4 弦线在垂直于机翼对称面的 y_1oz_1 平面上的投影与 oz_1 轴夹角，用 ψ 表示，见图 6-6 所示。规定上反为正，下反为负。

五、气流和机翼之间的相对位置

气流和机翼之间的相对位置，可以用迎角 α 和侧滑角 β 来表示，如图 6-7 所示。

迎角 α ：来流速度 V_∞ 在机翼对称平面 x_1oy_1 的投影与翼弦之间的夹角。

侧滑角 β ：来流速度 V_∞ 与其在机翼对称面 x_1oy_1 上投影之间的夹角。

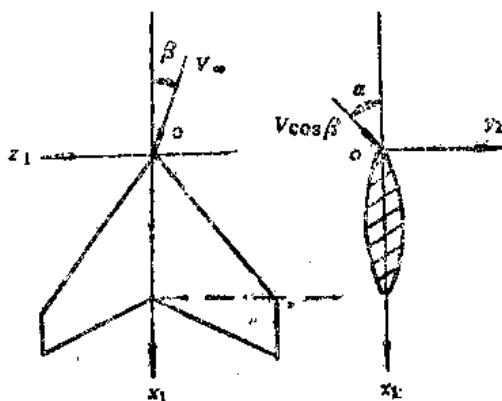


图 6-7

§ 6-2 低速翼型的绕流特性与气动特性

一、低速翼型的绕流图画及其升力

当气流以低速绕翼型流动时的情况可以通过烟风洞实验看出。当气流以低速和零迎角流向一个对称翼剖面时，流动图画是对弦线对称，因而翼型上、下表面的速度 V 和压强 p 也是对弦线对称的，故在垂直气流方向合力 $Y = 0$ ，如图 6-8(a) 所示。当迎角 $\alpha > 0$ 时，流动图画

对弦线不对称, 上表面流管变细, 由连续方程可知, 流管越细, 流速越快, 再由伯努利方程可知, 流速加快, 压强降低; 在翼型下表面流管变粗, 流速减慢, 压强增大。这样, 翼型上下表面就出现压力差, 从而产生了一个垂直于来流方向的力, 称为升力。如图 6-8(b) 所示。比较图 6-8(a) 和图 6-8(b) 可知迎角 α 是产生升力的一个因素。可以推知, 一个相对厚度大的翼型和相对厚度小的翼型, 如果都是 $\alpha = 0$, 那么二者的流态以及速度、压强都是对弦线对称的, 因而二者升力都等于零, 所以单纯的相对厚度不是产生升力的因素。图 6-9 是一个相对弯度 $\bar{f} > 0$ 的翼型, 迎角 $\alpha = 0$ 的绕流图画, 由于弯度作用使上翼面流管比下翼面流管细, 同样出现上下翼面的压力差, 产生升力。比较图 6-8(a) 及图 6-9, 可知二者迎角均为零, 而 $\bar{f} = 0$ 的翼型 (对称翼型) $Y = 0$; $\bar{f} > 0$ 的翼型 $Y > 0$ 。所以翼型的相对弯度 $\bar{f}$ 及中弧线是产生升力的另外一个因素。可见增大翼型的弯度, 增大迎角, 将增大上下翼面的压力差, 即增大升力。

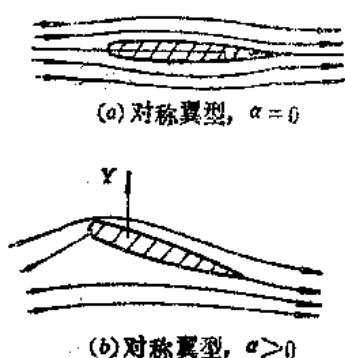


图 6-8

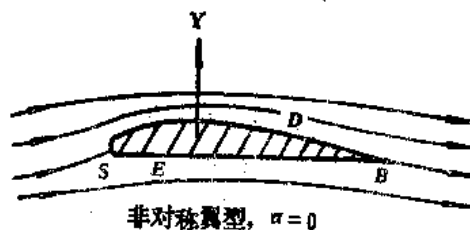


图 6-9

由图 6-9, 我们还注意到有一条流线在翼型前部某点 S 处分为绕上翼面和绕下翼面的两分支 SD 及 SE , 这两条流线在后缘 B 点又汇合在一起, 然后向后流去。我们知道, 流线一般是不能相交的, 因为流体质点不能同时具有两种速度方向。现在流线在 S 点分为两支, 只有 S 点的速度为零, 才有可能, 也就是 S 点是一驻点 (滞点), 称为前驻点。对于理想流体而言, 后缘 B 点也必是一驻点, 称为后驻点。

二、理想流体绕翼型的流动模型

如用一周线 K 包围上述翼型, 见图 6-10 联系 §4-6 儒柯夫斯基升力定理, 包围翼型曲线 K 的速度环量 Γ 不等于零。

单位长度翼型上作用的总空气动力大小 $Y = \rho V_\infty |\Gamma|$, 其中 ρ 代表流体的密度; V_∞ 代表来流的速度; Γ 代表绕翼型的速度环量; 总空气动力方向垂直来流向上。由于理想流体总空气动力只有升力, 阻力为零。

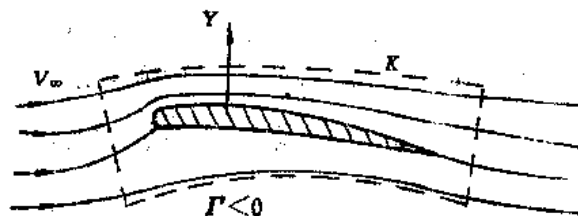


图 6-10

由上述讨论可见气流流经有升力的翼型时, 绕翼型上下表面的速度分布相当于旋涡的作

用。为便于作理论研究，我们在讨论气流经翼型流动时，可以将翼型用相应的旋涡来代替，这种旋涡称为附着涡。附着涡的强度用绕翼型的环量表示。

那么这个环量与机翼翼型几何特性、迎面气流速度和迎角有什么关系，用什么条件来确定呢？

下面观察气流开始绕翼型流动的过程。一个翼型在原为静止的气体里突然运动起来，最初短时间内，其流型如图 6-11(a) 的样子（这是观察者和翼型在一起运动时所看到的情况）。这时，从下翼面流来的气流

将绕过翼型的尖锐后缘，然后与从上翼面流来的气流会合，再向后方流去。但是对于这种具有尖锐后缘的翼型，这种流动立刻在后缘产生分离，在后缘和上翼面后驻点之间的

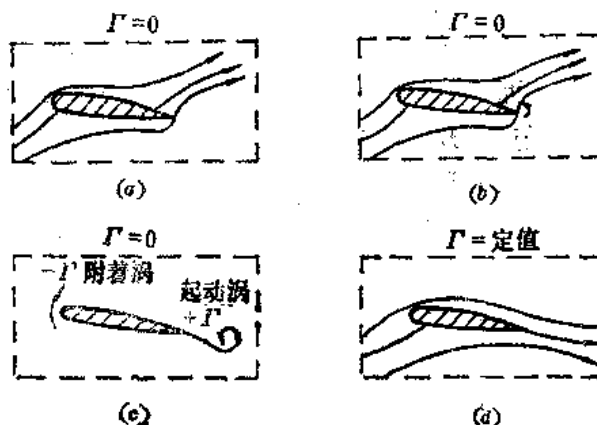


图 6-11

的气流立即卷起一个逆时针的旋涡（称为“起动涡”），见图 6-11(b)，设该旋涡的强度为 Γ ，该旋涡由气流夹着向后方流去。根据旋涡环量守恒原理，与此同时，绕翼型产生一个与之大小相等，旋转方向相反

的环量 $(-\Gamma)$ 的旋涡，见图 6-11(c)，这就是翼型上的环量 $(-\Gamma)$ ，其大小使后驻点退到后缘上去，使气流平滑地流过上下翼面，在后缘处会合，并沿着后缘切线或中弧线的切线方向流走。这就是用以确定环量的所谓库塔-儒柯夫斯基条件。在定常流动中，绕翼型的流动图画接近于这种方式，见图 6-11(d)。显然翼型的这个环量 $(-\Gamma)$ ，使上翼面气流加速、下翼面气流减速，使其产生一个垂直气流方向的升力。随着来流速度、迎角及翼型相对弯度 f 的增加，升力增大，实质上是绕翼型的环量数值增大。

为了便于理论研究，用一个或许多个位于机翼上具有相应环量的旋涡，使翼型上下翼面的绕流在后缘处平滑地会合，沿着后缘切线或中弧线流走，这就是理想流体绕翼型流动模型，利用这模型我们将计算翼型的气动力。

三、翼型的压强分布及升力特性

1. 翼型的压强分布

作用在翼型的上下翼面的压强分布确定后，可以求出翼型的空气动力（摩擦阻力除外），同时它在计算翼型的强度时也是不可少的。

作用在翼型上下翼面的压强，通常有两种表示法，可用向量表示法或坐标表示法。向量表示法就是将所测量出的翼面各点的压强与远前方来流的压强 p_∞ 之差，称为剩余压强，与相对气流中远前方来的空气动力压 $q = \frac{\rho V_\infty^2}{2}$ 之比，叫做压强系数，以 C_p 来表示，画在翼型表面法线上，如图 6-12(a) 所示，其中的 C_p 数字表达式为

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} \quad (6-1)$$

由上式可见,凡是比 p_∞ 低的,剩余压强为负值,称为吸力,箭头方向朝外;凡是比 p_∞ 高的,剩余压强为正值,称为正压力,箭头方向指向翼表面。然后将各向量外端用光滑曲线连接起来。

坐标表示法就是以翼表面各点在翼弦上的投影至前缘距离 x 与翼弦 b 之比——作横坐标,然后由这些点上测出的压强值求出 C_p 值,按纵坐标画出。高于 p_∞ 的点,画在横坐标下方,低于 p_∞ 的点画在横坐标上方。这就是用坐标表示的压强分布图,如图 6-12(b) 所示。

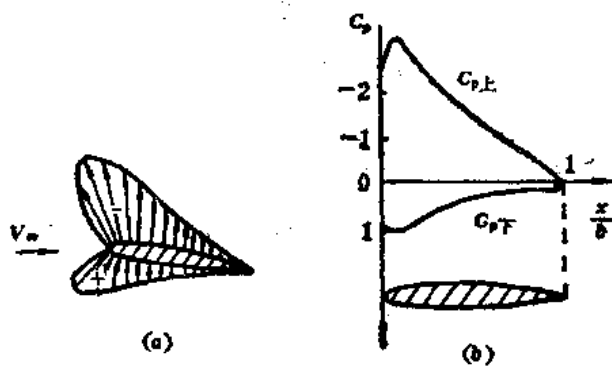


图 6-12

由于我们讨论的是低速理想流动,密度 ρ 不变,即 $\rho_\infty = \rho$,按伯努利方程

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

所以

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \quad (6-2)$$

翼型或机翼的升力通常用升力系数表示,它是升力除以动压和翼型(机翼)面积的乘积

$$C_y = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} \quad (6-3)$$

式中 S 为翼型(机翼)的面积。

为了从压强分布找到气流对翼型的总的作用力,我们分析图 6-13 中翼型表面微段 ds 上的力(设垂直纸面方向上的翼型长度为 1 个单位),根据压强的定义,知道 ds 上作用的力 $dF = p ds$ 。设 dF 在 y_1 轴方向上分量为 dY_1 ,根据相似三角形定理, $\frac{dY_1}{dF} = \frac{dx_1}{ds}$ 。所以 $dY_1 = dF \frac{dx_1}{ds} = p dx_1$ 。

由图可见,翼型上表面上的力 dY_1 指向 y_1 轴负向,下表面上的力 dY_1 指向 y_1 轴正向,所以作用在翼型上的 y_1 方向上分力总和 Y_1 (称法向力)为

$$Y_1 = \int_0^b (p_{\text{下}} - p_{\text{上}}) dx_1 \quad (6-4)$$

定义翼型的法向力系数 C_{y1} 为

$$C_{y1} = \frac{Y_1}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \frac{Y_1}{q_\infty \cdot b \cdot 1} \quad (6-5)$$

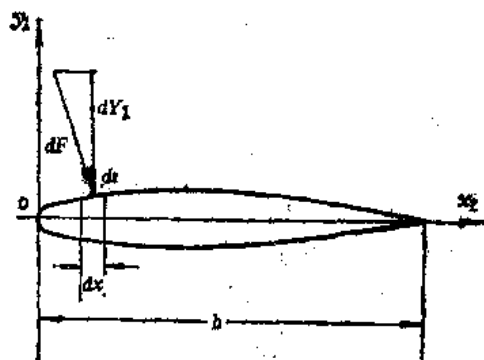


图 6-13

于是

$$C_{y1} = \frac{\int_0^b (p_{\text{下}} - p_{\text{上}}) dx_1}{q_{\infty} b} = \frac{\int_0^b [(p_{\text{下}} - p_{\infty}) - (p_{\text{上}} - p_{\infty})] dx_1}{q_{\infty} b}$$

所以

$$C_{y1} = \int_0^1 (C_{p\text{下}} - C_{p\text{上}}) d\bar{x}_1 \quad (6-6)$$

式中 $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{b}$ 。所以，如果将测得的压强系数画成图 6-12(b)，则由上下翼面压强系数曲线

围成的面积，就是法向力系数值。根据同样道理，可求得切向力系数 $C_{x1} = \frac{x_1}{q_{\infty} b}$ 。

在已知 C_{y1} 、 C_{x1} 后，可以求得总的空气动力系数 C_R ，

$$C_R = \sqrt{C_{y1}^2 + C_{x1}^2} \quad (6-7)$$

按图 6-14 的几何关系，还可求得升力系数 C_y （与 V_{∞} 方向垂直）和阻力系数 C_x （顺气流方向，其定义见后）。

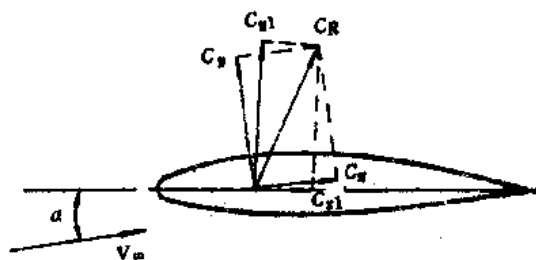


图 6-14

$$\left. \begin{aligned} C_y &= C_{y1} \cos \alpha - C_{x1} \sin \alpha \\ C_x &= C_{y1} \sin \alpha + C_{x1} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

由于迎角 α 一般不大， C_{x1} 也不大，所以 $\cos \alpha \approx 1$ ， $\sin \alpha \approx \alpha$ ，上式为

$$\left. \begin{aligned} C_y &= C_{y1} \\ C_x &\approx C_{y1} \alpha + C_{x1} \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

所以

$$C_y \approx \int_0^1 (C_{p\text{下}} - C_{p\text{上}}) d\bar{x} \quad (6-10)$$

2. 翼型的升力特性

翼型压强分布是随迎角 α 而变的，可以通过实验方法来确定，图 6-15 为某翼型在不同迎角下的压强分布图。由压强分布图可以得到升力系数随迎角变化数据。将升力系数随迎角变化规律用曲线表示，大致如图 6-16 所示。

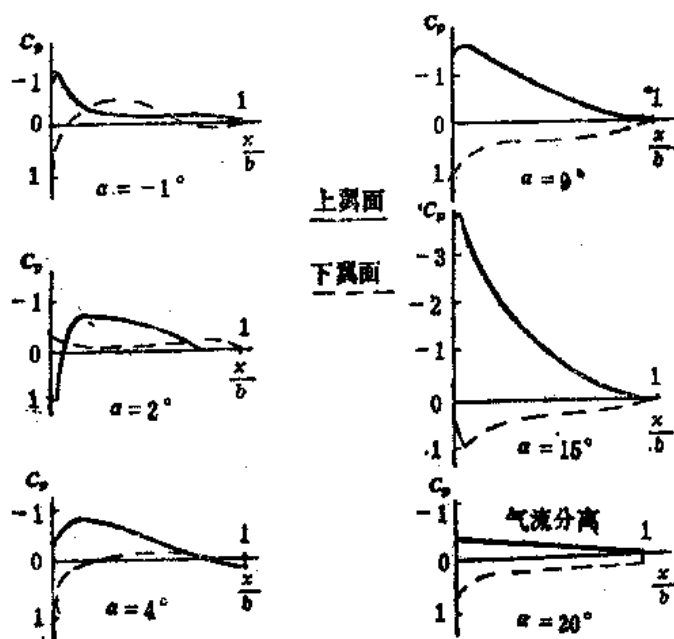


图 6-15

$C_y = 0$ 时的迎角称为零升力迎角 α_0 ，升力系数曲线在 α 不太大时接近于一曲线，该直线的斜率 $a_0 = \frac{dC_y}{d\alpha}$ ，称升力系数曲线斜率。薄翼型的 a_0 理论值 $a_0 = 2\pi \frac{1}{\text{弧度}} = 0.1096 \frac{1}{\text{度}}$ 。由于

该理论没有考虑粘性影响, 实验结果的 α_0 只有理论值的 0.9 左右。当迎角继续增大时, 实验曲线开始偏离直线, 就是说升力增加得不那么快了。当迎角增加超过一定数值后, 上翼面出现大面积涡流区, 如图 6-17 所示, 因而上翼面吸力显著下降, 上下翼面压差减小, 升力急剧下降, 这种现象称为失速。其对应的迎角称为临界迎角。临界迎角对应的升力系数是最大的升力系数。

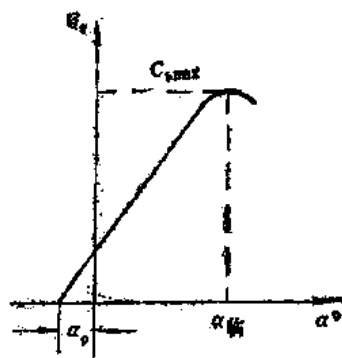


图 6-16



图 6-17

四、翼型的力矩特性, 压力中心与焦点

1. 压力中心

图 6-18 表示翼型上作用的空气动力 R , 空气动力 R 与翼弦的交点称为压力中心。压力中心距前缘的位置用 $x_{\text{压}}$ 表示。

2. 翼型的俯仰力矩

作用在翼型上的空气动力 R , 分解为垂直翼弦的法向力 Y_1 和平行于翼弦的切向力 X_1 。压力中心的位置 $x_{\text{压}}$ 随迎角变化而变化, 为了方便起见, 我们在翼弦上任意选定一点 p 。则空气动力对 P 点的力矩可写为

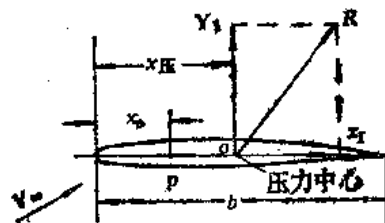


图 6-18

$$M_{sp} = -Y_1(x_{\text{压}} - x_p)$$

我们规定力矩使翼型抬头为正, 低头为负。在迎角不大的情况下, 上式可近似表达为

$$M_{sp} \approx -Y(x_{\text{压}} - x_p)$$

式中 Y 为升力。工程计算中常用力矩系数形式

$$m_{sp} = \frac{M_{sp}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} = \frac{-Y}{q_{\infty} S} \left(\frac{x_{\text{压}} - x_p}{b} \right)$$

所以

$$m_{sp} = -C_y(\bar{x}_{\text{压}} - \bar{x}_p) \quad (6-11)$$

式中

$$\bar{x}_{\text{压}} = \frac{x_{\text{压}}}{b},$$

$$\bar{x}_p = \frac{x_p}{b}.$$

3. 焦点

如果我们变换不同的迎角作实验, 求出各个迎角下对应的升力系数和力矩系数 m_{xp} , 画出 m_{xp} 与 C_y 曲线, 如图 6-19 所示。在 C_y (或 α) 不大时, 曲线近似呈直线形状。选择不同的计算力矩点 p 时, 曲线的斜率不同。当 x_p 处于某个位置 (图中为 0.25) 时, m_{xp} 几乎不随 C_y 而变化, 近似为一条水平线。这个使力矩系数不随 C_y 而变的点 p 的位置, 在空气动力学中, 称为焦点或空气动力中心。绕该点的力矩系数用 m_{x_0} 表示, 因为它不随 C_y 而变化, 即使 $C_y = 0$ 时, 其大小亦如此, 故称零升力矩系数。设焦点距前缘的位置用 $x_{\text{焦}}$ 表示, 对于一个翼型, m_{x_0} 与 $x_{\text{焦}} = \left(\frac{x_{\text{焦}}}{b}\right)$ 有一定值。可见式(6-11)中 p 点为焦点时, 则

$$m_{x_0} = -C_y(\bar{x}_{\text{压}} - \bar{x}_{\text{焦}}) \quad (6-12)$$

所以

$$\bar{x}_{\text{压}} = \bar{x}_{\text{焦}} - \frac{m_{x_0}}{C_y} \quad (6-13)$$

从上式看到空气动力作用点, 即压力中心, 一般说并不是焦点, 它是随升力系数 C_y (或迎角 α) 变化的。由图 6-20 可见, 随着 C_y 增大, 压力中心向前移, 逐渐接近焦点。只有对于 $m_{x_0} = 0$, 这时 $\bar{x}_{\text{压}} = \bar{x}_{\text{焦}}$ 。

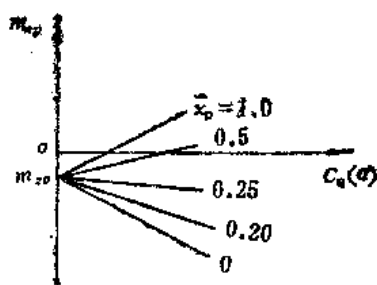


图 6-19

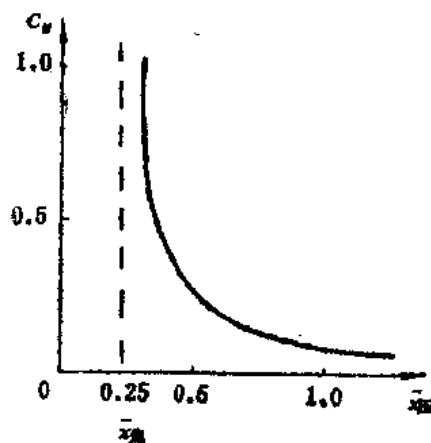


图 6-20

将式(6-13)代入式(6-11)得

$$m_{xp} = m_{x_0} - C_y(\bar{x}_{\text{焦}} - \bar{x}_p) \quad (6-14)$$

式(6-14)中, m_{x_0} 和 $\bar{x}_{\text{焦}}$ 对于一定翼型是确定值, 此式得到了广泛运用。

4. 焦点是升力增量作用点

设在迎角 α 下, 升力 Y 作用在 A 点。 α 增加为 $(\alpha + \Delta\alpha)$, 升力 Y 增加为 $(Y + \Delta Y)$, 作用在 B 点, 见图 6-21。我们可以把升力 $(Y + \Delta Y)$ 设想为作用在 A 点的 Y 以及作用在某点 C 的升力 ΔY 的合成。那么绕 C 点的力矩 M_c 为

$$M_c = YCA = (Y + \Delta Y)CB$$

即迎角为 α 时绕 c 点的力矩等于迎角为 $(\alpha + \Delta\alpha)$ 时绕 C 点的力矩, 就是说绕 C 点的力矩不

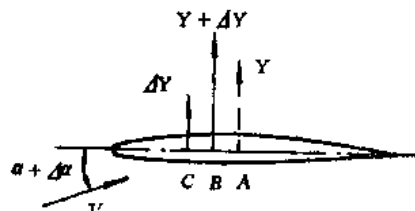


图 6-21

随迎角 α 而变化。这只有当C点为焦点时才能成立，即升力增量作用在焦点上。反过来说，焦点是迎角 α 改变时升力增量的作用点。

五、翼型的阻力特性

1. 附面层对空气动力的影响

当气流以低速绕翼型流动时，在翼型上下表面处将产生附面层，上下表面附面层在后缘汇合形成尾流流向远方，见图6-22。若迎角很小，附面层和尾流都比较薄，与翼剖面弦长相比是一个很小量。因此，由附面层外缘组成的新翼型边界与原翼型边界相差是极其微小的，而附面层外面粘性作用又不明显，所以在研究与粘性关系不大的升力问题时，将流体绕翼型的流动看成为理想流体绕翼型的流动，这样便于进行理论计算。但实际的流体是有粘性的，它将改变了绕翼型的流动，产生了阻止翼型运动的力，将引起气流分离，使翼型升力系数下降。下面我们分别来讨论这两个问题。

(1) 粘性产生阻止翼型运动的力 产生阻止翼型运动的力，其中一部分是表面摩擦阻力，这在前面已经提到过。其余一部分是由于改变了绕翼型的流线谱（由附面层“位移厚度”引起的），从而改变了绕翼型表面的压强分布。使在翼型表面上作用的气动力在顺气流方向有了分量，称为压差阻力。

粘性流动在翼型表面附近形成附面层，我们可以把绕原有翼型的流动看作外形上外加一个附面层位移厚度的物体流动。翼型后缘处，原来形状是有一个尖角的，这样理想流体绕原有翼型的流动在后缘处速度为零，即后缘为后驻点，因此压强系数为+1。现在在原有翼型外形上加了一个附面层厚度，也就是在后缘处假想物体的外形有一定厚度，因此该处速度不为零，压力系数小于+1。从能量观点可知，由于气流的粘性，消耗了气流的机械能，导致翼型在后缘处的总压将小于前缘处的总压。



图 6-22

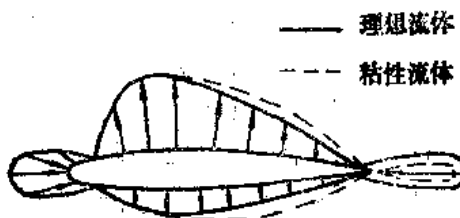


图 6-23

图6-23表示理想流体和粘性流体绕翼型流动时，压强分布图，可见前缘附近的压力推翼型向右，在翼型最大厚度以前的低压拉翼型向左，在翼型最大厚度以后低压拉翼型向右，而后缘处的压力又推翼型向左。在理想流体中，向左和向右的力正好抵消。在粘性流体中，压强分布改变了，翼型前部改变得少，而后部改变得大，后缘处的压力降低很多，因此总的合力有一个向右的分量，这就是翼型的压差阻力。由于低速翼型的压差阻力主要是附面层引起的，因此确切地说，应该称之为“附面层压差阻力”。附面层压差阻力与摩擦阻力之和，即是低速翼型的阻力。随着来流迎角 α 的增大，翼型上表面的逆压梯度增大，附面层将类似第五章所述气流绕圆柱流动时一样，将产生分离，这时附面层分离所引起的压差阻力在翼型阻力中所占的比例将大大超过摩擦阻力，而不像在迎角较小时，翼型阻力主要是摩擦阻力。

翼型表面分离情况大致如下。图 6-24 表示某翼型在迎角 α 下的压强分布。根据附面层内法向压强不变的性质，所以附面层切向（沿翼面方向）的压强变化是随外部气流压强而变化。在翼型上表面，从 A 点到 B 点压强下降，即 $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ ，从 B 点到 E 点压强回升，即 $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ 。因而附面层内压强沿 x 方向也要随之改变，图 6-25 中的曲面取自翼型表面一段，



图 6-24

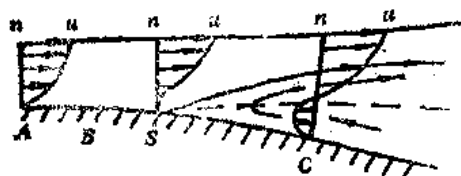


图 6-25

AB 段是气流加速段，即 $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ ，B 点 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ，即为最小压强点，BC 段为减速段， $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ，随着迎角 α 的增大，逆压梯度的增加，在 BC 段内附面层气流不仅受到粘性阻滞，而且还受到不断增大的逆压梯度（即 $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ）的阻滞，进一步使速度减少，结果使速度分布图形发生变化。在 S 点出现 $\frac{du}{dn} = 0$ 点，再往后 $\frac{du}{dn} < 0$ （如 C 点），在曲面的 SC 段上出现了气流倒流和旋涡。使得附面层内的气流离开曲面表面，这就产生了附面层的分离。对应的 S 点，即 $\left(\frac{du}{dn}\right)_{n=0} = 0$ 点，称为附面层分离点。分离点后出现了很多不规则的旋涡，消耗气流较多的动能。如若流速恢复到同机翼前部的流速相等，那么压强就不可能恢复到同机翼前部的流速相等时的压强，而要比它小。与气流不分离相比较，增加了沿气流方向上压力差，故这部分由分离引起的压差阻力较附面层压差阻力大得多。

（2）粘性使翼型失速 前已提到，翼型上表面的逆压梯度大到一定程度，附面层将出现分离现象，如图 6-26 所示。附面层分离后，上翼面的气流不再绕到翼型的后缘，而是沿 ASE 流向下流，这样改变了整个流型。如图所示，绕过 ASE 那个物面，这样上翼面前缘附近（它对升力的贡献最大部分）流速变慢，压强变高，于是升力下降，这就是失速现象。

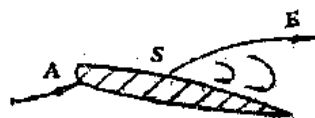


图 6-26

由上述可知，附面层分离将引起翼型的压差阻力增加，同时引起升力下降，即失速。为了提高飞行性能，人们设法采取有关措施尽量延迟或减轻分离。

2. 翼型的阻力特性

（1）低速翼型阻力 翼型阻力包括摩擦阻力和压差阻力。翼型的阻力 X ，通常用阻力系数 C_x 表示

$$C_x = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{X_{\text{摩}} + X_{\text{压差}}}{q_\infty S} = C_{x\text{摩}} + C_{x\text{压差}} \quad (6-15)$$

式中 S 代表翼型面积。

有时把升力为零时的阻力系数称型阻。这时翼型阻力主要由摩擦阻力组成。因处于小迎角，其压差阻力比较小。工程上估算型阻时，可以把它作为平板计算，然后加以适当的厚度修正，即

$$C_{x\text{型}} = 2C_f \cdot \eta_c \quad (6-16)$$

式中 $2C_f$ 代表相当平板的摩擦阻力系数；

η_c 为计及剖面形状影响的修正因子，见图 6-27。

$2C_f$ 与雷诺数和附面层的转换点位置有关，可查图 5-16。图中 $Re = \frac{V_\infty b}{\nu}$ ， b 是翼型的弦长； $\bar{x}_T$ 是转换点距前缘的相对位置。

翼型阻力随迎角而异，可把阻力分成升力为零时阻力及与升力有关的阻力两部分

$$C_x = C_{x\text{型}} + \Delta C_x \quad (6-17)$$

式中 $C_{x\text{型}}$ 为翼型零升阻力系数（有人把这部分称为翼型阻力系数）；

ΔC_x 为因升力引起的阻力系数增量。

(2) 阻力特性曲线 大量实验证明，升阻曲线（极曲线）接近于一条抛物线，见图 6-28 所

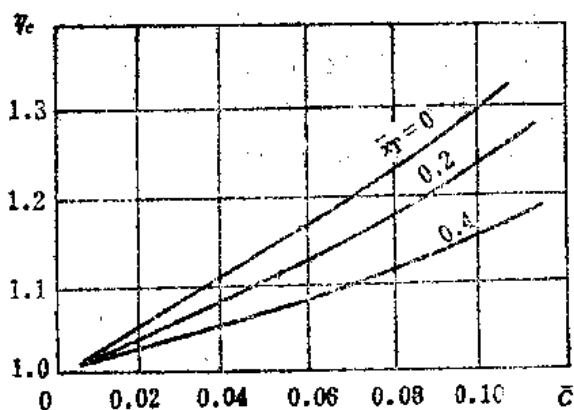


图 6-27

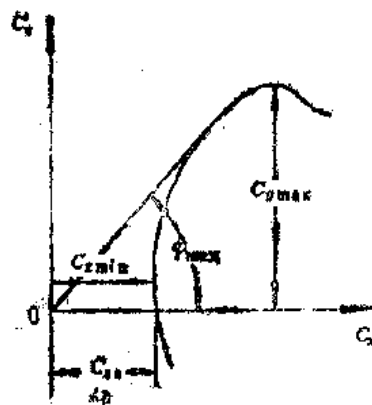


图 6-28

示。由图可见，小 C_y 时，对应中小迎角， C_x 较小，且增加较慢。在大 C_y 时，对应大迎角， C_x 增加较快。当 C_y 大于 $C_{y\text{max}}$ 时，即迎角大于临界迎角， C_x 急剧增大。其原因是：在中小迎角范围内，气流尚未分离，阻力主要是摩擦阻力，其大小不受迎角影响，因此 C_x 较小且基本不变。在大迎角时，出现气流分离，压差阻力增大，因此 C_x 增加很快。当迎角超过了临界迎角后，由于气流产生分离，压差阻力急剧增大，因此 C_x 急剧增加。

§ 6-3 翼型的低速薄翼理论简介及翼型参数对气动特性影响

相对厚度和相对弯度都很小的翼型称为薄翼型。薄翼型在小迎角时的升力特性和力矩特

性,可以用解析方法来确定。低速翼型的薄翼理论解决这个问题的思路是,整个流动假设是无粘(理想流体不能解决有关阻力特性和大迎角的升力特性、力矩特性的问题);翼型用附着涡面来代替。对于薄翼,则附着涡就布置在中弧线上,然后用翼面必须是一条流线的条件(又称物面边界条件)来决定附着涡强度;有了附着涡强度,据儒柯夫斯基升力定理就可确定翼型升力。

关于低速翼型的薄翼理论的推导已超出本课程大纲要求。下面着重介绍薄翼理论的结论及其与实验结果比较。

一、升力系数斜率 $\frac{dC_y}{d\alpha}$

根据薄翼理论可知,在小迎角、小弯度、无厚度条件下,低速理想流体中

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = 2\pi \left(\frac{1}{\text{弧度}} \right) = 0.1096 \left(\frac{1}{\text{度}} \right)$$

NACA 四位数字和五位数字翼型实验结果表明, $dC_y/d\alpha$ 比理论值小,见图 6-29 所示,并且随相对厚度 $\bar{c}$ 的增加略有下降。这由于粘性影响的结果,在有迎角时,上翼面前缘附近的压强较低,流向后缘时,压强增高。所以气流在流向后缘时,受到一个较大的逆压作用,而下翼面逆压较小(有时为顺压),这样上翼面的附面层厚度增长较下翼面为快,在后缘附近上翼面的附面层就比下翼面厚。如果把上下翼面在后缘处的附面层位移厚度的中点视为有效后缘,它就在翼型真实后缘之上。这就相当于减小了迎角和弯度,结果引起 C_y 减小。随着迎角增加,沿上翼面的逆压梯度增强,有效后缘更往上,这就使增加单位迎角时的 C_y 增量达不到理论值。因而 $dC_y/d\alpha$ 的实验值比理论值小。翼型相对厚度增加时,也要引起上翼面逆压梯度增加,因而 $dC_y/d\alpha$ 的实验值随 $\bar{c}$ 增加略有下降。

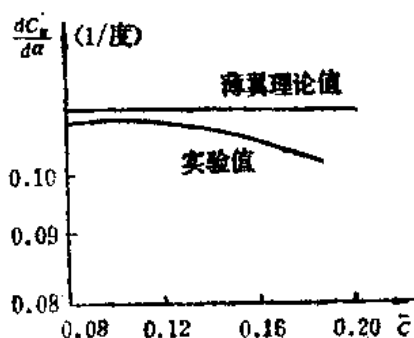


图 6-29

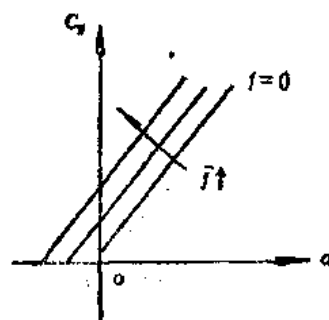


图 6-30

二、零升迎角 α_0 。

据薄翼理论, α_0 只与中弧线形状有关。若 $\bar{f} > 0$, 则 $\alpha_0 < 0$ 。大量计算和实验结果表明, 对于中弧线全在翼弦之上的翼型而言, 零升迎角与弯度有如下关系

$$\alpha_0 = -\bar{f} \times 100 (\text{度}) \quad (6-18)$$

如 $\bar{f}$ 增加, 则 α_0 之绝对值也增加, 图 6-30 表示了这种翼型的 $\bar{f}$ 对 $C_y \sim \alpha$ 曲线的影响。

三、参数对最大升力系数 $C_{y\max}$ 的影响

最大升力系数 $C_{y\max}$ 的大小一般由实验确定。影响 $C_{y\max}$ 的因素较多，主要有相对厚度 $\bar{c}$ 、相对弯度 $\bar{f}$ 、最大弯度相对位置 $\bar{x}_f$ 、雷诺数 Re 等。

1. 相对厚度 $\bar{c}$ 的影响

由图 6-31 可见，在 $\bar{c}$ 较薄的范围（图中为 6—14%），随 $\bar{c}$ 的增大而增大；而 $\bar{c}$ 较厚时（图中为 14%），随 $\bar{c}$ 的增大而减小。这是因为，在薄翼时，决定 $C_{y\max}$ 的是前缘分离， $\bar{c}$ 增大将延缓前缘分离，故 $C_{y\max}$ 增大；当相对厚度较厚时，决定 $C_{y\max}$ 的则是后缘分离， $\bar{c}$ 越大，则易出现后缘分离，故 $C_{y\max}$ 减小。

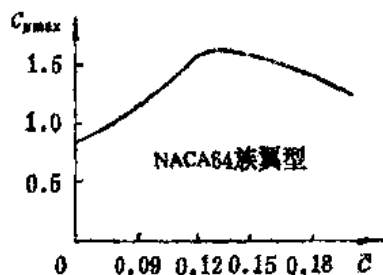


图 6-31

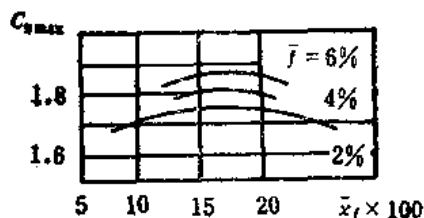


图 6-32

2. 相对弯度 $\bar{f}$ 和最大弯度的相对位置 $\bar{x}_f$ 的影响

由图 6-32 可见， $\bar{f}$ 较大的翼型 $C_{y\max}$ 较大，对于同一的 $\bar{f}$ ，在 $\bar{x}_f = 15\%$ 时， $C_{y\max}$ 最大。

3. 雷诺数 Re 的影响

如前所述， $C_{y\max}$ 的出现是由于附面层分离的结果。增加 Re 数，有延缓分离的作用，因而同一翼型的 $C_{y\max}$ 将随 Re 数的增加而增加，图 6-33 的实验结果证实了这一点。

翼型 $C_{y\max}$ 受到很多因素影响，很难用几种曲线来描述适合各种翼型的统一图形。在使用有关数据时，应查找实验结果，并注意实验时的对应 Re 数。

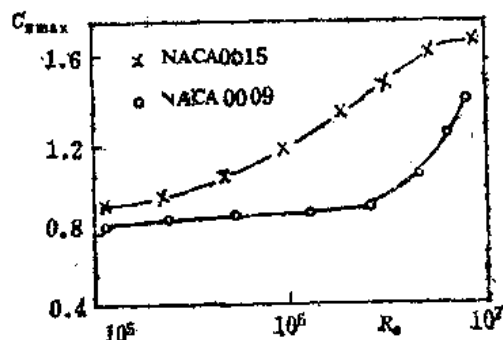


图 6-33

§ 6-4 绕大展弦比机翼的低速流动

前面讨论了绕翼型的流动，即气流绕翼展为无限长的机翼流动。实际机翼的翼展都是有有限长的，它与翼型流动是有区别的，即绕机翼的流动是三维的。

现分析大展弦比后掠角为零的机翼的流动情况，由图 6-34 所示。前面已提到气流以迎角 α 流过翼型时，下表面的压强比上表面的压强大，产生升力。但是对于有限展长机翼，靠

近翼尖部分,下表面压强高的气流会绕过翼尖向上表面流去,在翼面上造成横向流动,在机翼后面形成一涡流面,并很快卷成二根翼尖涡来,向后面延伸出去,称为自由涡。这种情况在翼型的流动中是没有的,这种流动将产生新的阻力——诱导阻力,并使升力系数斜率 $\frac{dC_y}{d\alpha}$ 下降。

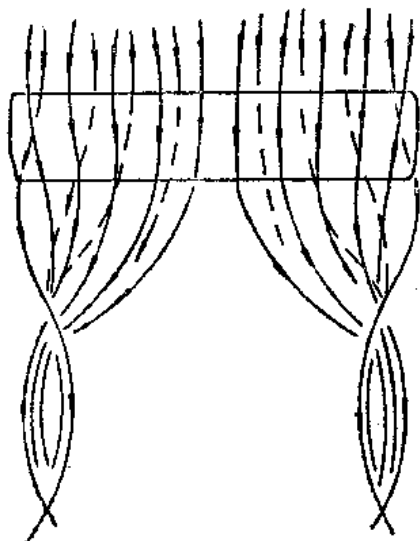


图 6-34

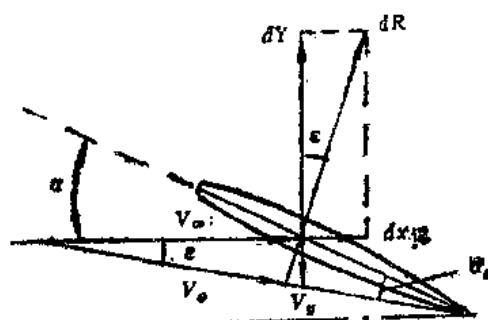


图 6-35

一、诱导阻力、下洗速度和下洗角

有限翼展机翼后面的涡面很快卷成从翼尖伸出的二根自由涡。在此自由涡旋转作用下,沿机翼展长范围内空气产生了一个诱导速度 $\vec{v}_y$,称为下洗速度。离旋涡中心越近,下洗速度的数值越大。现在来分析展向任一剖面的流动情况,如图 6-35 所示。当气流以速度 V_∞ 、迎角 α 流向机翼时,由于翼尖自由涡的存在,将在该剖面产生一个下洗速度 $\vec{v}_y$,使该剖面处气流的有效速度为 $\vec{V}_e = (\vec{V}_\infty + \vec{v}_y)$,迎角减小了一个下洗角 ϵ ,而变为 α_e , $\alpha_e = (\alpha - \epsilon)$ 。因此,设所取机翼微段为 dz ,由升力定理可知,它所产生的总空气动力 $\vec{dR}$ 将垂直于 $\vec{V}_e$,即与不考虑自由涡引起下洗情况相比,升力方向后倾了一个下洗角 ϵ , $\vec{dR}$ 在 $\vec{V}_\infty$ 方向的分量即为该微段机翼的阻力 $dX_{\text{诱}}$,将各微段机翼的 $dX_{\text{诱}}$ 沿展向积分,即得全机翼的诱导阻力 $X_{\text{诱}}$ 。在空气动力学中常用系数型式,诱导阻力系数定义为

$$C_{x_{\text{诱}}} = \frac{X_{\text{诱}}}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} \quad (6-19)$$

所以三维机翼与翼型不同,除了摩擦阻力和压差阻力外,还多了一个诱导阻力。它的产生是由于机翼在飞行过程中要不断地形成自由涡,作为动能包含于自由涡中,它就表现为机翼向前飞行时克服阻力所作的功。

除了产生诱导外, $\vec{dR}$ 在垂直于来流方向的分量仍起升力的作用。所以在来流迎角 α 下,该剖面的升力系数值较二维翼型的升力系数值为小 ($\alpha_e < \alpha$)。即机翼的升力系数斜率

$a = \frac{dC_y}{d\alpha}$ 较二维翼型的升力系数斜率 $a_0 = \frac{dC_y}{d\alpha}$ 为低。

由升力线理论可知，无扭椭圆机翼和相应翼型，当产生相同 C_y 值时，它们的迎角分别以 α 和 α_0 表示，则

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{C_y}{a} - \frac{C_y}{a_0} = \varepsilon$$

由升力线理论得

$$\varepsilon = \frac{C_y}{\pi\lambda} \quad (6-20)$$

上式可得

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{a_0}{\pi\lambda}} \quad (6-21)$$

诱导阻力系数

$$C_{xi} \approx C_y \varepsilon = \frac{C_y^2}{\pi\lambda} \quad (6-22)$$

式中 λ 为机翼的展弦比；

C_y 为机翼的升力系数。

对于梯形及长方形等其它平面形状的机翼，也可以由理论分析得下列关系式

$$\varepsilon = \frac{C_y}{\pi\lambda} (1 + \tau) \quad (6-23)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{a_0}{\pi\lambda} (1 + \tau)} \quad (6-24)$$

$$C_{xi} = \frac{C_y^2}{\pi\lambda} (1 + \delta) \quad (6-25)$$

式中 τ 和 δ 是与平面形状及展弦比等有关的修正系数。下表给出不同平面形状的 τ 和 δ 的平均数值。

表 6-1

平面形状	$\frac{1}{\pi}(1+\tau)$	$\frac{1}{\pi}(1+\delta)$	附 注
椭圆	0.318	0.318	$\tau = \delta = 0$
梯形	0.318	0.318	$\eta = 2 \sim 3$
长方形	0.376	0.335	$\lambda = 5 \sim 8$
翼尖后倾长方形	0.338	0.318	$\lambda = 5 \sim 8$
翼尖修圆长方形	0.365	0.318	$\lambda = 5 \sim 8$

图 6-36 给出了矩形机翼的修正值 τ 和 δ 与 λ 关系曲线。

从表 6-1 可看出梯形翼的 τ 和 δ 值最接近最佳平面形状——椭圆机翼。由于椭圆机翼在制造时的工艺困难，低速飞机的机翼广泛采用 $\eta = 2 \sim 3$ 的梯形翼。

实践表明，在小迎角下，流体粘性影响不大时，对 $\lambda > 5 \sim 6$ (甚至 $\lambda > 3$)， $\alpha_{1/4} = 0$

(甚至 $\alpha_{1/4} < 20^\circ$) 的机翼来讲, 按升力线理论计算结果, 都比较接近于实验值。从而为大展弦比 λ 直机翼的气动设计 (几何参数选择) 提供了重要理论依据。

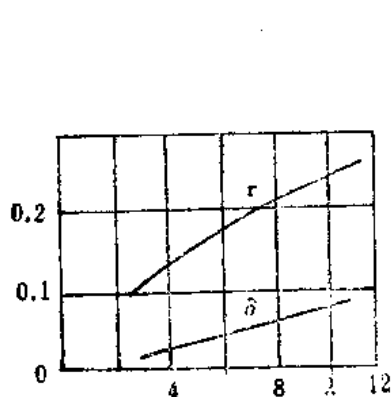


图 6-36

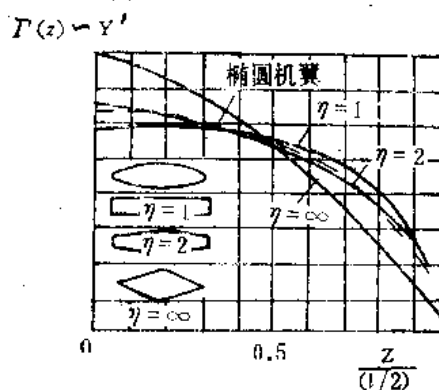


图 6-37

二、沿翼展的升力分布

前面提到, 由于机翼上、下表面气流压强不同引起翼尖处下翼面压强较高的气流向上翼面流动情况, 它使翼尖处压强趋于平衡, 由此, 该处的升力将为零, 靠近翼尖处的其它剖面显然也受此影响, 不同程度地减小了升力。当然, 离开翼尖越远, 影响越小。这样就出现各剖面的升力沿翼展的分布不均匀的情况。图 6-37 给出了在相等的升力 $Y = \text{常数}$ 情况下, 四个展弦比相同而根梢比 η 不同的梯形机翼各剖面的升力分布。图中 Y' 表示各个剖面的局部升力。由图可见, 根梢比 η 愈大, 靠近翼根剖面的升力愈大。这是因为, 在机翼总升力 $Y = \text{常数}$ 条件下, 增大 η , 意味着增大翼根附近剖面的弦长, 减少翼尖附近剖面弦长, 所以翼根附近剖面的升力势必加大。

三、低速大展弦比直机翼的失速特性

与翼型一样, 机翼在小迎角下, 其升力随迎角增大而直线增大; 到中等迎角时, 翼面开始发生分离, 这时升力仍然随迎角增大而增大, 但增大得比较缓慢; 到临界迎角 $\alpha_{\text{临}}$ 时, 升力达最大, 为 $C_{y\text{max}}$; 超过 $\alpha_{\text{临}}$ 后, 升力反而下降, 发生机翼失速现象。

但是, 当机翼在某一迎角 α 时, 机翼上各剖面的有效迎角却是不相同的, 因而各剖面的 C_l 值亦不相同, 见图 6-38 所示, 图中 C_l 表示机翼各剖面的升力系数, C_l 表示整个机翼的升力系数。因此, 各剖面达到 $C_{l\text{max}}$ 亦会有先后, 结果, 使整个机翼的 $C_{y\text{max}}$ 值比翼型小。图 6-38 看出, 椭圆机翼由于沿展向有效迎角相同, 故基本上是沿整个机翼后缘一齐分离的。因而, 机翼的 $C_{y\text{max}}$ 与翼型的 $C_{y\text{max}}$ 很接近。矩形机翼 ($\eta = 1$), 翼根部 C_l 较大, 对应诱导速度 $V_v(z)$ 较小, 根部的有效迎角大, 所以必定首先在根部分离, 然后向全翼展扩展, 见图 6-39 所示。而梯形机翼, 随着 η 增大, 对应诱导速度 $V_v(z)$ 减小, 所以翼尖附近的有效迎角增大, 因而气流开始强烈分离的剖面必定在翼尖附近。从飞机稳定性角度来看, 希望失速从翼根开始, 不希望从翼尖开始。为了改善根梢比带来的缺陷, 可以采用机翼扭转的办法 (或使翼尖迎角减小的几何扭转或采用气动扭转, 让翼尖配制失速迎角较大的翼型) 或在翼尖前缘采用开缝襟翼等措施。

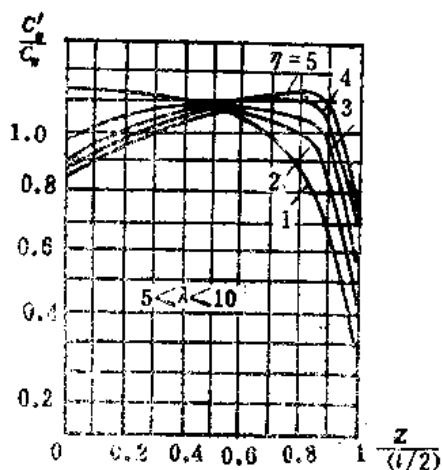


图 6-38

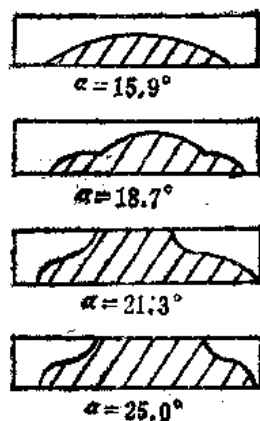


图 6-39

§ 6-5 后掠机翼与小展弦比机翼的低速气动特性

速度不高的飞机，一般采用大展弦比直机翼。当飞机速度增快，进入近音速或超音速时，就会出现激波阻力。为了延缓波阻的产生，或减少波阻，广泛采用后掠机翼和小展弦比机翼 ($\lambda < 3$)。但高速飞机还需要在低速飞行，如起飞和着陆。因此本节将介绍后掠机翼和小展弦比机翼的低速气动特性。

一、后掠机翼的低速气动特性

1. 无限翼展后掠翼的气动特性

设有一无限翼展后掠翼，空气以速度 V_∞ 流过此机翼，如图 6-40(a) 所示。将 V_∞ 分解

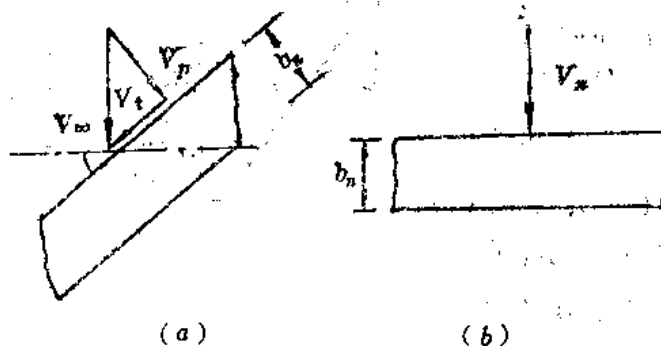


图 6-40

为两个分速，一个是垂直于前缘的法向流动分速 $V_n = V_\infty \cos \alpha$ ，一个是平行于前缘的展向流动分速 $V_t = V_\infty \sin \alpha$ 。如果此无限翼展后掠翼各剖面形状相同，由于气流是理想的，则沿翼展的展向流动对于翼面上的压强分布无影响。即无限翼展的后掠翼的压强分布仅与法向分速 V_n 有关。也就是说，来流的速度 V_∞ 流过无限翼展后掠翼时，机翼所受的气动力等于来流的法向速度 V_n 流过无限翼展平直翼的气动力，如图 6-40(b) 所示。我们可以利用无限翼展平直翼的气动特性来计算无限翼展后掠翼的气动特性。

设作用在平直翼单位展长上的升力为 Y ，升力系数为

$$C_{yn} = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b_n \cdot 1} \quad (6-26)$$

式中 b_n 为平直翼的弦长，就是后掠翼的法向弦长 ($b_n = b \cos \chi$)，则作用在后掠翼同一段长度上的升力仍为 Y ，升力系数为

$$\begin{aligned} C_{yz} &= \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b_n \cdot 1} = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b_n \cdot 1} \cos^2 \chi \\ &= C_{yn} \cos^2 \chi \end{aligned} \quad (6-27)$$

设作用在平直翼单位展长上的阻力为 X_n ，那末， V_∞ 方向的阻力系数为

$$C_{xn} = \frac{X_n}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b_n \cdot 1} \quad (6-28)$$

而作用在后掠翼同一段长度上在 V_∞ 方向的阻力 $X = X_n \cos \chi$ ，所以阻力系数为

$$\begin{aligned} C_{xz} &= \frac{X}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b_n \cdot 1} = \frac{X_n \cos \chi}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b_n \cdot 1} \cos^2 \chi \\ &= C_{xn} \cos^3 \chi \end{aligned} \quad (6-29)$$

后掠翼通常取与来流 V_∞ 平行的剖面弦线与 V_∞ 间的夹角为迎角；法向分速与法向剖面弦线的夹角为 α_n ，由图 6-41 可见，在迎角不大时

$$\alpha_n \approx \frac{ED}{DF} = \frac{CB}{AB \cos \chi}$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{\alpha}{\cos \chi} \quad (6-30)$$

因此
$$\begin{aligned} \frac{dC_{yz}}{d\alpha} &= \frac{d(C_{yn} \cos^2 \chi)}{d(\alpha_n \cos \chi)} \\ &= \frac{dC_{yn}}{d\alpha_n} \cos \chi \end{aligned} \quad (6-31)$$

从式(6-27)、式(6-29)、式(6-31)可见，由无限翼展平直翼的 C_{yn} 、 C_{xn} 、 $\frac{dC_{yn}}{d\alpha}$ 求得无限翼展后掠翼的 C_{yz} 、 C_{xz} 、 $\frac{dC_{yz}}{d\alpha}$ 。这些关系式清楚地说明

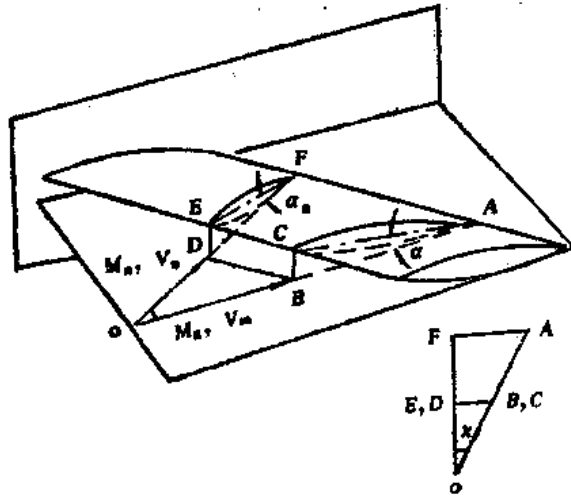


图 6-41

无限翼展后掠翼与无限翼展平直翼比较，其 C_{yz} 、 C_{xz} 、 $\frac{dC_{yz}}{d\alpha}$ 都比较小。

对于有限翼展后掠翼，除翼根和翼尖部分与无限翼展后掠翼差别较大外，其余部分则比较接近。可用上述关系定性分析后掠角对气动特性的影响。

通过实验可以看到，气流流过后掠翼时，流线将左右偏斜，呈“S”形，如图 6-42 所

示。当气流流过此机翼时，由于沿展向分速不变而法向分速不断改变，使得流线产生左右偏斜。空气从远前方流近前缘，法向分速受到阻滞而越来越慢（如图中的 $V_{nA} < V_n$ ），展向分速保持不变（ $V_{tA} = V_t$ ）。这样靠近前缘，不仅速度越来越慢，而且气流方向越来越向左偏斜。经前缘后，空气流向最小压强点（图示C点）的途中，法向分速又逐渐增加（ $V_{nC} > V_{nB}$ ），而展向分速不变（ $V_{tC} = V_{tB}$ ），所以局部流速渐渐增加且方向转向右边。以后，又因法向分速减小气流又转回原来方向。

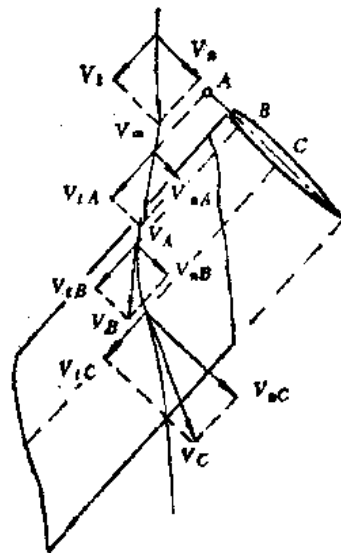


图 6-42

2. 后掠翼的流动图画，翼根效应和翼尖效应

对于有限翼展的后掠翼，由于翼根和翼尖的影响，使它与无限翼展后掠翼情况有一定差别。但在后掠翼的中段与无限翼展后掠翼十分接近，如图6-43所示。

后掠翼由于翼根和翼尖的存在，将引起所谓翼根效应和翼尖效应。图6-43画出了一等弦长后掠翼的流线谱。在翼根上表面的前段，流线偏离对称面，流管扩张变粗；而在后段流线向内偏斜，流管收缩变细。在低速或亚音速时，由于前段流管变粗，流速减慢，压强升高（吸力变小），而后段流管变细，流速加快，压强降低（吸力增大）。流管的最小截面位置后移，故最小压强点后移（相对于后掠翼中段而言），如图6-44所示，这种效应称为翼根效应。

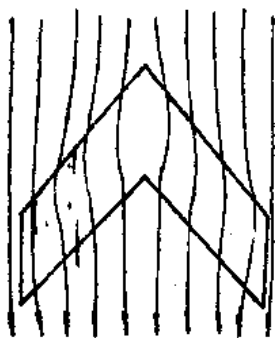


图 6-43

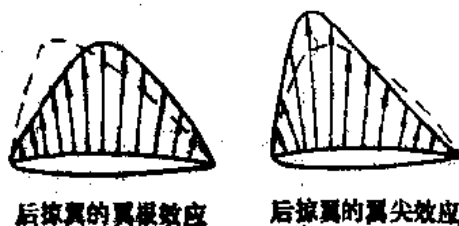


图 6-44

至于翼尖部分，情况正好相反，翼尖外侧的气流是径直向后流动。而翼尖部分的前段，由于流线向外偏斜，流管变细，流速加快，压强降低（即吸力增加），而在翼尖后段，流线向内偏斜，流管变粗，流速减慢，压强升高。因流管最小截面位置前移（相对于后掠翼的中段而言），虽然在翼尖部分下翼面的压力大于上翼面，造成向上翻的气流，增加了一些上翼面的压强，但由于流线偏斜的影响是主要的，最低压强点还是前移，这种现象称为翼尖效应。

由于翼根效应使翼根部分的平均吸力下降，升力减小， C_L 也减小，而翼尖效应使翼尖部分的平均吸力增大，升力增加， C_L 也增大。所以后掠翼各剖面升力系数沿翼展的分布是不同的，如图6-45所示。

综上所述,后掠翼的绕流特性有两个。首先,后掠翼部分地起到无限翼展后掠翼的作用,它的气动特性主要取决于法向分速,而法向分速是小于相对气流的速度。其次,是由于后掠翼存在翼根效应和翼尖效应,从而影响后掠翼沿展向的升力分布。图 6-46 给出了后掠角对剖面升力系数 $C_l'(z)$ 沿展向分布的影响例子。图中的 $C_l' = \frac{dC_y}{d\alpha}$ 。后掠机翼的 C_l' 比平直矩形翼的 C_l' 为小,这是后掠机翼气动力取决于法向分速造成的。后掠机翼的后掠角 λ 及展弦比 λ 对 C_l' 的影响,见图 6-47。

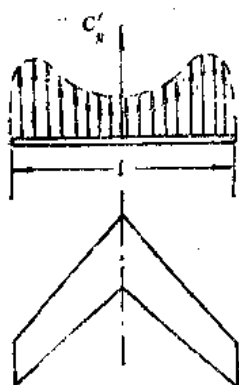


图 6-45

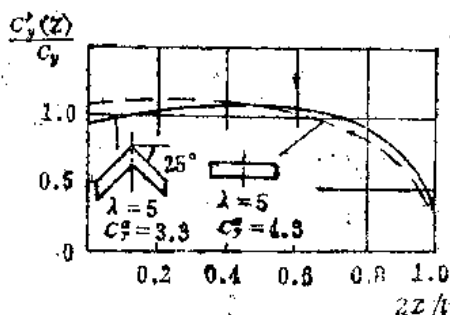


图 6-46

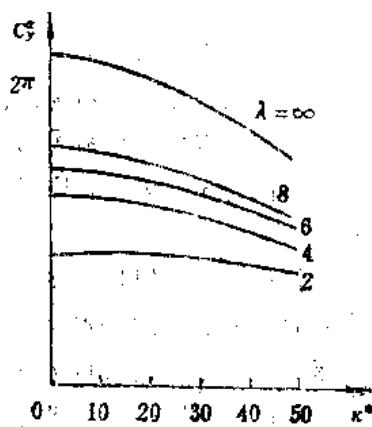


图 6-47

3. 后掠翼的失速特性

后掠翼与根梢比较大的梯形直机翼相似,分离在翼尖部分发生,然后再往翼根方向扩展。后掠翼翼面上的气流分离在翼尖附近先发生,这是因为“翼根效应”使翼根部分的压强比机翼中部压强高,而“翼尖效应”却使翼尖部分的压强比机翼中部的压强低,于是从翼根到翼尖,沿展向存在着压强差。另外,因后掠机翼展向的各个剖面在来流方向上是前后错开的,所以也使翼面上产生展向的压强差。这一点可以从图 6-48 看出,AA 截面上 C 点的弦向压强比 BB 截面上 C' 点的弦向压强高(负压小)。这两种压强差使翼面上附面层内的气流发生展向流动,从翼根向翼尖流动,从而使翼尖部分的附面层变厚。随着 α 增大,展向流动就增强,促使翼尖的附面层分离,产生旋涡,最后导致翼尖失速。显见,后掠角越大,分离现象就越容易发生。

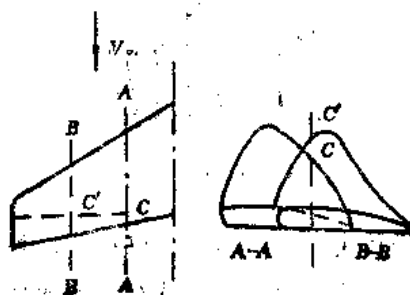


图 6-48

后掠翼的翼尖部分失速后,虽然翼尖部分的 C_l 急剧下降,但由于机翼中间部分尚未失速,因此整个机翼的 C_l 仍随 α 的增大而增大,不过增长速度比较缓慢,并失去线性关系,见图 6-49。翼尖区域失速后,由于两翼分离涡的不对称性和对尾面影响,使飞机产生抖动现象,因此翼尖区域开始失速的迎角称为抖动迎角 $\alpha_{抖}$,其相应的升力系数称为抖动升力系数 $C_{l抖}$ 。 $\alpha_{抖}$ 是后掠翼的一个重要参数。当 $\alpha > \alpha_{抖}$ 后,阻力系数就要急剧增长,同时由于翼尖失速使翼尖部分的升力减小,从而产生抬头力矩,这将给飞机的纵向平衡带来

影响,见图6-50。此外副翼往往置于机翼外侧后缘,因此翼尖的分离,还将影响副翼在大迎角飞行时的效能。为了保证飞机的安全,所采用的升力系数不应超过 $C_{L_{\text{抖}}}$ 。

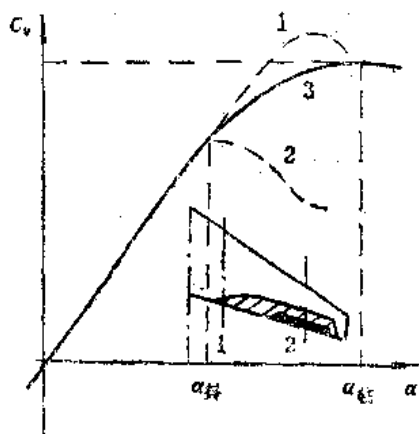


图 6-49

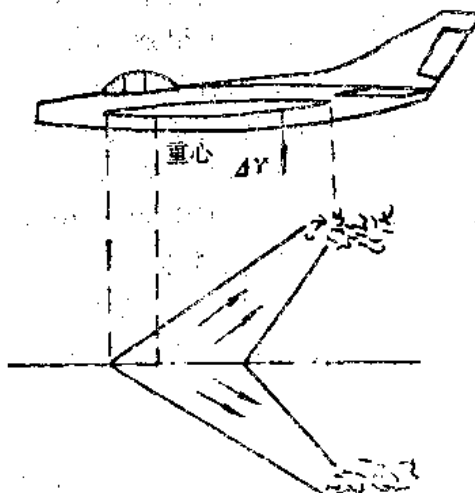


图 6-50

为了防止或延缓后掠翼的翼尖失速,可采用下列措施:

- (1) 在机翼设计中,适当减小根梢比,降低翼尖附近剖面的升力系数;
- (2) 采用几何扭转,减小翼尖区域的迎角,以避免过早地达到失速状态;
- (3) 在翼尖区域采用失速迎角较大的翼型;
- (4) 在后掠翼的表面上安装翼刀,这样可以防止附面层内气流的展向流动,以延缓翼尖失速的发生。

后掠翼的许多优点在高速飞行中才能表现出来,这里仅介绍它的低速飞行时的缺陷。

二、小展弦比机翼的低速特性

展弦比 $\lambda < 3$ 的机翼一般称为小展弦比机翼。在超音速飞行时,小展弦比机翼具有较小的阻力,因此超音速飞机、导弹,广泛采用小展弦比机翼。

小展弦比机翼低速绕流图画的一个特点是,下翼面压强较高的气流通过翼尖翻向上翼面形成的侧缘涡特别明显。图 6-51 给出了在水洞中观察到的翼尖绕流图画,当翼展较小时,翼尖的侧缘涡的影响范围相对于大展弦比侧缘涡的影响范围为大。所以说小展弦比侧缘涡引起的横向流动,将造成明显的均压作用。由图 6-52 可看出,小展弦比机翼在迎角不大时,



图 6-51



图 6-52

除了后缘的自由涡面外,在两翼尖侧缘都形成侧缘涡面,将对机翼的上下翼面压力差产生一定影响。

图 6-53 给出了不同展弦比梯形平板机翼的低速试验结果, 表明在一定迎角下, C_l 随展弦比 λ 减小而减小。这是由于侧缘涡造成的均压作用较强而引起的; $C_l-\alpha$ 曲线呈“S”形, 这也是侧缘涡引起的非线性升力所致; 又因为侧缘不断给附面层输入能量, 使附面层不易分离, 因而 $C_{l_{max}}$ 和 $\alpha_{临}$ 都相应增大。

对于具有大后掠角、尖前缘、小展弦比的三角翼, 在很小的迎角 ($\alpha=3^\circ$) 时就会产生前缘气流分离, 下翼面压强较高的气流从前缘翻向上翼面, 在上翼面前缘形成两个旋涡面, 称为前缘涡。这时涡的旋转方向相反, 其强度从机翼顶点到机翼后缘逐渐增大, 然后从后缘伸向下游。当 α 增大时, 上下翼面的压强差增大, 这对涡的强度也随之增大, 涡心之间的展向距离减小。图 6-54 给出了尖前缘三角翼在翼面上的流动图画, 在上翼面除了在前缘卷起一对方向相反的稳定涡面外, 还有很强的展向流动, 展向流动将引起翼面上气流的再次分离, 形成另外一对小旋涡, 其方向与上述主涡方向相反。从实验可观察到上述主涡从后缘伸

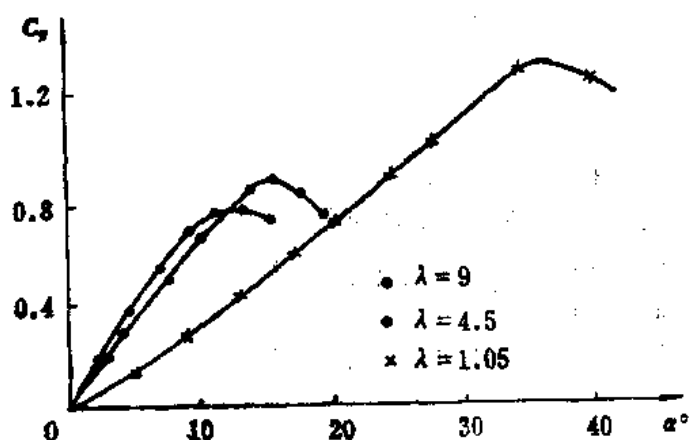


图 6-53

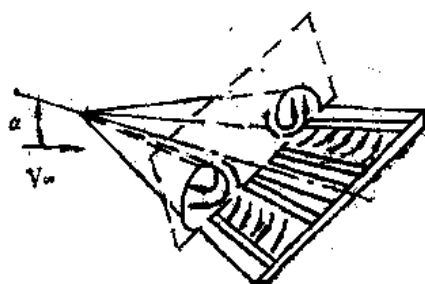


图 6-54

向下游一定距离后, 主涡将发生破裂变成不规则的流动。图 6-55 给出了一个小展弦比尖前缘平板三角翼从实验得到的升力曲线, 从图上可明显看出 $C_l-\alpha$ 曲线是非线性的, C_l 随着 α 的增大而增大, 直到翼面上主涡破裂为止, 然后升力下降发生失速。

当前缘后掠角增大或展弦比减少时, 旋涡升力将占升力中主要部分。图 6-56 给出了不

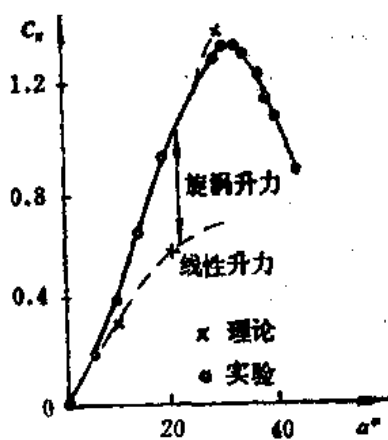


图 6-55

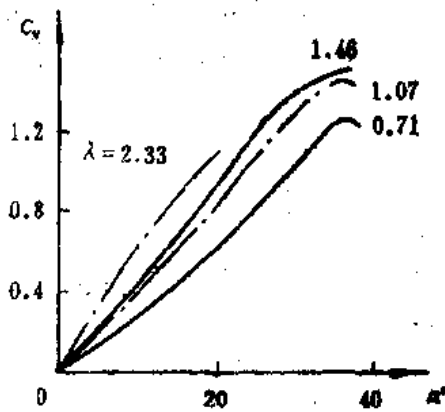


图 6-56

同展弦比尖前缘三角翼升力系数的实验结果,从图上可见, C_y 随着 λ 着的减小而下降,这是因为展弦比越小上下翼面气流沟通越厉害,使得上下翼面的压差减小,所以升力下降。此外,从图上也可看到小展弦比机翼的失速迎角较大。

§ 6-6 机翼的增升装置

飞机在起飞或者在着陆过程中,为了缩短飞机在地面上的滑跑距离,必须减小离地或接地速度。这时机翼所产生的升力应该接近于全机的重量,即

$$G \approx Y = \frac{1}{2} C_y \rho V^2 S$$

或

$$V = \sqrt{\frac{2G}{\rho S C_y}}$$

也就是说,必须增加机翼面积 S 和升力系数 C_y 。增加机翼面积 S ,阻力也随之增大,这对高速飞机非常不利。通常飞机在起飞、着陆时机翼的迎角接近于 $C_{y_{\max}}$ 所对应的迎角,为了进一步提高 $C_{y_{\max}}$ 以减小离地或接地速度,必须采用增升装置。

随着飞机的发展,增升装置已有很多种,现仅介绍几种主要的形式,并说明其工作原理。

简单襟翼是飞机的一种主要增升装置,如图 6-57 所示,简单襟翼放下时,相当于改变了机翼剖面形状,增加了翼型的弯度。于是,当气流流过上翼面时,流速加快,压强降低;而流过上翼面时,流速减慢,压强提高。因此提高了升力。但是襟翼放下后,上翼面后缘附近涡流区扩大,机翼前后压强差也随之加大,故阻力加大。

为了减小涡流阻力,人们在长期的生产实践中逐渐发展了一种双缝襟翼,如图 6-58 所示。由于缝隙作用,下翼面的受压气流从缝隙流向上翼面,吹除了上翼面的涡流,使襟翼可有较大的偏度,获得较高的 $C_{y_{\max}}$ 。例如波音 707 飞机上就是装置的这种襟翼。



图 6-57

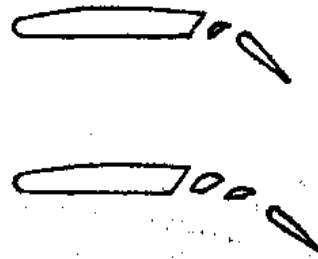


图 6-58

为了避免机翼在大迎角时附面层从前缘过早分离,机翼前缘装置一种前缘缝翼,如图 6-59 所示。在小迎角时,前缘缝翼与主翼贴合在一起组成一个完整的翼型。大迎角时由于前缘的吸力使前缘缝翼打开形成缝隙。气流通过缝隙,流入上翼面的附面层,增加了附面层里的动能,从而推迟了气流的分离,提高了临界迎角,获得较大的 $C_{y_{\max}}$ 值。

近几年来,有些飞机采用了带缝隙的前缘襟翼,如图 6-60 所示。它的工作原理与前缘缝翼类似,只是比前缘缝翼更增加了机翼面积,因而增升效果较高。

以上介绍的几种增升装置,都不是孤立使用的。为了获得最大增升效果的同时又弥补个

别增升装置带来的缺点，大都是配合使用的。例如波音 707-320B 飞机上就是装置了带缝的前缘襟翼和双缝襟翼。

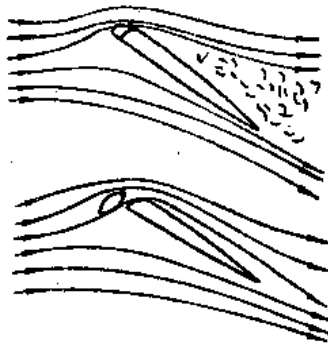


图 6-59

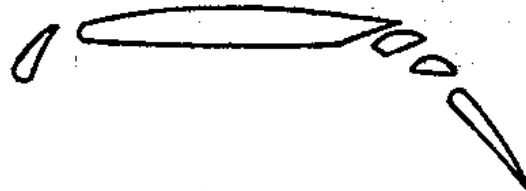


图 6-60

图 6-61 表示放襟翼和未放襟翼时机翼的三个典型性能。可以看出，当使用襟翼时 $C_{y\max}$ 和 $C_{x\min}$ 都增加很多。零升迎角降低了，临界迎角略有减小。但 m_x 值向负的方向增加很多。阻力增加对起飞不利，但可减小襟翼偏角以适应起飞要求，但对着陆来说，阻力增加是有利的。至于大的低头力矩则可配置前缘襟翼或前缘缝翼来缓和。

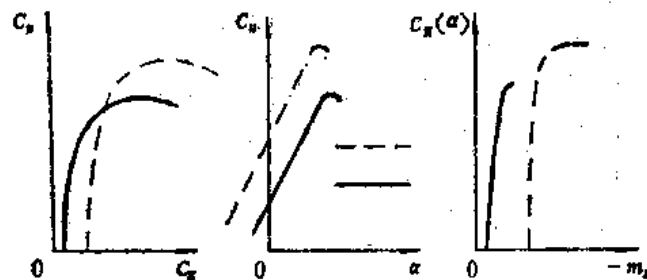


图 6-61

§ 6-7 空气动力实验与相似准则

在飞机设计初始阶段，设计工作者为了能估计出所设计的方案的未来性能，往往需要知道设计方案的气动力数据（如飞机的升力特性，阻力特性，力矩特性）。这些数据通常是通过模型在风洞里的吹风实验而获得的。但是，风洞实验的结果是否符合于飞行实际情况呢？能不能把实验所测得的数据换算到真实飞机上去呢？根据理论研究，在两流场满足了几何相似、运动相似、动力相似的条件，模型与实物的气动力系数（如 C_L 、 C_D ）就相等。

几何相似就是模型飞机和真实飞机的形状相似。即各相应部分的长度，具有相同比例，各相应部位的角度相等。

运动相似就是飞机模型和真实飞机的流场情况相似，即各相应点的气流速度大小成同一比例，且方向相同，这就要求模型和真飞机在气流里的相对位置相同（如 α 角相等）。

动力相似就是要求作用于飞机模型上的空气动力（升力和阻力）、力矩和作用于真飞机

上的空气动力（升力和阻力）、力矩大小成比例而方向相同。

在上述相似条件满足情况下，从模型飞机实验所求得的气动力系数，可直接应用到真实飞机上去。

下面介绍几个相似准则，用以判断以上要求的相似情况是否满足。

1. 几何相似准则

几何相似的准则，则可直接根据物体和模型的形状进行判别，即要求物体和模型的外形满足几何相似的条件。

2. 运动相似准则

对于只有直线运动而没有转动的物体来说（如机翼定直飞行），只要保持模型相对气流运动的角度（例如迎角和侧滑角）和真实物体在空中运动情况相同，这就满足了运动相似的要求。

3. 动力相似准则

动力相似是指作用在物体上的诸外力与惯性力之间大小的比例与模型上作用的诸外力与惯性力之间大小的比例相等，物体和模型上作用的外力方向相同。即

$$\frac{dP_1}{dP} = \frac{dF_1}{dF} = \frac{dR_1}{dR}$$

其中 dP 和 dP_1 为法向力， dF 和 dF_1 为切向摩擦力（粘性力）， dR 和 dR_1 为惯性力。如图 6-62 所示。

（1）粘性力相似准则 如果动力相似，必须粘性力亦相似，即惯性力与粘性力必须成比例，即

$$\frac{dR_1}{dR} = \frac{dF_1}{dF}$$

如果用特征尺度表示各个力，可得

$$\frac{dR_1}{dR} = \frac{\rho_1 d l_1^3 a_1}{\rho d l^3 a} = \frac{\rho_1 d l_1^3 \frac{dV_1}{dt} d l_1}{\rho d l^3 \frac{dV}{dt} d l}$$

$$= \frac{\rho_1 d l_1^3 V_1 dV_1}{\rho d l^3 V dV} = K_\rho \cdot K_l^3 \cdot K_V^2$$

$$\frac{dF_1}{dF} = \frac{\mu_1 \frac{dV_1}{dn_1} d l_1^2}{\mu \frac{dV}{dn} d l^2} = \frac{\mu_1 \frac{dV_1}{dn_1} d l_1^2}{\mu \frac{dV}{dn} d l^2} = K_\mu K_l K_V$$

式中 K_l 、 K_ρ 、 K_μ 、 K_V 为相应 l 、 ρ 、 μ 、 V 的比例系数。

因此，粘性力相似即为

$$K_\rho K_l^3 K_V^2 = K_\mu K_l K_V$$

即

$$\frac{K_\rho K_l K_V}{K_\mu} = 1$$

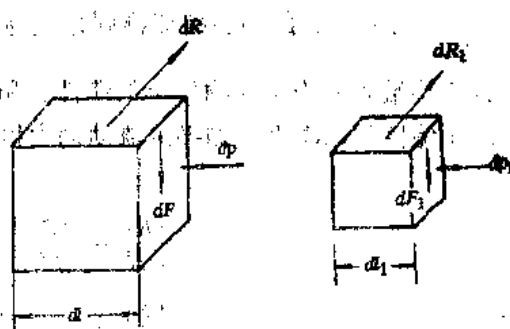


图 6-62

$$\frac{\frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{V_1}{V} \cdot \frac{l_1}{l}}{\frac{\mu_1}{\mu}} = 1$$

$$\frac{\rho_1 V_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho V l}{\mu}$$

$$Re = Re_1$$

$\frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu}$ 为 Re 。因此粘性相似准则是绕物体流动的 Re 数与绕模型流动的 Re 数相等。

换句话说雷诺数表示作用在物体上的惯性力和粘性力之比。

(2) 压缩性相似准则 如果两流动动力相似, 必须压力相似, 即惯性力与压力必须成比例

$$\frac{dR_1}{dR} = \frac{dp_1}{dp}$$

由前知

$$\frac{dR_1}{dR} = K_p K_l^2 K_\nu^2$$

而

$$\frac{dp_1}{dp} = \frac{p_1}{p} \frac{dl_1^2}{dl^2} = \frac{p_1}{p} K_l^2$$

所以

$$K_p K_l^2 K_\nu^2 = \frac{p_1}{p} K_l^2$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} \frac{V_1^2}{V^2} = \frac{p_1}{p}$$

等式两边同乘以系数 k , $k = \frac{c_p}{c_v}$, c_p 为定压比热, c_v 为定容比热, 则得

$$\frac{V_1^2}{k \frac{p_1}{\rho_1}} = \frac{V^2}{k \frac{p}{\rho}}$$

由物理学中知道音速 $a^2 = k \frac{p}{\rho}$ 代入, 所以

$$\frac{V_1^2}{a_1^2} = \frac{V^2}{a^2}$$

即

$$M_1 = M$$

因此压缩性相似的准则是绕物体流动的 M 数与绕模型流动的 M 数相同。

总结上述讨论我们可以得出结论: 为了保证绕物体和绕模型的流动相似, 以使得物体与模型上作用的气动力系数相等, 条件是: 几何相似, 迎角和侧滑角相等 (保证运动相似), 再加上 M 数与 Re 数相等 (保证动力相似)。

低速飞行时, $V \ll a$, 因此 V/a 是个小量, 这时可以近似认为只要保持流动的 Re 数相等 (当然几何相似, 迎角和侧滑角相等仍需要), 则就满足了两种流动相似的要求。

练 习 题

6.1 已知某翼型编号 NACA2412, 问该翼型相对厚度 $\bar{c}$ 、最大厚度相对位置 x_c 、相对弯度 f 、最大弯度相对位置 x_f 各等于多少?

6.2 试说明迎角 α 和侧滑角 β 的定义。

6.3 试分析 Re 数的增加, 对低速翼型 $C_{y_{max}}, C_{x0}, \frac{dC_y}{d\alpha}$ 等参数的影响, 并从物理概念上说明之。

6.4 作用在翼型上的 C_p , 在高空或低空速度发生变化时, C_p 是否改变? 为什么? 在低速范围内, 速度变化时, 翼型的压力中心是否改变? 焦点是否改变? 迎角发生变化时, 压力中心是否改变? 焦点是否改变? 为什么?

6.5 已知某翼型绕 $\bar{x}_A = 0.33$ 的力矩系数 m_{xA} 对 C_y 的变化率 0.10, 求焦点的位置。

6.6 一个薄对称翼型, 要它的 $C_y = 0.5$, 问迎角应多大? 此时升力作用点在哪里?

6.7 有一椭圆机翼飞机, 该机的 $\frac{G}{S} = 250$ 公斤/米², 机翼的面积 $S = 100$ 米², $\lambda = 8$, 飞机在 $H = 4000$ 米处以 340 公里/小时速度平飞, 问该机翼的诱导阻力为多少? 如机翼的 $\alpha_0 = -2.5^\circ$, 问此机翼飞行迎角 α 为若干? (机翼的翼剖面为薄翼)

6.8 已知无扭椭圆机翼的有效迎角为 $\alpha_{\text{有效}}$ (以零升线为基准量度的迎角), 升力系数为 C_y , 展弦比为 λ , 椭圆机翼对应的翼剖面的升力系数斜率为 a_0 , 试证下列等式成立

$$\alpha_{\text{有效}} = \frac{C_y}{a_0} + \frac{C_y}{\pi\lambda}$$

6.9 已知某无扭椭圆机翼 $\lambda_1 = 3$ 的 $C_y - \alpha$ 曲线 (线性段), 如图 6-63 所示, 用作图法求出 $\lambda_2 = \infty$, $\lambda_3 = 6$, 并由上述机翼同一翼型组成的无扭椭圆机翼 $C_y - \alpha$ 的曲线。

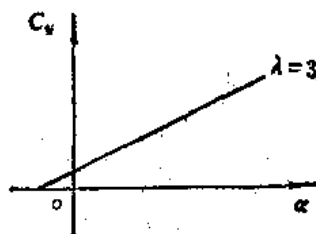


图 6-63

6.10 下列附表中给出某飞机和与其大小不同的一些模型在不同条件下进行实验的数据, 问哪几种情况与飞机飞行情况 (A 情况) 是动力相似?

情况 物理量	A	B	C	D	E	F
翼展 l (米)	15	3	3	1.5	1.5	3
相对密度 $\frac{\rho}{\rho_{\text{海}}}$	0.538	2	3	1	10	10
速度 (米/秒)	100	100	100	100	100	100
粘性系数 $\mu \cdot 10^6 / 9.8 \left(\frac{\text{千克}}{\text{米} \cdot \text{秒}} \right)$	1.825	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82

6.11 飞机重 65 000 牛顿, 在海平面作水平等速飞行, 速度 37.7 米/秒, 试确定在变密度风洞中 (风速 30 米/秒, 温度 15°C , 22 个大气压) 进行实验时的模型尺寸 (即求实物与模型的尺寸之比) 及模型上的力。再比较模型上单位面积翼载荷是实际飞机的多少倍 (翼载荷指单位面积上的升力)?

6.12 试说明 Re 数、 M 数的物理意义?

第七章 高速机翼的空气动力特性

空气流过物体时, 由于流场中局部流速不一样, 所以压强也不一样。空气虽是一种可压缩介质, 但在流场中流速比音速小得多时, 由于流速变化而引起压强变化产生的密度变化是不大的, 即 $V \leq 0.3a$ 时, 可以把空气当作不可压缩流来处理。本章将研究空气的流速 $V > 0.3a$ 时, 考虑空气的压缩性影响后, 机翼的空气动力特性。

§ 7-1 翼型的空气动力特性

一、流过翼型气流速度范围的划分, 临界马赫数

当气流绕过翼型时, 由于上翼面突起而流管收缩, 局部流速加快而大于远前方的来流速度 (V_∞)。局部流速的加快必然引起局部温度降低, 因而音速 $a (=20\sqrt{T})$ 下降。当 V_∞ 增加时, 翼型上各点的流速也在改变。当翼型上最大速度 $V_{\max}$ 点增加到等于当地音速 a 时, 远前方来流速度 V_∞ 就叫做此翼型的临界速度 (或称下临界速度), 以 $V_{\text{临}}$ 来表示之。此时远前方的 $M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$ 叫做下临界马赫数 (a_∞ 为远前方气流的音速), 以 $M_{\text{临}}$ 表示。

当 $V_\infty < V_{\text{临}}$ 时, 整个翼型上每点的流速都小于相应点的音速, 因而整个翼型处于亚音速流动状态。

当 V_∞ 继续增加时, 如果翼型上的 $V_{\max}$ 点的流速等于该点的当地音速时, 则整个翼型上每点的速度均大于各对应点的当地音速, 此时翼型处于超音速流状态, 远前方来流速度 V_∞ 称为上临界速度, 以 $V_{\text{上临}}$ 表示, 远前方的 $M_\infty = V_\infty/a_\infty$ 称做上临界马赫数, 以 $M_{\text{上临}}$ 表之。

当 M_∞ 大于 $M_{\text{临}}$ 而小于 $M_{\text{上临}}$ 时, 翼型上有部分超音速流动区, 部分亚音速流动区, 此时翼型是处于跨音速流动状态。这一速度范围不仅包含 $M_\infty > M_{\text{临}}$ 的情况, 而且还包括 $M_\infty > 1$, 头部存在脱体激波的情况。因为存在脱体激波时, 翼型前缘附近仍为亚音速流。

显然, 翼型的 $M_{\text{临}}$ 和 $M_{\text{上临}}$ 的大小和翼型的相对厚度 $\bar{c}$, 翼型的相对弯度 $\bar{f}$ 及迎角 α 有关。

二、翼型的亚音速空气动力特性

翼型的低速空气动力特性是建立在气流为不可压缩这一假设之上的, 这在低速飞行时是与实际相符的。随着飞行 M 数的增大, 空气压缩性影响愈来愈显著, 必须在翼型的低速空气动力特性的基础上, 进行压缩性修正, 从而得到翼型的亚音速空气动力特性。

1. 空气压缩性对压力系数的影响

根据理论计算可知

$$C_p = \frac{C_{p\text{不}}}{\beta} = \frac{C_{p\text{不}}}{\sqrt{1-M^2}} \quad (7-1)$$

式中 $C_{p,不}$ 为不可压流的压强系数,

M_∞ 为前方来流马赫数。

C_p 为可压缩流的压强系数。

压强系数的绝对值随 M 增大的原因, 可从一维流管截面受压缩影响来说明。

对于不可压流, $\rho = \text{常数}$, 微分形式的连续方程有

$$\begin{aligned}\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} &= 0 \\ \left(\frac{dA}{A}\right)_{不} &= -\left(\frac{dV}{V}\right)\end{aligned}\quad (7-2)$$

可压缩流, 微分形式的连续方程有

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

将微分形式的动量方程式(2-45)代入上式, 得

$$\left(\frac{dA}{A}\right) = -(1-M^2)\left(\frac{dV}{V}\right)\quad (7-3)$$

比较式(7-2)和式(7-3), 可见亚音速流管截面的相对变化(dA/A), 不论在收缩或扩张时总是比不可压者要小。从流线谱上看, 在翼型的上表面(负压区)相

对远前方流动状态来说, 速度增加, 压强下降, 密度也下降。要使 ρVA 保持同一常数, 对可压流来说, 因密度的下降, A 的减小就比不可压流少一些, 也就是流管收缩处, 可压流的流管比不可压流的要少收缩些, 如图 7-1 所示。反之,

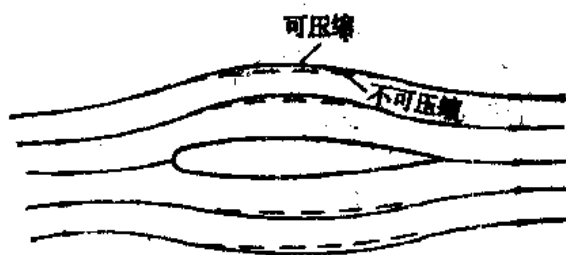


图 7-1

在流管扩张处, 可压流的流管比不可压流的要少扩张一些。

亚音速流中密度变化和流管变化会影响到翼型上的压强分布。上翼面为负压区, 由于流速增加, 密度减少, 由可压流的能量方程

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{常数}$$

不难看出, 压强比不可压时更低。在正压区, 由于密度增大, 而压强变得更高。这就使得翼型表面的压强系数 C_p 的绝对值相对不可压时增大, 如图 7-2 实线所示。

2. 压缩性对升力特性影响

将

$$C_p = \frac{C_{p,不}}{\sqrt{1-M^2}}$$

代入

$$C_y = \int_0^1 (C_{p,下} - C_{p,上}) dx$$

可得

$$C_y = \frac{C_{y,不}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\quad (7-4)$$

式中 $C_{y,不}$ 是指不可压流翼型的升力系数, M_∞ 为前方来流马赫数, C_y 是可压缩流翼型的升力

系数。根据式(7-4)不难得出

$$C_p^a = \frac{C_p^{a, \text{不}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \quad (7-5)$$

可见压缩性影响, 将使翼型的 C_p^a 增大。

如图 7-3 所示, 普通翼型的 $C_{y_{\max}}$ 随 M_∞ 增大而下降。这是因为当 $\alpha > 0$ 时, 由于空气压缩性影响, 使上翼面最低压力点附近的负压增大得多, 而后缘部分负压增大得少, 这样增大了上翼面的逆压梯度, 易产生气流分离, 所以 $\alpha_{\text{临}}$ 和 $C_{y_{\max}}$ 下降。

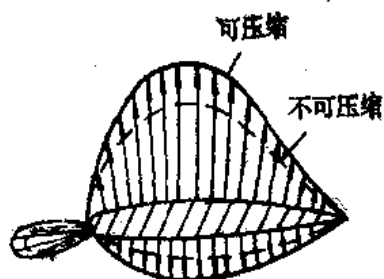


图 7-2

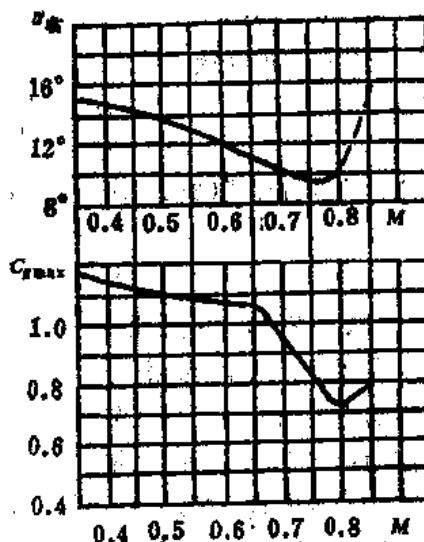


图 7-3

3. 压缩性对阻力特性影响

空气压缩性对阻力特性影响, 一方面表现在使摩擦系数减小(见第五章), 另一方面会使压差阻力系数略有增大。因此对翼型的阻力系数来说, 基本上不随 M 数变化。

4. 压缩性对力矩特性影响

按照理论计算, 压缩性影响是使整个翼型表面的压强系数 C_p 都放大了 $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ 倍, 并不改变机翼表面压强分布的形状, 故翼型的压力中心位置不变, 但 m_x 却增大了 $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ 倍。即

$$m_x = \frac{m_x^{\text{不}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \quad (7-6)$$

更精确的理论表明, 压缩性使翼面上各点 C_p 的放大倍数, 并不等于 $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ 的值, 而是和各点 $C_p^{\text{不}}$ 大小有关, 可表示为

$$C_p = \frac{C_p^{\text{不}}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-M_\infty^2})C_p^{\text{不}}} \quad (7-7)$$

该式称为卡门-钱学森公式, 它的结果和实验很吻合, 由式(7-7)可见, 在上翼面前段, 因

$|C_{p\text{不}}|$ 较大, 则 $C_{p\text{不}}$ 放大的倍数较大, 而在上翼面的后段, 则 C_p 放大倍数较小。这样随着 M 数增大, 压力中心就会逐渐向前移动。

三、翼型的跨音速空气动力特性

飞行速度超过临界 M 数后, 空气压缩性影响结果, 使翼型表面出现局部激波, 导致空气动力特性发生急剧变化。首先来讨论翼型的局部激波形成和发展。

1. 局部激波的形成

飞行 M 数超过临界 M 数以后, 在翼型表面上方的等音速点(线)后面, 由于翼型表面的连续外凸, 流管扩张, 空气膨胀加速, 出现超音速区。在超音速区内, 压强不断降低, 比来流压强 p_∞ 低得多, 但翼型后边的压强却接近于 p_∞ 。这种压强差必然从翼型表面的后部以压力波形式逆气流向前传播。当压力波传到某一位置如图 7-4 中的 S 面时。压强增量虽未减小到趋近于零, 压力波传播速度却已降低到与该处的局部超音速气流速度相等, 于是压力波就稳定在这个位置上。在 S 面处, 压强增量具有一定数量, 前后气流参数具有一定数量的突然变化, 所以, S 面成为局部超音速气流参数突然变化的分界面, 形成局部激波。

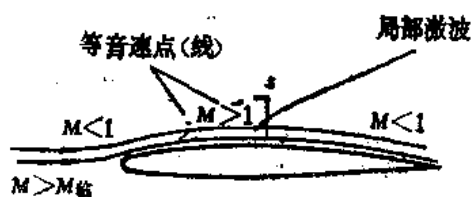


图 7-4

2. 局部激波的发展

设翼型以正迎角在空气中运动, 它的上表面的流速比下表面快些, 所以首先达到和超过局部音速, 从而出现局部超音速区和局部激波。随着 M_∞ 的不断增大, 翼型下表面的局部流速也会超过局部音速, 而出现局部超音速区和局部激波。当 M_∞ 超过 1 以后, 翼型的前缘还会出现头部激波, 此时翼型上、下表面的局部激波将移到后缘, 形成尾部激波。

为了便于了解机翼局部激波发展的一般规律, 现取一个接近对称的薄翼型, 保持 2° 迎角进行实验, 观察在 M_∞ 由小变大的过程中, 翼型局部激波的发展趋势(图 7-5 是根据实验结果整理出来的)。

(1) 当 $M_\infty < M_{\text{临}}$ 时, 翼型上下表面的气流为亚音速, 而到 $M_\infty = M_{\text{临}}$ 时, 翼型上表面最低压强点的流速等于当地局部音速。如图 7-5(A) 所示。

(2) 当 $M_\infty > M_{\text{临}}$ 以后, 在翼型上表面等音速点的后面, 流管变粗, 空气膨胀加速, 因而出现在局部超音速区。在此超音速区内, 压强不断降低, 但翼型后边的压强接近 p_∞ 。大家知道, 超音速气流要提高压强, 必然出现压强突增的分界面, 这就是局部激波, 气流通过激波变为亚音速气流。如图 7-5(B) 所示。

(3) 当 $M_\infty = 0.81$ 时, 等音速点前移, 同时激波后移。于是局部超音速区扩大。于此同时下表面最低强力点的局部流速也接近音速。如图 7-5(C) 所示。

(4) 在 $M_\infty = 0.81$ 以后, 下翼面也出现了局部超音速区和局部激波。当 $M_\infty = 0.85 - 0.89$, 则上下翼面激波强度增大, 位置后移, 局部超音速区扩大得更快一些。当 $M_\infty = 0.89$ 时, 下表面的局部激波已移到后缘, 而上表面局部激波仍继续后移, 局部超音速区继续扩大。当 M 接近 1 时, 则上翼面局部激波也移至后缘。这时上下翼面几乎全部为超音速气流。

了。如图 7-5(D), (E), (F)所示。

(5) $M_\infty \approx 1.40$ 时, 翼型上下表面的局部激波均处于后缘, 超音速气流的速度更大, 局部激波后倾, 前缘出现了脱体激波, 如图 7-5(G)所示。

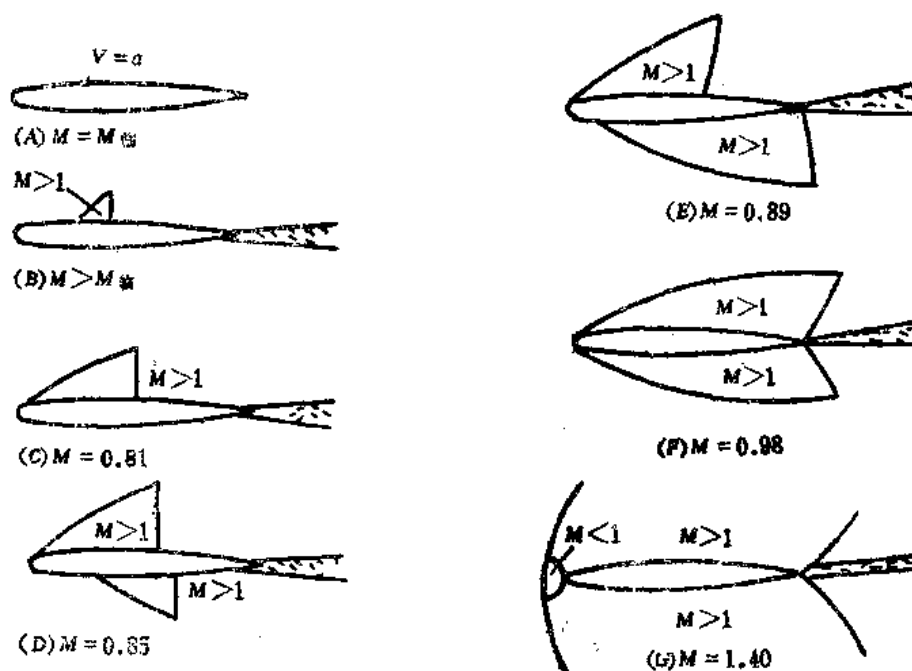


图 7-5

3. 翼型的跨音速气动特性

(1) 升力系数特性 以上述实验结果为例, 来说明升力系数随 M_∞ 变化的一般趋势, 如图 7-6 所示。图中曲线表明, 在飞行 M 数逐渐增大的过程中, 在亚音速阶段, 升力系数先是基本不变, 随后有些提高。在跨音速阶段, 升力系数变化剧烈, 有时升高, 有时降低。在超音速阶段, 升力系数则不断下降。

在 A 点以前, 翼型表面全部是亚音速流动, C_L 按亚音速规律变化, 即 M 数增大, C_L 增大。

在跨音速阶段, 随着 M 数增大, 升力系数先增大, 随后减小, 接着又增大。其所以如此变化, 根本原因在于机翼上、下表面出现了局部超音速区和局部激波, 另外机翼上、下表面局部超音速气流出现的先后和扩张的快慢不一样, 所以上、下表面压强降低参差不齐, 这就造成了跨音速阶段升力系数的剧烈变化。

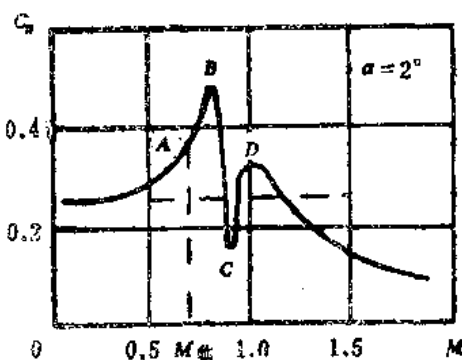


图 7-6

(i) 当飞行 $M_\infty > M_{crit}$ 以后, 由于上翼面出现了超音速区, 致使吸力增加, 虽然局部超音速区激波后的压强提高一些, 但由于波前吸力的增加大于波后吸力的损失, 所以 C_L 随 M 数的增加而增加, 直到 B 点, 即图 7-6 中的 AB 段。

(ii)当 $M_\infty > M_B$ 以后, 上翼面的局部激波强度变强, 波后吸力损失加大。与此同时, 下翼面也出现超音速区, 并扩张得比上翼面迅速, 产生向下的附加吸力。这样机翼上下翼面的压强差减小, 导致升力系数下降, 即图 7-6 中的 BC 段。

(iii)当 $M_\infty > M_C$ 以后, 下翼面局部激波移至后缘, 而上翼面局部激波则继续缓慢后移, 超音速区继续扩大, 因而上翼面吸力继续加大, 于是上下翼面的压强差不断提高, 升力系数重新增大, 如图 7-6 CD 段所示。

由图 7-6 还可以看出, 在跨音速飞行阶段, 压力中心忽前忽后的变化, 使飞机的平衡稳定和操纵很容易出问题。

(2)阻力系数特性 飞行 M 数超过 $M_{\text{临}}$ 以后, 机翼的阻力急剧增大。其原因是因为在机翼上、下表面出现了局部超音速区和局部激波, 而在飞行速度超过音速以后, 机翼前缘又产生了头部激波。机翼上由于出现激波而额外产生的阻力, 叫做波阻。与波阻对应的阻力系数叫做波阻系数

(i)波阻的产生: 我们通过气流以超过临界 M 数的速度流过一个迎角为零的对称翼型的情况来说明波阻的产生。此时翼型上的压强分布如图 7-7 所示。上翼面上表示了翼型附近局部超音速区以及激波, 下翼面上表示了压强分布。在前驻点处压强最大, 然后随着流速增大, 压强降低。在 A 处速度达到音速值。激波在 B 处出现, 该处压强突增, 速度突降至亚音速。压强分布如图 DKBGH 折线所示。如果是理想情况, 没有激波, 即没有动能损失, 进行连续减速, 压强分布如图 DKG'H' 曲线所示。从图可见激波出现, 翼型后半部的压强比无激波时低, 因而产生了附加的压差阻力。

上面说的是波阻的一部分。如果局部激波与附面层之间的干扰引起了附面层分离, 又会使气流的能量受到损失, 它也使得机翼前后压强差增大, 形成附加阻力, 通常所谓波阻是指激波本身和激波分离而引起的压差阻力之和。

超音速气流流过机翼表面时, 附面层气流按其速度大小可分为两层, 最贴近机翼表面的亚音速低层和稍靠外的超音速外层。在这两层分界线上, 空气以音速流动 (图 7-8)。

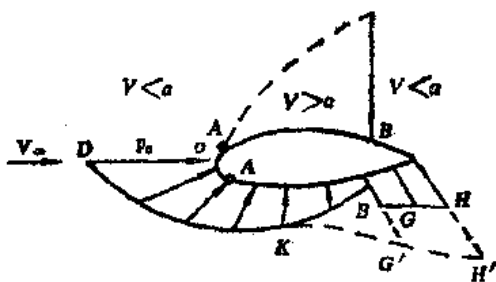


图 7-7

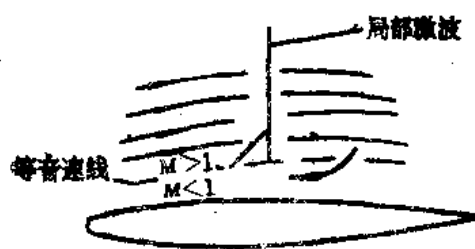


图 7-8

因为在亚音速气流中不会有激波存在, 所以局部激波只能达到附面层的超音速外层。当激波前后压强差很大时, 激波后的压强增高使得附面层底层的气流倒流, 而形成在激波处的气流分离。这就是激波与附面层之间干扰而引起的附面层分离。顺便提出, 这一分离现象不仅使得阻力系数急剧增加, 而且还使得升力系数 C_L 下降。这种现象称为激波失速。

可见在 $M > M_{\text{临}}$ 以后, 机翼的阻力除了型阻以外, 还要加上波阻, 即

$$X = X_{\text{型}} + X_{\text{波}} \quad (7-8)$$

对应的阻力

$$C_x = C_{x\text{型}} + C_{x\text{波}} \quad (7-9)$$

其中

$$C_{x\text{波}} = \frac{X_{\text{波}}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S}$$

$X_{\text{波}}$ 为波阻；

$C_{x\text{波}}$ 为波阻系数。

(ii) 阻力系数随气流 M 数的变化。

根据上述讨论的翼型，随飞行 M 数增加，它的阻力系数 C_x 的大致变化趋势如图 7-9 所示。在临界 M 数以前， C_x 基本不随 M 数变化；接近 $M_{\text{临}}$ 时， C_x 才稍有增加；超过 $M_{\text{临}}$ 以后， C_x 起初缓慢增大，随后急剧增大，有时将 C_x 随 M_{∞} 数的变化曲线上 $-\frac{dC_x}{dM_{\infty}} = 0.1$ 的点所对应的来流 M 数定义为阻力发散马赫数，以 M_D 记之； M 数大于 1 以后， C_x 逐渐下降。亚音速阶段，空气压缩性对阻力系数的影响，前文已作了分析。

超过临界 M 数以后，机翼上出现局部激波，由于波阻的出现，阻力系数随着飞行 M 数的增大而增大， M 数增至 1 附近，阻力系数达到最大。随后，虽然来流 M_{∞} 数继续增大，但由于翼型的压强分布基本不变，而来流动压却随 M_{∞} 数增大而增大，因此阻力系数逐渐下降。

(3) 压力中心随来流 M 数的变化 翼型在跨音速时的力矩特性可用其压力中心的位置随 M_{∞} 变化来表示。高速时大都采用对称薄翼，焦点和压力中心的位置是重合的。由薄翼理论可知，低速时，翼型的压力中心（焦点）的位置约在 $b/4$ 处；在超音速时，压力中心（焦点）位于 $b/2$ （见后）。进入跨音速阶段后，由于上翼面出现局部超音速区并向后发展，翼型后半部产生附加升力，压力中心向后移动。以后又由于下翼面也出现超音速区并以更快的速度扩展到整个下翼面，相当于翼型后半部增加一负升力，使压力中心又前移。最后又因为上翼面激波也移到后缘处，超音速区扩展到整个上翼面，压力中心又后移，如图 7-10 所示。

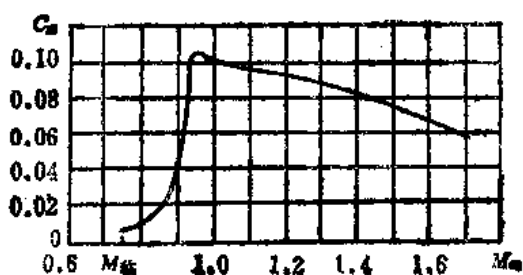


图 7-9

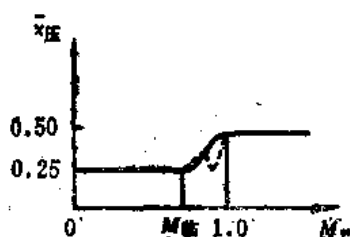


图 7-10

四、翼型的超音速气动力特性

对于翼型来说， $M > M_{\text{上临}}$ ，整个翼型周围全部是超音速气流。超音速飞机的翼型一般是对称薄翼，而且迎角很小。所以在计算时可以把它看作一个平板，然后对它进行厚度修正。为了说明超音速翼型的空气动力，下面以平板为例进行讨论。

1. 超音速气流流过平板时的流线谱与压强分布

如图 7-11 所示，当超音速气流以迎角 α 流过平板时，气流在前缘分为上、下两支。在

上表面, 气流向外转折, 气流膨胀加速, 经膨胀波后, 则以不变的速度沿平板表面流去。在下表面, 气流向内转折, 产生斜激波, 气流通过斜激波后, 则保持较小的速度, 沿平板表面流去。在平板后缘, 情况正好相反, 上表面产生斜激波使气流减速, 下表面则使气流膨胀增速。之后, 上下表面气流汇合并以原来的方向向后流去。

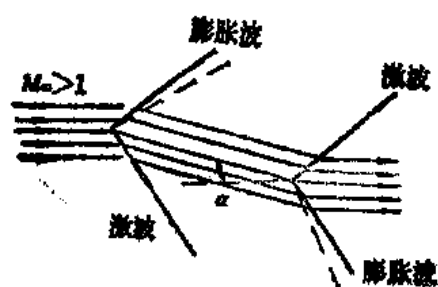


图 7-11

上表面的流速大于未受扰动的气流速度, 故其压强减小, 而下表面的流速小于未受扰动的气流速度, 故其压强增大。由于在平板上各点的流速值均保持不变, 故表面上之压强值沿平板也不变化 (图 7-12)。由此可见, 平板上的总气动力 R 作用于平板弦线的中点上。其方向则与平板垂直 (图 7-13)。平板上的压力中心在弦线的中央, 即

$$\begin{aligned} x_{\text{压}} &= 0.5b \\ z_{\text{压}} &= 0.5 \end{aligned} \quad (7-10)$$

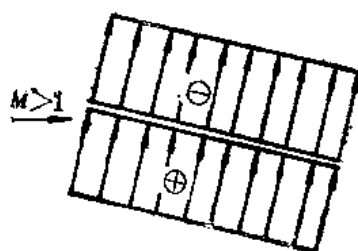


图 7-12

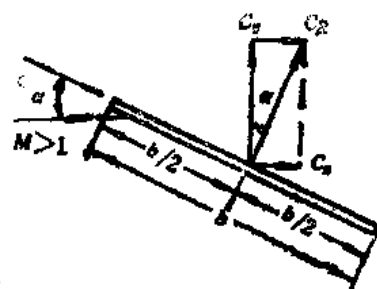


图 7-13

2. 平板翼型的空气动力特性

高速飞行时, α 很小, 我们可以把超音速气流流过平板情况当作小角转折来处理。即上表面的气流是小角向外转折, 而下表面的气流是小角向内转折。由式(3-22)可知,

$$p_{\text{上}} = p_{\infty} - \frac{2q_{\infty}\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

$$p_{\text{下}} = p_{\infty} + \frac{2q_{\infty}\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

所以

$$R = p_{\text{下}}S - p_{\text{上}}S = (p_{\text{下}} - p_{\text{上}})S$$

$$C_R = \frac{R}{q_{\infty}S} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (7-11)$$

如图 7-13 所示,

$$C_y = C_R \cos \alpha \approx C_R = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (7-12)$$

$$C_{x\text{波}} = C_R \sin \alpha \approx C_R \alpha = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (7-13)$$

式中 $C_{x\text{波}} = \frac{X_{\text{波}}}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 S}$ 为波阻系数。

3. 有厚度薄翼型的超音速空气动力特性

根据薄翼在小迎角情况下的理论计算，有厚度薄翼型的升力系数

$$C_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (7-14)$$

与平板计算的值是一致的。根据这个关系式，很显然如图 7-6 所示在 $M > M_{\text{上临}}$ 后，随着 M 数增加 C_y 值下降。

根据理论计算，有厚度的对称翼型的波阻力系数

$$C_{x\text{波}} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} + \frac{4K\delta^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (7-15)$$

式中 K 为形状修正系数，它表示各种超音速对称翼型的零升波阻系数与菱形翼型的零升波阻系数的比值，其数值可查表 7-1。

式中第一项与迎角有关（即与升力有关），称为升致波阻；第二项与厚度有关，即使在升力等于零时，这部分阻力依然存在，我们把这一部分阻力称为零升波阻，用 $C_{x0\text{波}}$ 表示，

$$C_{x0\text{波}} = \frac{4K}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \delta^2 \quad (7-16)$$

将式(7-16)及(7-14)代入(7-15)可得

$$C_{x\text{波}} = C_{x0\text{波}} + \frac{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}{4} C_y^2 \quad (7-17)$$

由式(7-17)可知， $M > 1$ 以后，随 M 数增大，波阻系数下降。

根据理论计算，有厚度薄翼型的压力中心

$$\bar{x}_{\text{压}} = 0.5 \quad (7-18)$$

翼型对前缘力矩系数（抬头为正）

$$m_x = -C_y \bar{x}_{\text{压}} \quad (7-19)$$

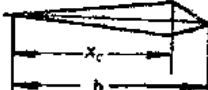
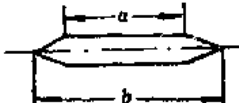
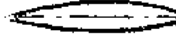
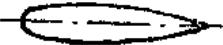
应用式(7-14)在超音速时，翼型的力矩系数为

$$m_x = -\frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (7-20)$$

五、高速翼型的特点

综合上述各点可知，当 $M_{\infty} > M_{\text{临}}$ 后，流过机翼的气流参数变化特点与亚音速时不大相

表 7-1

型 翼	简 图	K
四 角 形		$\frac{1}{4\bar{x}_c(1-\bar{x}_c)}$
六 角 形		$\frac{1}{1-\frac{a}{b}}$
菱 形		1
双 弧 形		4/3
亚音速翼型		2.5~4.0

同，它使得机翼的升力、阻力、力矩特性都发生了很大的变化。

为了适应这些变化，在高速飞机的翼型外形上也有相应特点。对于亚音速飞机，主要设法尽量提高翼型的 $M_{临}$ ，以延迟机翼气动力的急剧变化。对于长期在跨音速飞行的飞机，主要设法缓和 C_x 的增长幅度，减少 C_x 的波动幅度及缩短 $M_{临}$ 和 $M_{上临}$ 之间的范围。对于长期在超音速飞行的飞机，主要设法减少波阻。

提高翼型 $M_{临}$ 措施，是使翼型压强分布（或速度分布）均匀化，以推迟音速区的出现从而使翼型 $M_{临}$ 得到提高。为此可采用对称或小弯度、薄翼，最大厚度位置靠近翼弦的中部。为了减少翼型头部激波强度，高速翼型的头部不象低速翼型那样钝，以防止脱体激波和正激波的产生。这些措施的效果可以通过图 7-14、图 7-15、图 7-16 各组曲线来说明。

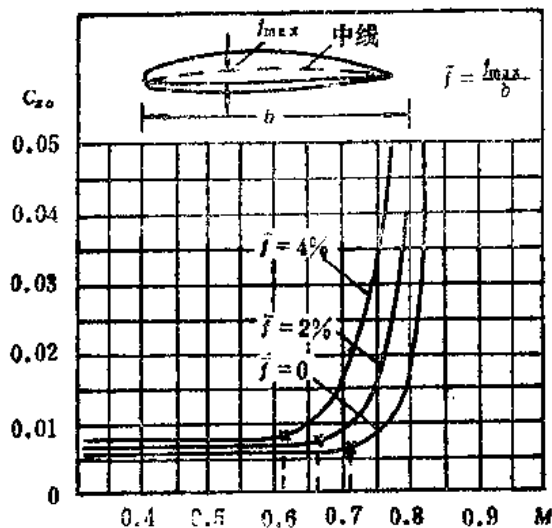


图 7-14

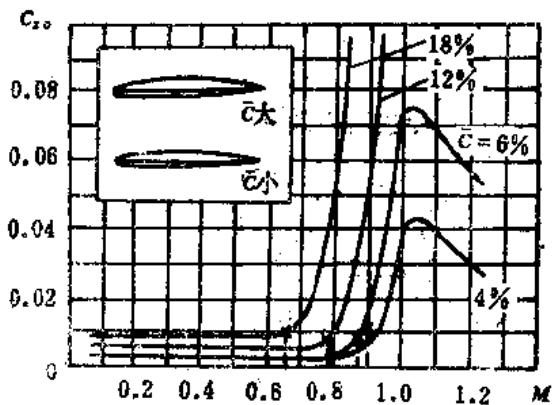


图 7-15

减少 c 是缩短 $M_{临}$ 至 $M_{上临}$ 的区间的有效办法。很明显 $c=0$ 时的平板， $M_{临}$ 和 $M_{上临}$ 的间隔趋于零，也就是没有跨音速范围。实际上 c 是不能等于零，所以当 c 较小时， $M_{临}$ 和 $M_{上临}$ 之间差距较小， $\frac{dC_x}{d\alpha}$ （或 C_y ）随 M 数的变化曲线没有多大变动，在跨音速范围内几乎是平滑地单调地由亚音速过渡到超音速，如图 7-17 所示。

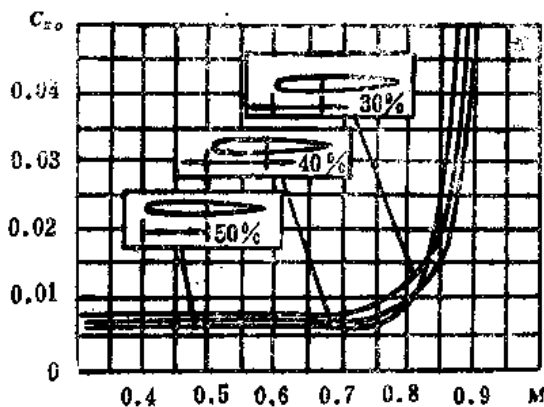


图 7-16

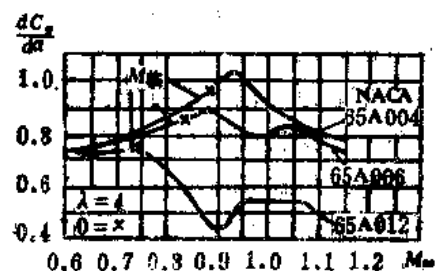


图 7-17

对于超音速翼型，一般均采用对称薄翼，可以减少波阻。

为了提高翼型的临界 M 数，以缓和延迟翼型气动力特性的剧烈变化，最近发展了一种超临界翼型。图7-18(a)、(b)分别表示在设计升力系数下，层流翼型和超临界翼型在来流 M_∞ 数超过临界马赫数后流动现象。从图7-18(a)可见，层流翼型结尾激波前的超音速气流是一直加速到激波处，因此激波强度较强而且位置也较靠前，激波后逆压梯度较大，导致附面层分离使阻力剧增。超临界翼型如图7-19所示，上翼面曲率较小，比较平坦，使来流 M_∞ 数超过临界 M 数后，大约从距前缘5%弦长处沿翼型上表面流动为一加速的均匀超音速，如图7-18(b)所示。这样，结尾激波前的超音速气流的马赫数较低，所以激波的伸展范围不大，强度亦较弱。激波后逆压梯度较小，附面层不易分离、以而缓和了阻力发散现象。为了补偿超临界翼型前段升力的不足、一般将后缘附近的下表面作成内凹形以增大翼型后段弯度，使后段能产生较大升力，如图7-19所示。

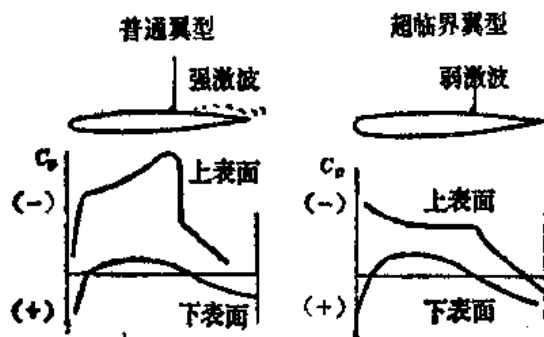


图 7-18

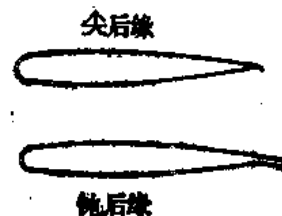


图 7-19

图7-20表示在设计升力系数为 $C_l = 0.6$ 时相对厚度为 11% 的超临界翼型和 NACA64-212 翼型的阻力系数随来流 M_∞ 数的变化的实验结果。从该图可见，超临界翼型在 $M_\infty = 0.7$ 时，阻力系数只有微小的增量，到 $M_\infty = 0.8$ 时，阻力系数才开始剧增，而层流翼型 NACA64-212 在 $M_\infty = 0.69$ 时，阻力系数就开始剧增，因此超临界翼型的阻力发散马赫数较 NACA64-212 翼型增大了差不多 0.11。相对厚度为 11% 的超临界翼型的厚度分布与 NACA64-212 翼型厚度分布之比较见图 7-21。从该图可看出，这两个翼型的容积是差不多的，而超临界翼型的阻力发散 M 数却增大大约 0.11。可见超临界翼型在提高阻力发散马赫数方面确是卓有成效的。

图 7-22 表示当激波诱导气流分离发生时的翼型升力系数随来流 M_∞ 数的变化情况。从该图可见，超临界翼型分离发生时的升力系数远较层流翼型为高，而且在来流 M_∞ 数较大时，超临界翼型的最大升力系数也较大。这将改善战斗机在跨音速时的机动性。

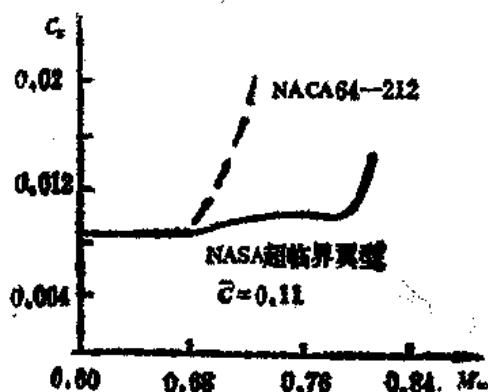


图 7-20

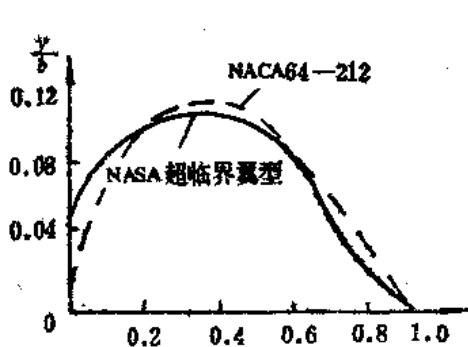


图 7-21

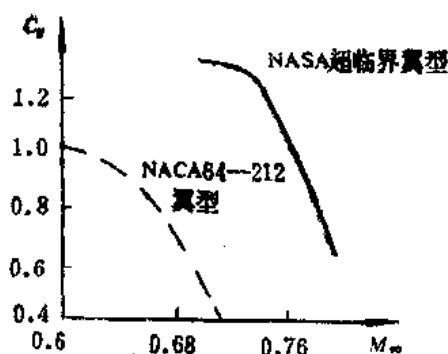


图 7-22

§ 7-2 机翼的高速空气动力特性

一、机翼的亚音速气动特性

根据前面讨论的低速大展弦比椭圆机翼的气动特性，如下关系式成立

$$C_{y\text{椭圆}}^a = \frac{C_{y\text{型}}^a}{1 + \frac{C_{y\text{型}}^a}{\pi\lambda}}$$

$C_{y\text{型}}^a$ 如用薄翼理论的值，即 $C_{y\text{型}}^a = 2\pi$ 代入上式得

$$C_{y\text{椭圆}}^a = \frac{2\pi\lambda}{\lambda + 2} \left(\frac{1}{\text{弧度}} \right) \quad (7-21)$$

任意平面形状大展弦比直机翼的 C_y^a 可以通过对上式的修正而得到

$$C_y^a = \frac{2\pi\lambda}{2 + \sqrt{\frac{\lambda^2}{K^2} + 4}} \left(\frac{1}{\text{弧度}} \right) \quad (7-22)$$

式中 $K = \frac{C_{y\text{型}}^a}{2\pi}$ ，为剖面升力系数斜率与理论值 2π 的比值。 $C_{y\text{型}}^a$ 可由下式确定

$$C_{y\text{型}}^a = 6.28 + 4.76(1 + 0.00375\tau) \left(\frac{1}{\text{弧度}} \right) \quad (7-23)$$

由式(6-31)可知，无限翼展后掠翼的升力系数斜率与无限翼展平直翼的升力系数之关系为

$$C_{y_x}^a = C_{y_0}^a \cos \chi$$

将上式代入式(7-22)便可得后掠翼的 C_y^a ，即

$$\begin{aligned} C_y^a &= \frac{2\pi\lambda}{2 + \sqrt{\frac{\lambda^2}{\left(\frac{C_{y_0}^a \cos \chi_{0.5}}{2\pi}\right)^2 + 4}}} \\ &= \frac{2\pi\lambda}{2 + \sqrt{\frac{\lambda^2}{K^2 \cos^2 \chi_{0.5}} + 4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi\lambda}{2 + \sqrt{\frac{\lambda^2}{K^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \chi_{0.5}) + 4}} \left(\frac{1}{\text{弧度}} \right) \quad (7-24)$$

式中 $\chi_{0.5}$ 表示机翼 $\frac{1}{2}$ 弦点连线的后掠角。

1. 大展弦比直机翼的亚音速气动特性

与翼型类似, 当 $M < M_{\text{临}}$ 时, 随着 M 数增大, 机翼的 C_y^α 增大, 而 $C_{y\max}$ 减小。

根据理论计算

$$\frac{C_y^\alpha}{\lambda} = \frac{2\pi}{2 + \sqrt{\frac{\beta^2 \lambda^2}{K^2} + 4}} \quad (7-25)$$

式中 $\beta = \sqrt{1 - M^2}$, λ 为机翼展弦比。

在低速时机翼的阻力特性, 由第六章可知, 机翼与翼型相比, 除了摩擦阻力和压差阻力外, 还多了一个诱导阻力。可以利用下列式子表达

$$C_x = C_{x0} + \Delta C_x + \frac{1}{\pi\lambda}(1 + \delta)C_y^2$$

式中 C_x 为机翼的阻力系数,

C_{x0} 为 $C_y = 0$ 时机翼的阻力系数, 它的主要成份是摩擦阻力,

ΔC_x 为机翼剖面因 C_y 而引起的压差阻力增量,

$\frac{1}{\pi\lambda}(1 + \delta)C_y^2$ 为机翼的诱导阻力系数。

工程上计算机翼阻力系数时, 将上式写成

$$C_x = C_{x0} + AC_y^2 \quad (7-26)$$

式中 A 称为诱导阻力因子, 可用下式进行估算

$$A = \frac{0.38}{\lambda - 0.8C_{y0}(\lambda - 1)} \quad (7-27)$$

当 M 数增大时, 在机翼迎角不变情况下, C_y 将增大, 所以诱导阻力系数将增大。 M 数对 C_{x0} 的影响, 与翼型的零升阻力系数类似可用下列式子估算

$$C_{x0} = 2C_{x\text{摩}}\eta_c\eta_M \quad (7-28)$$

式中 $2C_{x\text{摩}}$ 表示平板摩擦阻力系数, 可查图 5-16;

η_c 为计及剖面形状影响的修正因子, 可查图 6-27;

η_M 为计及 M 数影响的修正因子, 查图 5-26。

亚音速机翼的阻力系数仍可用式(7-26)进行计算, M 数将通过对 C_y 的影响, 来影响诱导因子, 从而影响诱导阻力系数的大小。

2. 后掠机翼的亚音速气动特性

根据理论计算:

$$\frac{C_y^\alpha}{\lambda} = \frac{2\pi}{2 + \sqrt{\frac{\lambda^2}{K^2}(\beta^2 + \operatorname{tg}^2 \chi_{0.5}) + 4}} \quad (7-29)$$

对于后掠翼的诱导阻力因子, 可用下列经验公式进行估算

$$A = \frac{0.38}{\lambda - 0.8C_v(\lambda - 1)} = \frac{\frac{\lambda}{\cos \chi_{0.5}} + 4}{\lambda + 4} \quad (7-30)$$

不论是平直机翼, 还是后掠翼, 随 M 数增大, 机翼的最大升力系数 $C_{y_{max}}$, 一般随 M 数增大而下降。这是因为随 M 数增大, 翼型最小压强点的压强降低, 这样翼型后部逆压梯度就增大, 使翼型在较小的迎角下就分离失速。因此 $C_{y_{max}}$ 随 M_∞ 的增大而降低。

二、机翼的跨音速气动特性

随着 M 数超过 $M_{临}$, 机翼上将出现超音速区和局部激波。这种既有超音速流动, 又有亚音速流动称跨音速流动。对于跨音速流目前在理论上还存在不少需进一步研究和解决的问题, 因此在这里着重介绍一些实验结果和有关参数对跨音速气动特性的影响。翼型的几何参数对临界 M 数及气动特性的影响在前面已讨论, 在此着重讨论机翼的平面几何参数对临界 M 数及气动特性的影响。

1. 机翼后掠角的影响

具有后掠角的机翼, 可以提高机翼的临界 M 数。这是因为后掠翼的气动特性主要取决于法向流动, 而法向的 M_n 数是小于来流 M_∞ 数。所以当来流 M_∞ 数不断增加, 达到平直翼的临界 M 数时, 在后掠翼上还不致出现局部法向马赫数等于1的点。而只有当来流 M_∞ 数再继续增大时, 才会出现局部法向马赫数等于1的情况。亦即后掠翼的临界 M 数总比具有同样翼型和展弦比的平直翼的临界 M 数要高, 显然后掠角越大, 法向 M_n 数越小, 则临界 M 数越高。后掠翼的临界 M 数可按式估算

$$M_{临} = \frac{2M_{临x=0}}{1 + \cos \chi} \quad (7-31)$$

式中 $M_{临x=0}$ 是无后掠翼的临界 M 数。

图7-23表示了各种后掠角的机翼的零升阻力系数 C_{z0} 随来流 M 数的变化曲线。由图可见, 与平直翼相比, 后掠翼所对应的临界 M 数较高。而且在同一起来流 M_∞ 数下, 阻力系数值较小, 阻力系数随 M_∞ 的变化缓慢。这些特点随后掠角的增加而愈益明显。

图7-24给出了后掠翼 C_z^* 随 M 数变化情况。与直机翼比较, 后掠翼的 C_z^* 减小, C_z^* 变

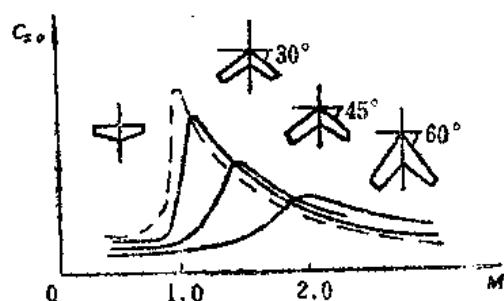


图 7-23

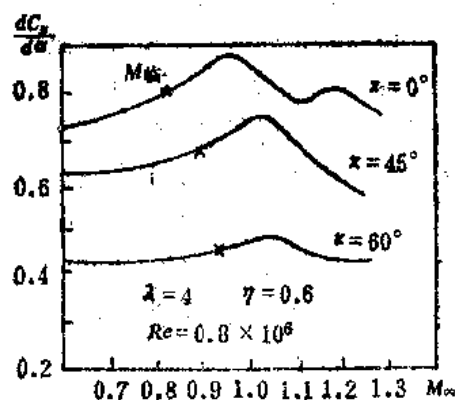


图 7-24

化缓和。 C_x 减小原因可由式(6-31)看出,而临界 M 数的增大使 C_x 急剧增大的 M 数也相应提高。 C_x 之所以变化缓和,是由于后掠翼沿展向局部超音速区分布不平衡所致。随着后掠角增大,上述特点更趋明显。

2. 机翼展弦比的影响

展弦比愈小,机翼上下表面气流的相互影响就愈大。因此,展弦比愈小,机翼各剖面的最大速度增量要较展弦比较大的机翼相应之值为小,这样,展弦比愈小,机翼的临界 M 数就愈高,如图 7-25 所示。该图表示,翼型相同,展弦比不同的机翼阻力系数曲线。从图可看出,展弦比小的阻力系数随 M 数变化和缓。图 7-26 给出了不同展弦比机翼的 C_x 随 M 数变化的曲线。展弦比减少, C_x 值减小,且 C_x 变化缓和。小展弦比机翼在低亚音速飞行时,有较大的诱导阻力,这是它的缺陷。

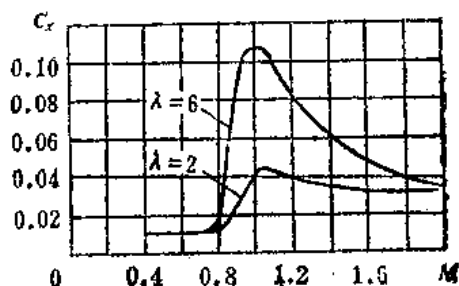


图 7-25

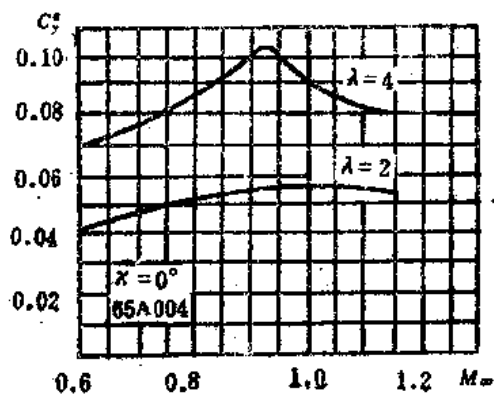


图 7-26

三、机翼的超音速气动特性

在超音速流动中,如果机翼的相对厚度比较小,机翼迎角也不大时,机翼对流场产生的扰动是小扰动(即扰动量远远小于远前方气流的对应量),这时可近似地用马赫波来代替流场中激波和膨胀波来计算和分析机翼的空气动力特性,这就是超音速薄机翼的线化理论。用这种理论计算出来的结果和实验结果大体相符。这里将采用这种理论来分析机翼的超音速气动特性。

1. 机翼超音速流动的一些基本概念

(1) 影响区和依赖区 在超音速流场中 P 点产生小扰动,能影响到的区域,称为 P 点的影响区。见图 7-27 中 P 点的影响区,就是以 P 点为顶点,以来流方向为轴线,以马赫线为母线,绕轴线旋转一周形成的后马赫锥面为边界的内部区域。在流场中,能接受前方小扰动的影响范围,就是以流场中的 Q 点为顶点,锥顶角为 $2\mu_\infty$ 的前马赫锥面内的区域。这个区域称为 Q 点的依赖区。

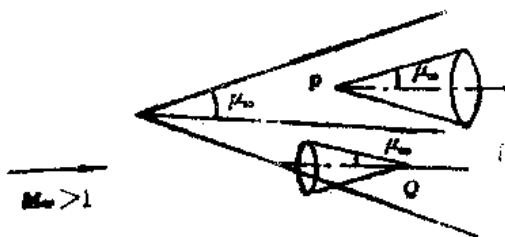


图 7-27

(2) 二维流区和三维流区的划分
在讨论低速机翼的气动特性时,我们曾

注意到由于低速气流中扰动遍及全流场，因此在翼尖处下翼面的高压气流要绕过翼尖向上翼面的低压区流动并沟通。结果形成了沿整个翼展逐渐向内的横向流动。所以，对低速机翼来说，整个机翼都是三维绕流的问题。但是，超音速气流流过机翼时，由于扰动只限于马赫锥内的传播，因此有二维流区和三维流区之分。譬如，在翼尖处上下翼面压强沟通的扰动仅仅局限于以翼尖前缘为顶点的马赫锥内传播，如图 7-28 所示。而在这两个翼尖马赫锥之外的区域，扰动是传不到的。因此，在 ABC 及 DEF 是三维区，以 III 表示，其它为二维区，以 II 表示。

下面我们通过分析矩形平板机翼，看看二维流区和三维流区的气动力有什么不同。当超音速气流以正迎角流过平板机翼时，分别在二维流区和三维流区各取剖面 1-1 及 2-2，如图 7-29 所示。在 1-1 剖面上是二维流动，没有压强沟通，其上下翼面的压强差 ΔC_p 构成了一定的升力和升致波阻。在 2-2 剖面上，一部分是二维流区，另一部分为三维流区。在三维流区，由于上翼面是膨胀流动， $C_{p,上} < 0$ ，所以横向流动方向 (V_x) 由侧缘 (即 AB、DE) 向内；在下翼面，通过压缩波 (其 $C_{p,下} > 0$)，所以 (V_x) 的方向由内向外侧缘，如图 7-28 的实线和虚线所示。形成了三维流动，上下翼面的压强沟通使得 ΔC_p 减小，因而其升力和升致波阻都减小，如图 7-29 所示。由此可见，由于翼尖上下翼面压强沟通，使得三维流区的升力和升致波阻都比二维流区小。

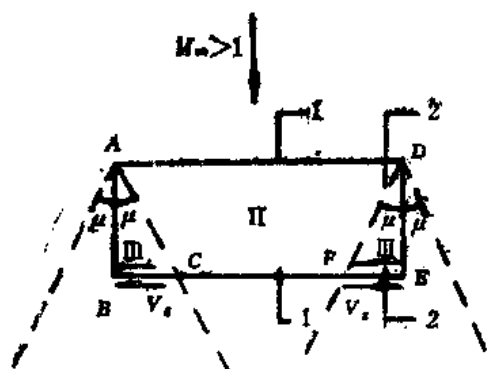


图 7-28

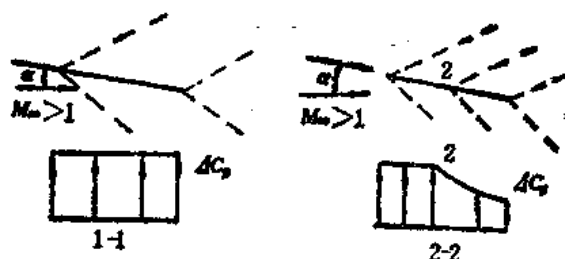


图 7-29

从上述例子中，我们可以对二维流区和三维流区的划分提出明确的含义，以便划分一般平面形状机翼上的二维流区和三维流区。

从矩形机翼来看，二维流区内任意一点的依赖区，都与无限翼展平直翼 (二维机翼) 上相应点处的依赖区相同；反之，三维流区内任意一点的依赖区，都与无限翼展平直翼上相应点处的依赖区不同，见图 7-30 所示。也就是说，在具有超音速的前缘的机翼上划分二维流区和三维流区的原则是以前缘依赖区是否与二维机翼 (正

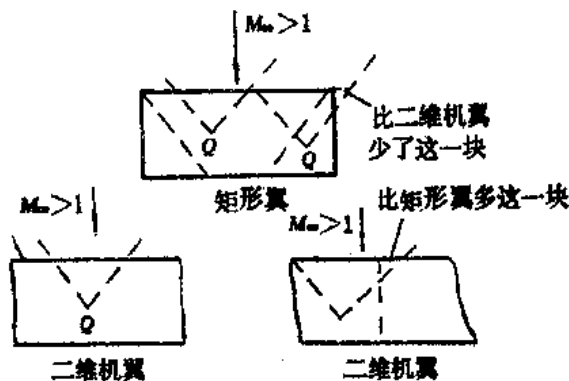


图 7-30

置、斜置)相同与否来区别的。

图 7-31 是一个前缘有后掠的梯形翼, 在翼面上, 不仅有翼尖影响区(三维区)存在, 还出现一个翼根影响区, 并且也是三维区, 按上述划分原则, 很容易理解。

(3) 超音速、亚音速前、后缘 对于非矩形翼, 超音速气流流过机翼的流动情况以及其压强分布情况不仅仅取决于二维区和三维区, 而且还与此超音速气流垂直于机翼前(后)缘的分速是大于还是小于来流的音速有关。

判断前缘是亚音速的还是超音速的, 可以通过垂直于前缘的法向马赫数 M_n 是大于 1 还是小于 1 决定。见图 7-32 因为

$$M_n = \frac{V_n}{a_\infty} = \frac{V_\infty \cos \chi}{V_\infty \sin \mu}$$

$$M_n = \frac{\sin \chi (90 - \chi)}{\sin \mu} \quad (7-32)$$

由此可见

当机翼前缘在马赫锥之外, 即 $(90 - \chi) > \mu$, 于是 $M_n > 1$, 则前缘是超音速的。

当机翼前缘在马赫锥之内即 $(90 - \chi) < \mu$, 则 $M_n < 1$, 前缘是亚音速的。

当机翼前缘在马赫锥上, 即 $(90 - \chi) = \mu$, 则 $M_n = 1$, 为音速前缘。

以上分析方法同样适用于后缘。图 7-33 列举几种前缘的情况。可以看出对于一定的机翼平面形状, 当 M_∞ 改变时, 前(后)缘情况也就随之改变。另一方面, 当 M_∞ 不变时, 不同机翼平面形状, 它们的前后缘情况也不相同。

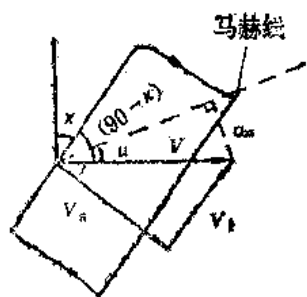


图 7-32

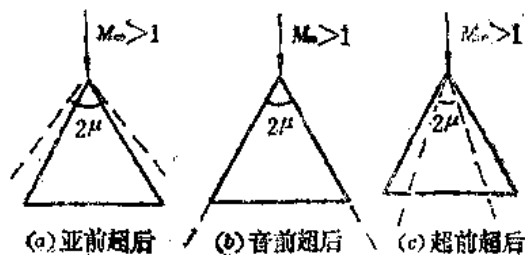


图 7-33

有时对机翼在超音速流场中的前(后)缘情况用参数 m 来表示。其定义是

$$m = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)}{\tan \mu} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\tan \chi} = \frac{B}{\tan \chi} \quad (7-33)$$

所以当

$m > 1$, 即 $B > \tan \chi$, 为超音速前(后)缘;

$m = 1$, 即 $B = \tan \chi$, 为音速前(后)缘;

$m < 1$, 即 $B < \tan \chi$, 为亚音速前(后)缘, 其中 $B = \sqrt{M^2 - 1}$ 。

超音速、亚音速前后缘的流态不同, 其压强分布及阻力特性也有所不同, 下面分别加以讨论。

超音速气流流过一个具有超音速前、后缘的无限翼展后掠翼时, 因为是超音速前缘, 翼面上的扰动不会超出前缘, 而后缘上扰动影响, 又不会影响到翼面上的流动, 见图 7-34, 所以它也是一个二维流动, 即切向分速 $M_{\infty t}$ 不起作用, 所以, 在来流为 M_{∞} , 迎角为 α 时的无限翼展后掠翼, 就同来流为 $M_{\infty n}$, 迎角为 $\alpha_n = \frac{\alpha}{\cos \chi}$ 时(见式 6-30)的无限翼展平直翼(二维机翼或翼型)相当。其剖面绕流图画和 ΔC_p 分布如图 7-35 所示。

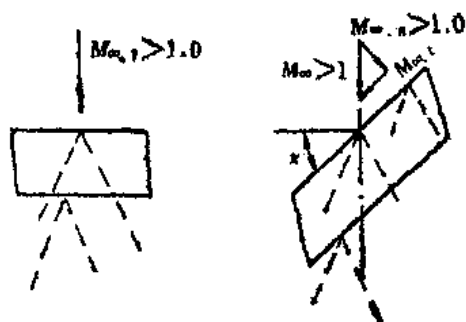


图 7-34

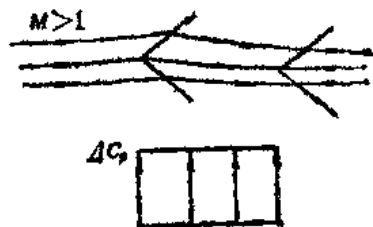


图 7-35

下面我们来看看无限翼展后掠翼与无限翼展平直翼升力系数之间的关系。前已得出,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\alpha}{\cos \chi} \\ V_n &= V_{\infty} \cos \chi \\ C_{yn} &= \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho V_n^2 S} = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S \cos^2 \chi} \\ &= \frac{C_y}{\cos^2 \chi} \end{aligned} \quad (7-34)$$

由式(7-14)可知

$$\begin{aligned} C_{yn} &= \frac{4\alpha_n}{\sqrt{M_n^2 - 1}} = \frac{\frac{4\alpha}{\cos \chi}}{\sqrt{M_{\infty}^2 \cos^2 \chi - 1}} \\ C_y &= \frac{4\alpha \cos \chi}{\sqrt{M_{\infty}^2 \cos^2 \chi - 1}} \end{aligned} \quad (7-35)$$

用式(7-33)代入, 化简得

$$C_y = \frac{4\alpha}{B} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \quad (7-36)$$

由(7-34)可知

$$C_{y\text{二维}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{B}$$

所以

$$C_y = C_{y\text{二维}} \sqrt{\frac{m}{m^2 - 1}} \quad (7-37)$$

可见在相同的 α 及 M_∞ 情况下无限翼展后掠翼的升力系数为无限翼展平直翼的升力系数的 $m/\sqrt{m^2 - 1}$ 倍。

现在来研究超音速气流流过亚音速前、后缘的无限后掠翼情况，如图 7-36 所示。远前方来流在流到前缘之前，就已受到了翼面扰动的影响，故在前缘处的流动，在性质上与亚音速时的情况相同，气流参数没有类似通过激波时的突然变化，在 $\alpha > 0$ 时还会产生前缘绕流。此外，翼面上的流动还会受到后缘扰动的影响，因而，当气流沿着上、下翼面流到后缘会合时，气流参数也应当趋于一致，和亚音速时后缘情况一样。可见，在亚音速前、后缘附近的流动，具有低亚音速时的流动性质。没有激波发生，因而也没有波阻。

采用上述分析方法，我们来分析超音速气流流过一个梯形后掠机翼的情况，见图 7-37 所示。图(a)，马赫数 M_∞ 较大，从前缘和后缘上画出的马赫波均在前缘和后缘之后，故该机翼在此 M_∞ 数下前、后缘为超音速前、后缘。当来流 M_∞ 减小，见图(b)，

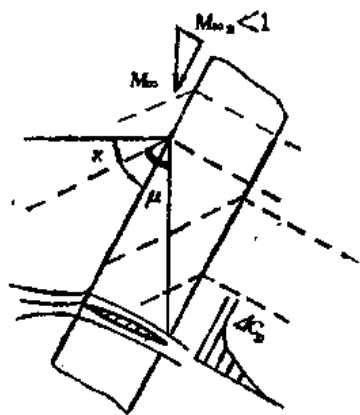


图 7-36

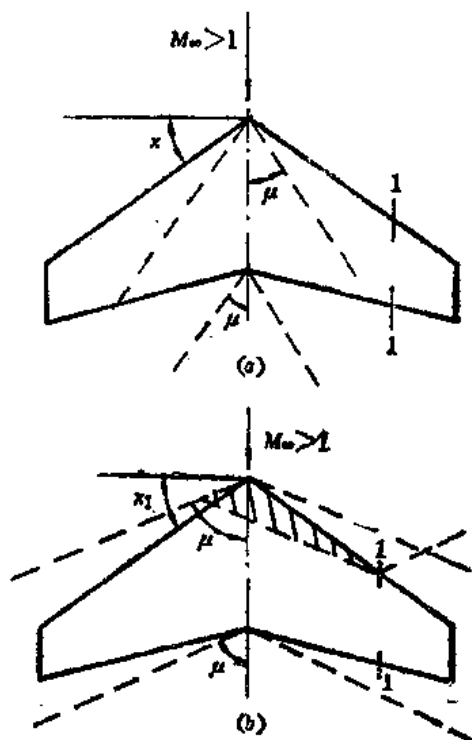


图 7-37

这时，前缘变成亚音速前缘，而后缘仍是超音速后缘。我们取1—1截面来看，在图(a)情况下，前、后缘附近的流动都具有超音速性质，该剖面的绕流图及 ΔC_p 分布和图 7-35 情况类似。在图(b)情况下则不同，气流流向机翼时，在1—1截面的前方，气流已经受到1—1截面左边部分翼面（图上阴影线部分）的扰动影响，故气流流到前缘时，气流参数已逐渐变化，表现出“亚音速”气流绕过前缘的状态，既不产生附体激波且前缘处压强出现峰值。而后缘是超音速后缘，后缘上的扰动影响不能向前传，故使得气流参数只有流到后缘处汇合时，才能进行“突跃式”的调整，正象超音速气流流到翼型后缘处的情况，此时，后缘处的 $\Delta C_p \approx 0$ ，如图 7-38 所示。

综上所述，由于超音速流动中的扰动传播的有限性，因而超音速气流流过机翼时产生三

维流区、二维流区；超音速前、后缘和亚音速前、后缘等流动特点，它将影响机翼的气动力特性。

2. 超音速机翼的空气动力特性

(1) 平直翼 超音速气流流经平直翼时，翼尖马赫锥和机翼表面的 ΔC_p 分布如图 7-39 及图 7-40 所示。

对此机翼左右翼尖的马赫锥不在翼面上相交的条件为

$$\operatorname{tg} \mu < \frac{l}{2b} = \frac{\lambda}{2}$$

即 $\lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1} > 2 \quad (7-38)$

从平直翼 ΔC_p 的分布图中可以看出，在翼尖的三维流区，上下翼面有压强沟通， ΔC_p 减小。根据理论计算，在翼尖马赫锥内的平均压强正好等于二维流区 ΔC_p 的一半。机翼其余部分为二维流区，其上下翼面之压强差为 $\Delta C_{p, \text{二维}}$ 。图 7-40 表示了平板直机翼上下表面压强差的分布图。

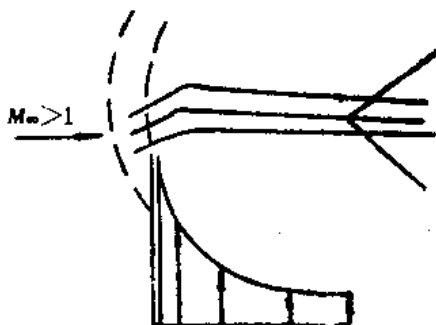


图 7-38

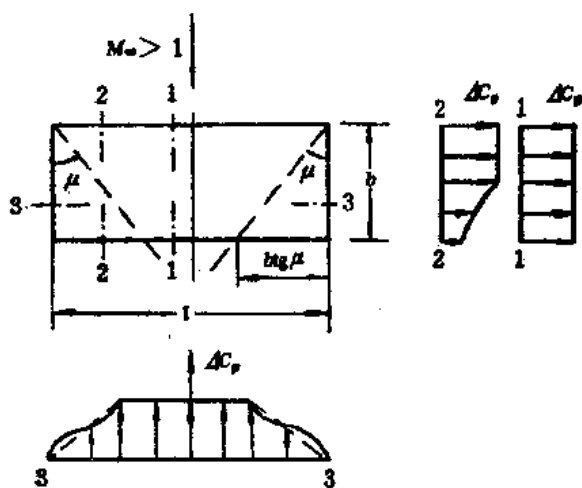


图 7-39

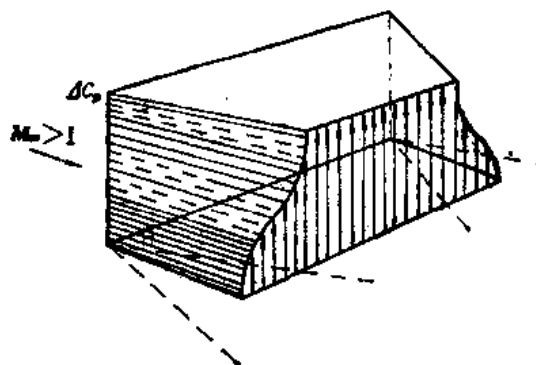


图 7-40

根据 ΔC_p 分布即可算出升力系数：

$$C_y = C_{y, \text{二维}} \left(1 - \frac{1}{2\lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right)$$

$$C_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(1 - \frac{1}{2\lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right) \quad (7-39)$$

对前缘的力矩系数为

$$m_x = \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(1 - \frac{2}{3\lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right) \quad (7-40)$$

压力中心为

$$\bar{x}_{\text{压}} = -\frac{m_e}{C_y} = \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{2}{3\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right)} \quad (7-41)$$

升致波阻系数为

$$C_{x\text{波升}} = C_y \alpha = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(1 - \frac{1}{2\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right) \quad (7-42)$$

式中 $\left(1 - \frac{1}{2\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right)$ 称为展弦比修正因子。

从公式中显然可以看出有限翼展平直机翼的升力系数较二维机翼（即翼型）减小，翼尖的影响不仅与展弦比有关，同时还随 M_∞ 不同而改变。升致波阻随展弦比 λ 降低而降低（同一迎角而言）

实际机翼剖面是有厚度的，通常把由厚度而引起的波阻增量称为厚度波阻，计算表明，在 $\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1} \geq 1$ 的范围，一般平直机翼的厚度波阻和无限翼展平直翼是相同的。

压力中心 $\bar{x}_{\text{压}}$ 随 $\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}$ 的变化曲线，由图 7-41 所示，图中还添上几条表示厚度影响的曲线。可以看出展弦比越小的机翼，压力中心越向前。

(2) 三角形机翼 首先我们来研究 $m > 1$ 时，平板三角翼具有一定迎角时的空气动力。

由于 $m > 1$ ，即是超音速前、后缘，其 ΔC_p 分布情况如图 7-42 所示。在二维流区，其升力系数应与无限翼展后掠翼相同，由 (7-37) 式可知，在 $m > 1$ 时，在二维流区中的 ΔC_p 要比无限翼展平直翼的大 $m/\sqrt{m^2 - 1}$ 倍。1—1 截面是二维流区的弦向 ΔC_p 分布

情况。在三维流区，根据理论计算结果，在马赫锥之内压强系数较小（具体数值可查有关曲线），就整个翼面平均来说，恰好等于无限翼展平直翼的 ΔC_p 值，见图 7-43 所示。所以升力系数为

$$C_y = \frac{4\alpha}{B} \quad (7-43)$$

由于 ΔC_p 分布均匀，所以压力中心在三角形的形心上，即在离前缘距离为 $\frac{2}{3}$ 根弦长度处。

$$\bar{x}_{\text{压}} = \frac{2}{3} \quad (7-44)$$

而 $\bar{x}_{\text{压}} = x_{\text{压}}/b_0$ ， b_0 为根弦长度。

升致波阻系数为

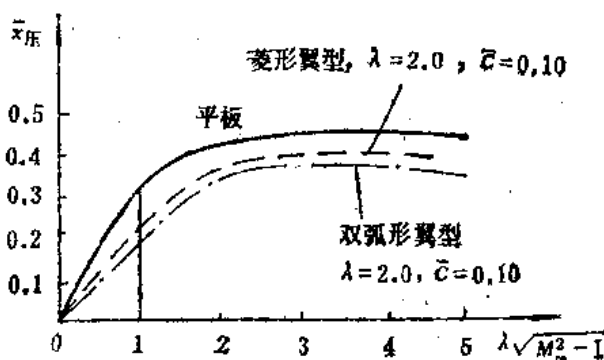


图 7-41

$$C_{\text{波,升}} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 \alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{4\alpha^2}{B} \quad (7-45)$$

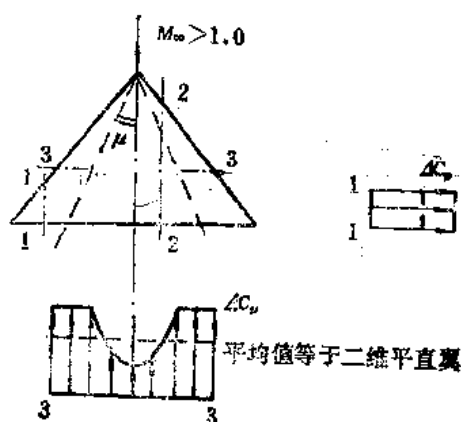


图 7-42

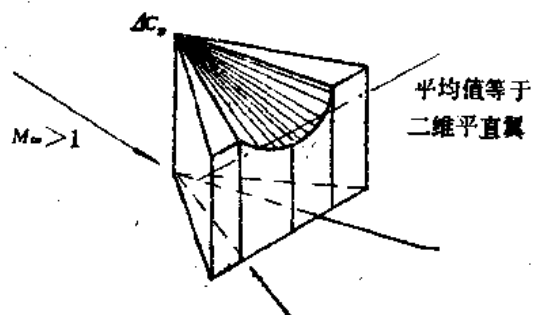


图 7-43

下面我们来看一下 $M_\infty < 1$ 时平板三角翼具有一定迎角时的空气动力情况（或特性）。此时机翼是亚音速前缘，超音速后缘。显然整个翼面均为三维流区，其 ΔC_p 分布情况如图

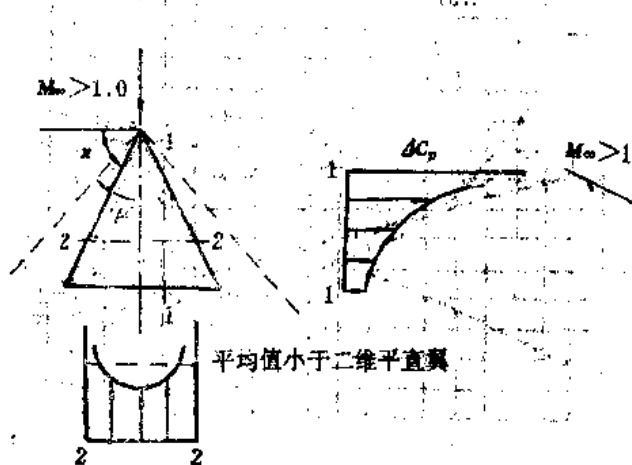


图 7-44

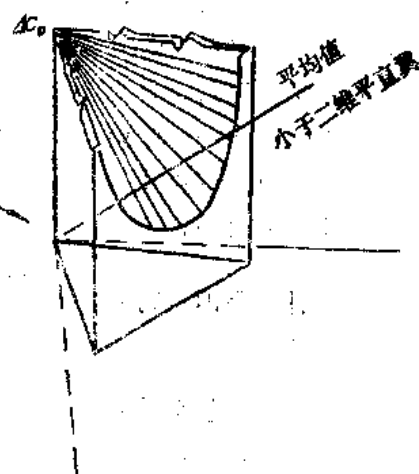


图 7-45

7-44 所示。 ΔC_p 分布的立体图见图 7-45。1—1 截面，因为是亚音速前缘，在前缘有绕流（驻点在下翼面）且前翼处 $\Delta C_p \rightarrow \infty$ ，前缘处的压强分布在速度方向投影是与阻力方向相反，称为前缘吸力，如图 7-46 所示。

从 ΔC_p 分布的平均值来看，小于二维平直翼，故在同一 α 角下三角机翼的 C_y 小于二维平直翼的 $C_{y, \text{二维}}$ 。根据理论计算



图 7-46

$$C_y = C_{y, \text{二维}} \frac{\pi m}{2E(m)} = \frac{2\pi\alpha}{B} \frac{m}{E(m)} \quad (7-46)$$

式中 $E(m)$ — m 的大小和变化, 见图 7-47。 $E(0) = 1.0, E(1.0) = \frac{\pi}{2}$, 故 $\frac{\pi m}{2E(m)} \leq 1.0$ 。

根据理论计算升致阻力

$$C_{x\text{波升}} = C_y \alpha - C_F \quad (7-47)$$

C_F 为前缘吸力

$$C_F = \frac{C_y^2}{\pi \lambda} \sqrt{1-m^2} \quad (7-48)$$

压力中心的位置为

$$\bar{x}_{\text{压}} = \frac{2}{3} \quad (7-49)$$

其中 $\bar{x}_{\text{压}} = \frac{x_{\text{压}}}{b_0}$; b_0 为根弦长度。

图 7-48 表示了三种不同形状机翼零升阻力系数随 M_∞ 变化的曲线。可以看出, 后掠翼大致是在垂直于前缘的气流分速等于音速时, 阻力系数达到最大。而平直翼, 其最大阻力系数是在 $M = 1$ 附近出现, 所以随着 M 数增大, 平直翼的阻力系数下降最早。三角翼是后掠机翼与小展弦比机翼的结合, 所以其最大阻力系数及下降的快慢介于二者之间。

四、工程计算用的气动特性曲线

在工程上, 计算机翼的升力特性时, 按不同 $\lambda, \eta, \text{tg}\chi$ 平面形状的无扭对称翼型的机翼在不可压流中计算所得

到的 C_y^a 值, 按 $\beta\lambda, \eta, \lambda \text{tg}\chi$ 三个参数来整理曲线, 如图 7-49 中的点划线所示。由于在跨音速时, 目前还很难用理论方法来确定机翼的 C_y^a , 因而运用实验值, 按 $\beta\lambda, \eta, \text{tg}\chi$ 三个参数来整理曲线, 一般先固定 $\lambda \text{tg}\chi$ 不变, 作出一组曲线 (如图 7-49 中的 $\lambda \text{tg}\chi_{a.s.} = 0$), 即

$$\frac{C_y^a}{\lambda} = F(\beta\lambda, \eta)$$

换一个 $\lambda \text{tg}\chi$ 又可得到一组类似图线。在跨音速阶段时, 根据理论和实验证明, $\frac{C_y^a}{\lambda}$ 还和

$\lambda \sqrt{\bar{c}}$ 有关 ($\bar{c}$ 指机翼的平均相对厚度)。因此在跨音速阶段 $\frac{C_y^a}{\lambda}$ 随 $\lambda \sqrt{\bar{c}}$ 不同而有所不同

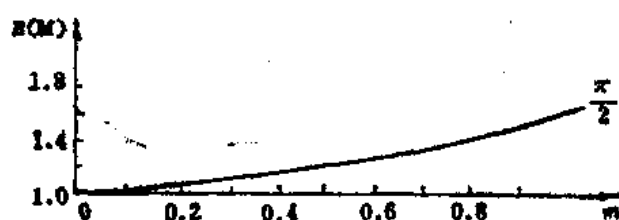


图 7-47

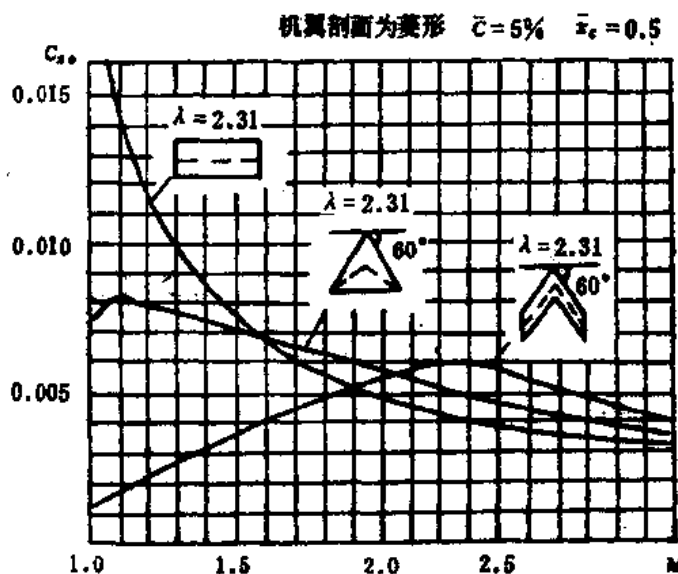


图 7-48

同。在超音速阶段，曲线趋向理论值，如图 7-49 中点划线所示。

关于机翼的压力中心的变化，也有类似曲线，如图 7-50 所示。

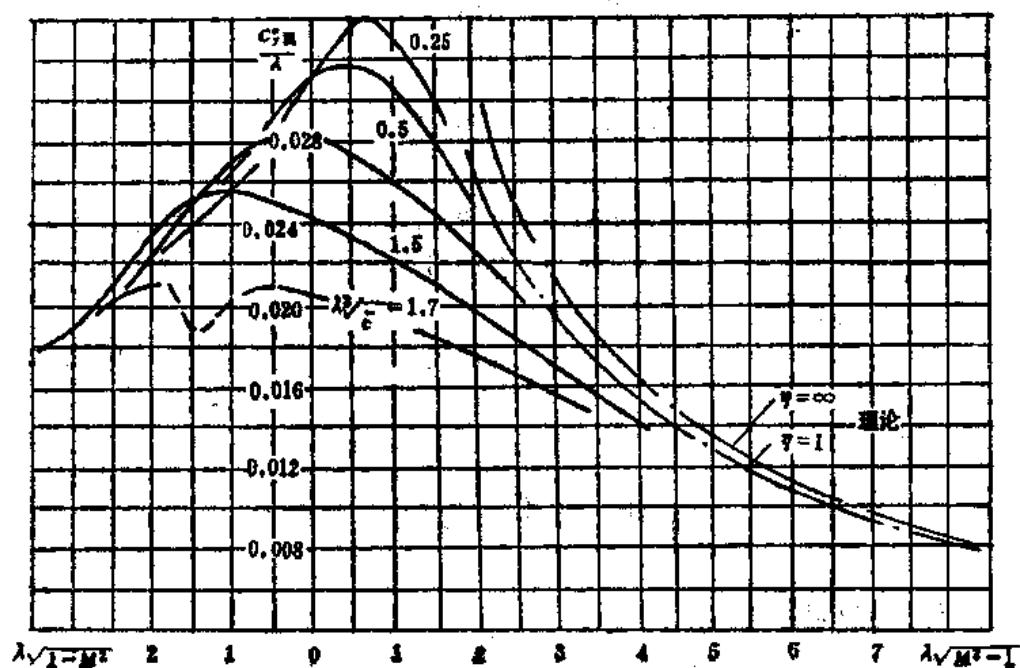


图 7-49

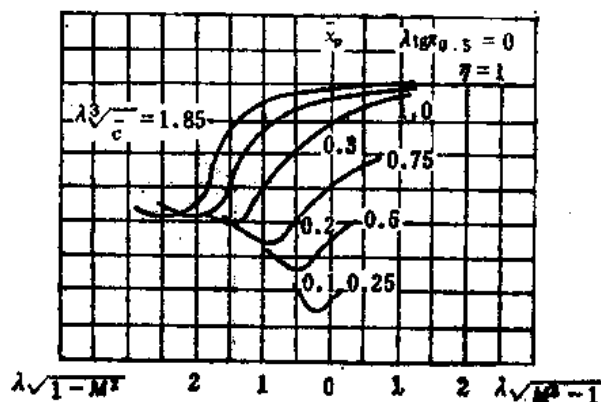


图 7-50

练习题

- 7.1 $M_\infty = 2.1$ 的气流以 5.73° 迎角流过一单位长度的无限宽平板，求该平板的升力系数和波阻系数。
- 7.2 试计算在 $M_\infty = 2.0$ 的超音速气流中，菱形翼型（半顶角为 2.5° ）在 $\alpha = 2.5^\circ$ 时的升力系数和波阻系数。
- 7.3 设计 $M_\infty = \sqrt{2}$ ，2 时的后掠翼，使其前缘为亚音速前缘。问其前缘后掠角应为多少？
- 7.4 在超音速气流中，面积一样的直机翼，问展弦比 λ 大的机翼与展弦比 λ 小的机翼比较哪个波阻大？为什么？
- 7.5 指出机翼的临界马赫数 $M_{\text{临}}$ 随机翼后掠角 χ 、展弦比 λ 、相对厚度 $\bar{c}$ 、相对弯度 $\bar{\eta}$ 等参数的变化规律。
- 7.6 指出机翼的升力系数斜率 $C_{L\alpha}^*$ 随马赫数 M 、机翼后掠角 χ 、展弦比 λ 变化的趋势。

第八章 机身及全机的空气动力特性

前面我们已经研究了作用在机翼上的空气动力。本章将研究飞机的其它部件和各部件组合成飞机后的空气动力。

由于单独尾翼的空气动力与机翼类似，故本章不仔细讨论。本章首先讨论机身的绕流和气动力；再讨论各个部件组成一整架飞机时，各个部件的绕流和气动力与单独各部件时绕流和气动力的不同。这个差别称为空气动力干扰。

在飞机各部件的气动力干扰中，最主要的是机翼机身间的干扰和机翼机身对水平尾翼的干扰。

§ 8-1 机身的空气动力

一、机身的几何参数

通常，机身的外形接近于旋成体，所谓旋成体是指由一根曲线或折线作为母线，绕对称轴旋转而成的形体。它通常可以用以下几何参数表示，见图 8-1。

L ——旋成体全长；

D_M ——旋成体最大截面的直径；

λ ——旋成体的长细比

$$\lambda = \frac{L}{D_M};$$

$\lambda_{\text{头}}$ ——旋成体头部长细比

$$\lambda_{\text{头}} = \frac{L_{\text{头}}}{D_M};$$

ω ——旋成体头部半锥角；

$\lambda_{\text{柱}}$ ——旋成体圆柱段长细比

$$\lambda_{\text{柱}} = \frac{L_{\text{柱}}}{D_M};$$

$\lambda_{\text{尾}}$ ——旋成体尾部长细比

$$\lambda_{\text{尾}} = \frac{L_{\text{尾}}}{D_M};$$

δ_z ——旋成体尾部收缩比

$$\delta_z = \frac{\text{底部面积 } S_z}{\text{最大截面面积 } S_M} = \frac{D_z^2}{D_M^2};$$

D_z ——旋成体底部直径。

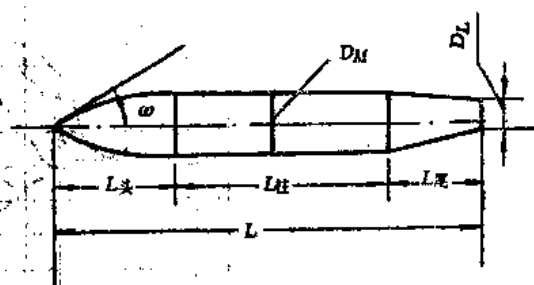


图 8-1

二、机身的压强分布

当亚音速气流以速度 V_∞ 、零迎角流过机身时，见图 8-2，流动情况是轴对称的，即在

各个子午面上(注:子午面是指包含对称轴的, θ 等于常数的平面)的流动情况相同。因此,对于这种情况,只需取一个子午面上的流动情况来进行分析就可以了。由于这种流动是轴对称的,所以此时不产生升力,只有阻力。

图 8-3 表示气流流过某一翼型以及具有相同纵向外形的机身的压强分布图。不难看出,气流流经机翼情况与流经旋成体的情况有很大不同。对机翼而言,流动是一个二维流动,而对旋成体绕流则是一个三维流动。因而,当气流以同一迎角流过与翼型纵向外形相同的机身时,所产生的速度或压强变化,都比机翼上要小。这个现象,称为三维流动效应。

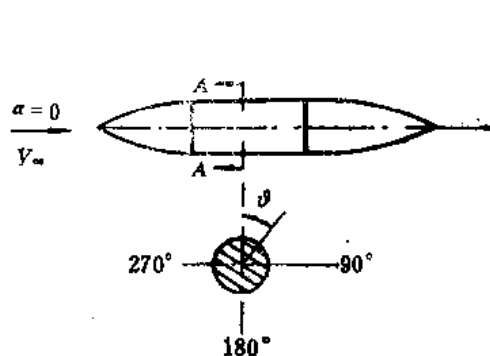


图 8-2

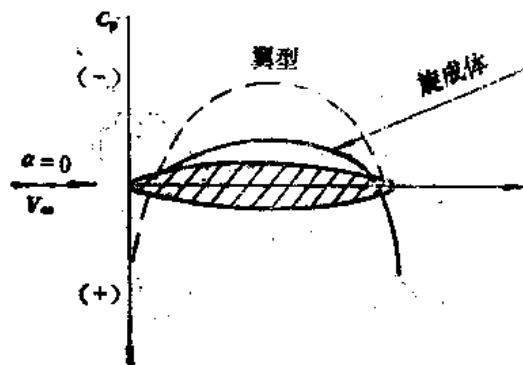


图 8-3

图 8-4 表示带柱身段的旋成体头部压强系数分布情况。气流沿柱身段流动时,速度逐渐接近于来流速度,所以 C_p 趋于零,图 8-5 表示迎角不为零时,气流绕机身的流动图画。由于此时流动不是轴对称的三维绕流,同时气流的粘性影响也要比迎角 α 为零时强,因此流动情况复杂得多。图 8-6 中,画出了迎角不为零时三个子午面 $\theta = 0^\circ$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ 上的压强分布,由图可见,垂直对称轴的法向力等于“0”,只产生一个抬头的力偶 M_{x0} 。

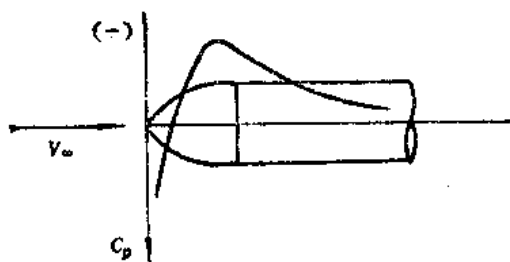


图 8-4



图 8-5

实际上,由于粘性的影响,机身的流动情况,与上述理想情况有些不同。图 8-7 示出机身压强分布测量结果。由图可见,由于粘性影响,使得尾部区负法向力(绝对值)减少,结果在机身上产生不大的法向力,抬头力矩 M_{x0} 仍存在。

下面我们来研究超音速气流流过旋成体的流动图画,图 8-8 示出零迎角时的流动情况。如第三章所指出,当头部是圆锥时,将产生圆锥激波。气流经过圆锥激波后,流动方向将继续偏转,气流将继续受到压缩,压强将继续提高。气流经过圆锥头部以后,再经过肩部发出的膨胀波系使速度方向与圆柱段平行,此时速度增加,压强下降。同样,当气流由圆柱段转入尾部时,也要经过膨胀波使速度增加,压强下降。当气流离开尾部后经过一系列膨胀波向对

称轴方向偏转，随后气流又逐渐向平行于对称轴方向，这时要产生一系列压缩波形成尾部激波。由于粘性影响，在底部后面形成低压尾涡区。图 8-9 和图 8-10 表示两个典型旋成体的压强系数分布图。由图可见，对于上述轴对称流动，有阻力存在，法向力接近于零（在超音速流动中主要是波阻）。

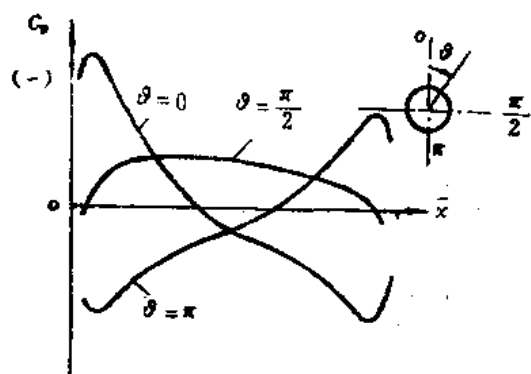


图 8-6

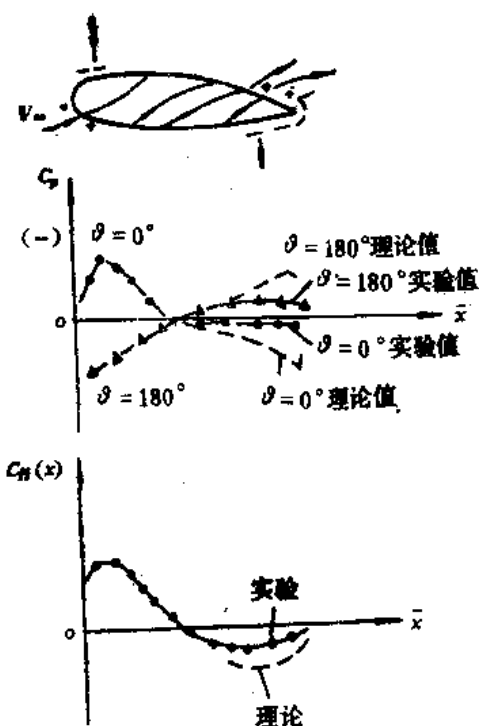


图 8-7

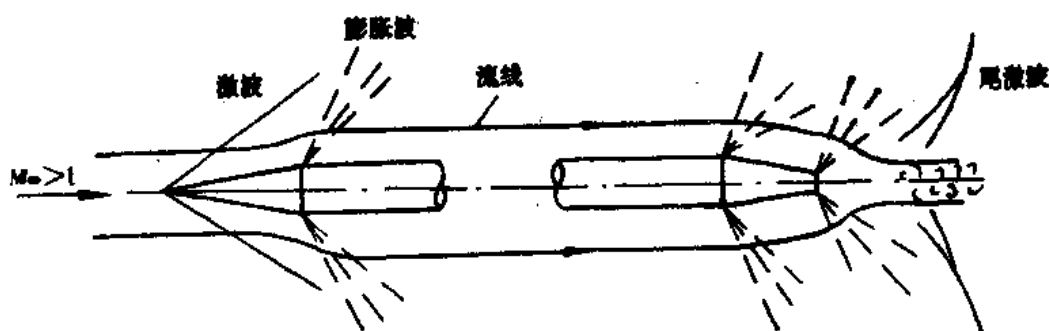


图 8-8

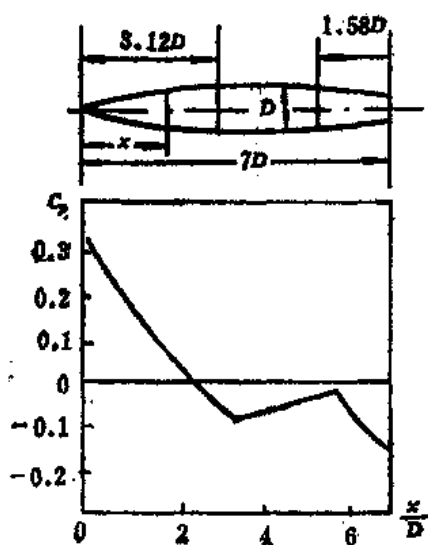


图 8-9

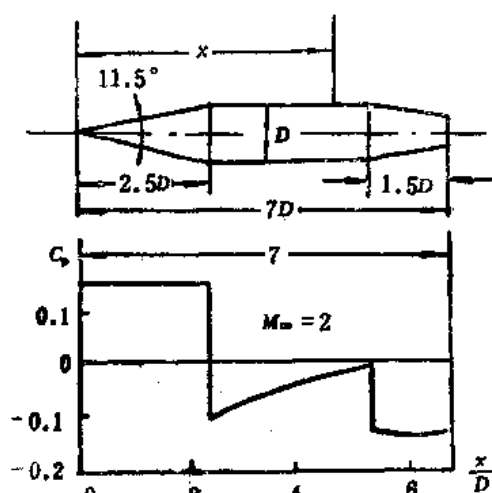


图 8-10

三、机身的阻力

1. 波阻

在超音速气流中机身的阻力主要是波阻。如果来流流过图 8-8 所示外形, 则由于圆柱段的合力在轴向投影等于零, 所以机身在超音速气流中的压差阻力 X , 可由三部分组成, 即头部波阻、尾部波阻和底部压差阻力。

$$X_{\text{压}} = X_{\text{头}} + X_{\text{尾}} + X_{\text{底}}$$

上式各项除以 $\frac{1}{2}\rho V^2 S_M$, 即得

$$C_{x\text{压}} = C_{x\text{头}} + C_{x\text{尾}} + C_{x\text{底}} \quad (8-1)$$

上述各项可以查有关计算公式及曲线得到。从第三章中可知, 为了减少机身阻力, 应减少旋成体头部的半锥角, 增加旋成体的长细比 λ 。对尖头尖尾的旋成体, 显然其底阻为零。

2. 摩阻

在计算机身的摩擦阻力时, 通常引入相当平板的概念, 即该平板长度等于旋成体的长度, 平板面积等于旋成体的表面面积, 且平板上附面层的转捩点位置与旋成体上的位置相当。这样, 可以认为旋成体的摩阻与该相当平板的摩阻相同。

$$\begin{aligned} C_{x\text{摩}\cdot\text{身}} &= \frac{X_{\text{摩}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_M} \\ &= \frac{C_{x\text{摩}\cdot\text{平板}} \frac{1}{2}\rho V^2 S_{\text{表}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_M} \\ &= C_{x\text{摩}\cdot\text{平板}} \frac{S_{\text{表}}}{S_M} \end{aligned}$$

对于亚音速机身来说, 主要成分是摩阻。还须考虑机身的厚度及压缩性的修正, 类似机翼摩阻, 即

$$C_{x\text{摩}\cdot\text{身}} = C_{x\text{摩}\cdot\text{平板}} \eta_o \eta_M \frac{S_{\text{表}}}{S_M} \quad (8-2)$$

式中 $C_{x\text{摩}\cdot\text{平板}}$ 为平板的摩擦阻力系数;

η_o 为机身厚度修正系数;

η_M 为压缩性修正系数。

$C_{x\text{摩}\cdot\text{平板}}$, η_o , η_M 均可从有关公式及曲线中查得。

§ 8-2 机翼与机身的相互干扰

飞机的空气动力并不等于其各单独部分空气动力的总和, 这是因为存在空气动力干扰。知道了各部件的空气动力的干扰, 就可以求出飞机的空气动力及各部件间应如何合理地布置来改善空气动力。

一、翼身组合体的绕流和干扰现象

下面取中单翼翼身组合体的亚音速绕流为例进行分析。

首先研究组合体中机身对机翼的影响。

图 8-11 画出了气流流过单独机翼(a)以及流过翼身组合体(b)的绕流图画。显然, 由于机身存在, 使得机身附近流管变细, 于是位于机身附近的流速就比单独机翼的大, 因而机身附近处机翼上的升力便大于单独机翼上的升力。此外, 当机身迎角不为零时, 产生了绕机身截面的横向流动, 如图 8-12 所示。这种横向流动使机身两侧的气流方向比来流更向上倾斜, 这将改变展向机翼的局部迎角分布。这样组合体中机翼上的升力比没有机身时的升力大, 这就是机身的干扰作用——使机翼上产生了附加升力(干扰升力)。还有机身占据了部分机翼面积, 此面积产生的升力较小。

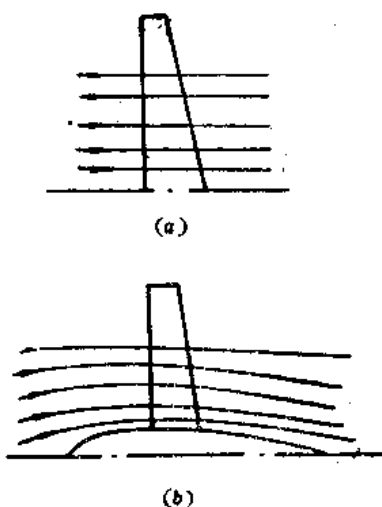


图 8-11

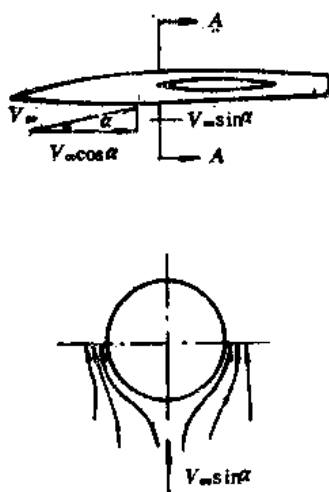


图 8-12

现在看机翼对机身的影响。如图 8-13 所示。绕机身气流在机翼的影响下, 方向逐渐变化, 当机翼有升力时, 在机翼前面的机身处于上洗流中, 在机翼后面的机身处于下洗流中, 这样使机身前、后两段的升力有增有减。

另外我们知道, 机翼有升力时, 机翼上面的压强低而机翼下面的压强高, 在与机翼直接相连的机身段上, 受机翼上下压强影响的结果, 会在机身上面造成低压而在机身下面压强升高, 这意味着由于机翼干扰的结果, 使机身上产生了干扰升力。

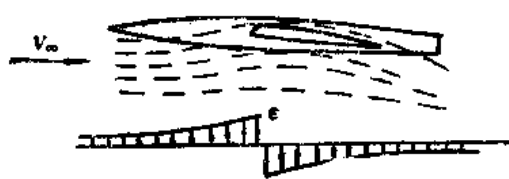


图 8-13

综上所述, 翼身干扰, 使流动状态发生变化, 引起气流方向、速度的变化, 导致压强分布改变, 这显然会影响组合体的升力和压力中心位置, 同时会影响升致(诱导)阻力。此外, 翼身干扰还影响附面层状况, 因而影响零升阻力。

二、翼身组合体的升力

在亚音速情况下, 实验证明, 对于大展弦比飞机, 可近似认为组合体的升力等于机翼的

升力, 见图 8-14。即

$$Y_{\text{翼+身}} \approx Y_{\text{翼}}$$

$$C_{L\text{组合体}} \approx C_{L\text{翼}}$$

(8-3)

对于超音速飞机来说, 机身尺寸相对于机翼来说增加了 (即机身最大横截面直径 D_M 与机翼展长 L 之比值增大), D_M/L 的值已达 0.3—0.5。在这种情况下, 再使用式 (8-3), 可能引起较大误差。这时外露机翼上的升力将大于与之相当的单独机翼 (图 8-15) 上的升力。同时, 外露机翼也会影响到机身上的升力。图 8-16 给出 $M_\infty = 2$, $\alpha = 8^\circ$, 由轴对称机身和矩形机翼组成的组合体的局部升力系数

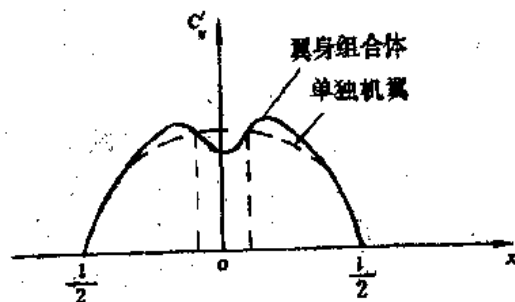


图 8-14

C_L 沿翼展的分布。图中曲线 1 表示单独机翼的理论曲线, 曲线 2 表示局部升力系数 C_L 沿翼展的实测值。由图可以看出, 机身对机翼升力分布的影响是相当大的。同时, 机翼上下表面存在压强差, 这个压强差将传到相应的机身表面上, 而使机身产生附加升力。以图 8-17 为例说明之, 机翼前缘与机身连接处 A 、 A' 点发出的马赫线为 AO 与 $A'O$ (实际上因为机身是圆柱, AO 与 $A'O$ 应是螺旋线, 为简单起见画成直线); 机翼后缘与机身连接处 B 、 B' 点发出的马赫线为 BD 、 $B'D$, 则阴影区 $AOA'B'DB$ 为机身上感受机翼上下表面压强差区域, 因而在此区域产生附加升力。这部分附加升力近似认为等于其在机翼平面上之投影面积按单独机翼之升力系数计算时之升力, 于是组合体之升力为

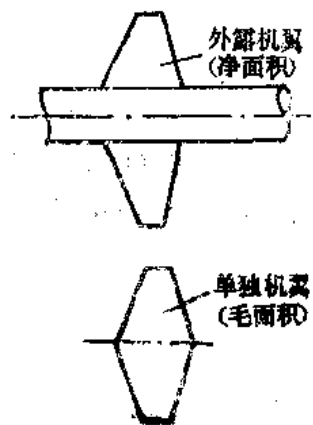


图 8-16

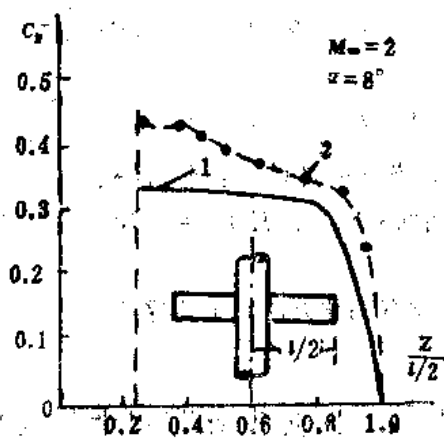


图 8-16

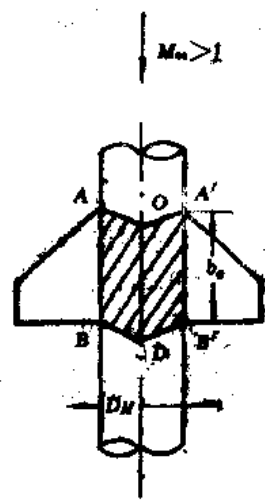


图 8-17

$$Y_{\text{翼+身}} = Y_{\text{身}} + C_{L\text{翼}} \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 (S_{\text{翼}} + S_p)$$

(8-4)

式中 $C_{L\text{翼}}$ 为单独机翼以单独机翼面积 $S_{\text{翼}}$ (即净面积) 定义时的升力系数;

S_p 为旋成体受扰部分面积 (即图 8-17 中阴影区);

$Y_{\text{身}}$ 指旋成体头部产生的升力。

$$S_p = b_0 D_M$$

(8-5)

式中 b_0 为机翼与旋成体相交处之弦长, D_M 为旋成体柱段直径。

三、翼身组合体的阻力

当机翼装在机身上后,其相互干扰对组合体的阻力有影响,尤以机翼与机身连接地方为最显著。机身与机翼连接地方,由于机身的表面为柱面或锥面,流经交接处的气流在机翼后缘容易发生扩散和形成气流分离,出现涡流使飞机阻力增加。这种扩散现象取决于机翼与机身间的相对位置和机身的形状。机翼的上表面速度变化较大,压力变化也大。从前缘向后加速至最大速度,然后流向后缘时又减速,将产生逆压梯度。下表面流动速度变化不大,逆压梯度也小。因此机翼安装在机身的上部时,扩散影响可以略去不计,安装在中部时影响不大,安装在下部时影响最大。如果飞机是单翼机,则靠上部安装之机翼称为上单翼,安装在中部的为中单翼,安装在下部的为下单翼。为了减少这种干扰现象,可以在连接处采用整流包皮以减少由此而产生的阻力。

如果机翼和机身为圆柱段连接,并布置成中单翼形式,则翼身组合体的零升阻力可以认为等于单独净机翼与单独机身阻力之和。

$$X_{0\text{翼}+\text{身}} = X_{0\text{翼(单)}} + X_{0\text{身}}$$

$$\text{因此} \quad C_{x0\text{翼}+\text{身}} = C_{x0\text{翼}} \frac{S_{\text{翼}}}{S} + C_{x0\text{身}} \frac{S_{\text{身}}}{S} \quad (8-6)$$

式中 S 为机翼的毛面积,包括机身所占面积在内的机翼面积;

$S_{\text{翼}}$ 为机翼的净面积;

$S_{\text{身}}$ 为机身最大的截面积。

对于机翼相对于机身的其它布置形式,零升阻力系数主要还要靠实验确定。当飞行马赫数低于临界马赫数时,可用下列经验公式

$$C_{x0\text{翼}+\text{身}} = C_{x0\text{翼}} + C_{x0\text{身}} \frac{S_{\text{身}}}{S} \quad (8-7)$$

$$\text{式中} \quad C_{x0\text{翼}} = C_{x0\text{翼(毛)}} (1 - K_{\text{干扰}} \frac{S - S_{\text{翼}}}{S}) \quad (8-8)$$

式中 $K_{\text{干扰}}$ 的直接情况选取,当下单翼时,对圆截面机身, $K_{\text{干扰}} = 0.25$; 对椭圆截面机身, $K_{\text{干扰}} = 0.50$; 对具有垂直侧面的机身, $K_{\text{干扰}} = 0.60$ 。当中单翼时, $K_{\text{干扰}} = 0.85$; 当上单翼时, $K_{\text{干扰}} = 0.9-1.0$ 。

对诱导阻力估算目前还没有满意方法,主要靠实验。

§ 8-3 机翼机身对水平尾翼的干扰

一、尾翼处的速度阻滞

气流流过机翼时,由于空气粘性作用,要消耗一部分能量,致使流向尾翼的空气流速小于远前方气流速度,二者的关系式为

$$V_{\text{尾}}^2 = kV^2 \quad (8-9)$$

式中 k 称为速度阻滞系数,其大小同尾翼相对于机翼的位置有关,一般由实验来确定,范围在 0.85—1.0 之间。

二、尾翼区的下洗

气流流过机翼时，机翼自由涡流在尾翼区内引起向下诱导速度称为下洗。它使流向尾翼的气流，向下偏斜一个角度，如图 8-18 所示。图中 $\epsilon_{\text{翼}}$ 是机翼引起的下洗角。这样平尾的有效迎角

$$\alpha_{\text{平尾}} = \varphi_{\text{平尾}} + \alpha - \epsilon_{\text{翼}} \quad (8-10)$$

式中 $\varphi_{\text{平尾}}$ 为平尾安装角，表示平尾翼弦与机翼翼弦间的夹角（图 8-19）。

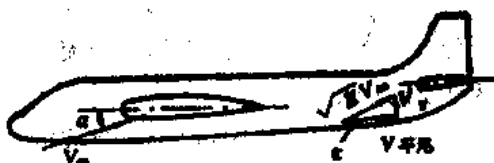


图 8-18

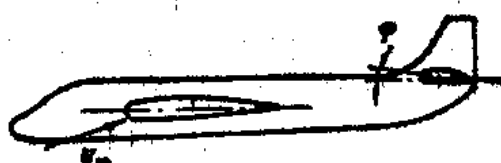


图 8-19

理论与实验结果表明，下洗角 $\epsilon_{\text{翼}}$ 之值与升力系数有关。在亚音速与超音速飞行时，可近似地认为

$$\epsilon_{\text{翼}} = DC_v \quad (8-11)$$

式中 $D = \frac{\partial \epsilon}{\partial C_v}$ ，它取决于机翼平面形状、水平尾翼相对于机翼的位置及飞行 M 数。在亚音速

时，可认为 D 与 M 数关系不大；超音速时，因机翼自由涡的影响只局限于三维流区，故下洗角将随 M 数增加而减小，见图 8-20。但超音速气流经过机身、机翼等部件所产生的激波、膨胀波、也会改变气流的方向，引起平尾区气流的下洗，所以平尾的位置要经实验选择，以保证平尾效能。

引起平尾区气流下洗的主要部件是机翼。但是，机身也产生一定的升力，因此也会引起平尾区气流的下洗。由机身引起的下洗角 $\epsilon_{\text{身}}$ 一般较小。对于大展弦比翼身组合体引起的下洗可近似地用单独机翼（毛面积）引起的下洗来估算。小展弦比翼身组合体引起的下洗可参看专门资料。

将机翼和机身所引起的下洗角相加，即得平尾处总的下洗角 ϵ 。

于是

$$\epsilon = \epsilon_{\text{身}} + \epsilon_{\text{翼}}$$

而式(8-10)，也可改写为

$$\alpha_{\text{平尾}} = \alpha + \varphi_{\text{平尾}} - (\epsilon_{\text{翼}} + \epsilon_{\text{身}}) \quad (8-12)$$

在考虑上述因素后水平尾翼上作用的空气动力大小确定与机翼类似。水平尾翼的诱导阻力较小，一般可以忽略不计。

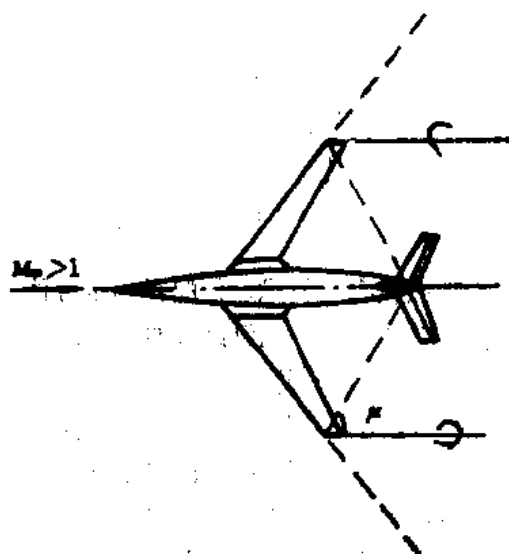


图 8-20

§ 8-4 跨音速面积律

理论和实验都证明：在跨音速范围内，机身与机翼的组合体，在零迎角下的波阻，主要取决于组合体横截面积沿纵轴的分布规律。如果一组合体的横截面积沿纵轴的分布，与另一波阻最小的细长体的横截面积沿纵轴的分布规律一样，则此组合体的波阻也是最小的，这就是跨音速面积律。

按照这一原则，在设计组合体外形时，必须把与机翼、尾翼相联接那部分机身截面面积减小，使其与机翼组合在一起时的横截面积沿纵轴分布，与一波阻最小的细长流线体的横截面积沿纵轴的分布一样，则其波阻最小。如图 8-21 所示。

图 8-22 表明了机身具有内凹和没有内凹形状的飞机的比较。由图可见，当飞行速度等于音速时，机身内凹的飞机其波阻系数大约减小 80%。如美国民航机康维尔-990A 的总体布局，就具有这种特点。

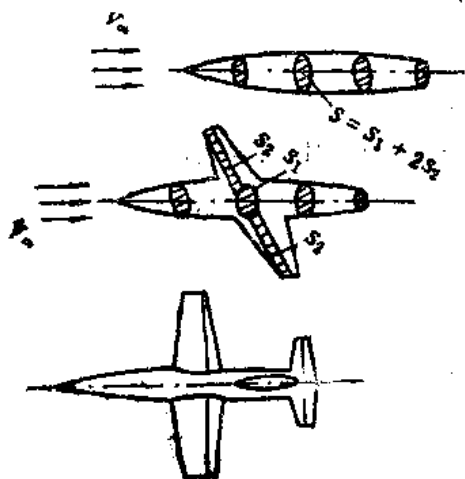


图 8-21

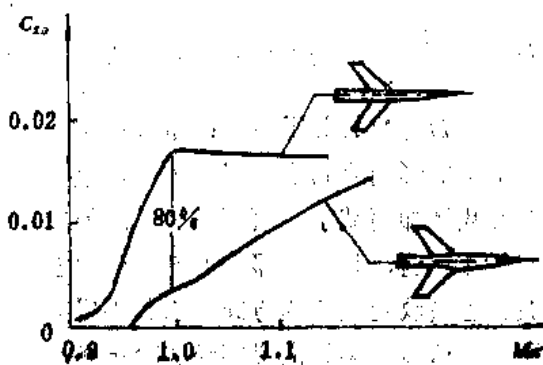


图 8-22

为什么机身与机翼这样配置的组合体，其零升波阻大大地减小呢？从物理上可以这样解释：在零升迎角下，机翼最大厚度线之前的上、下翼面产生高压，以“+”号表示，最大厚度线之后的上、下翼面上产生低压，以“-”号表示，机身做成凹形的，如图 8-23 所示。在前部 AB 段气流是绕外转角流动，所产生低压，在后部 BC 段绕内转角流动，产生高压。当机翼与机身组合在一起时，则上下翼面的高压和低压分别与机身凹陷处附近流场上的高低压沟通，因而使机翼机身组合体的波阻减小。

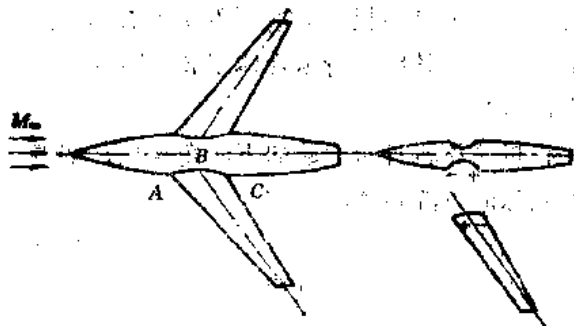


图 8-23

对于后掠翼飞机，直到 $M_{\infty} = 1.4$ ，对于三角翼飞机，直到 $M_{\infty} = 2.0$ ，面积律都显示出它的作用。除机翼机身的连接处外，发动机短舱和外挂处也应考虑面积律。

§ 8-5 飞机的极曲线

以上分析了飞机各个部件的空气动力及它们相互间的干扰，现在对整架飞机的空气动力特性作一综合研究。

一、估算方法

通常在新机种的设计过程中，往往需要预先估算飞机的性能，因而必须用计算方法事先求得升力系数和阻力系数。

对于升力系数，只要把全机各部件的升力在计及相互干扰的条件下加起来就是了。

而飞机的阻力等于计入干扰的飞机各部件阻力之总和，其公式为

$$X_{\text{全机}} = C_{x\text{全机}} \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \quad (8-13)$$

式中 $X_{\text{全机}}$ ——飞机的阻力；

$C_{x\text{全机}}$ ——飞机的阻力系数，习惯上，常用 C_x 代替；

S ——机翼的全面积（即毛面积）。

为测量上及分析飞机性能上的方便，习惯上将阻力分成两部分：一部分是与升力无关的称为零升阻力，用 X_0 表示，其对应的阻力系数称零升力阻力系数，用 C_{x0} 表示；另一部分与升力有关的阻力，称为升致阻力，用 $X_{\text{升}}$ 表示，其对应的阻力系数称为升致阻力系数，用 $C_{x\text{升}}$ 表示。因而飞机的阻力系数可表示为

$$C_x = C_{x0} + C_{x\text{升}} \quad (8-14)$$

1. 零升力阻力系数 C_{x0}

飞机零升力阻力，就是指在零升力情况下的飞机阻力，如摩擦阻力及零升情况下的压差阻力、弯度波阻力、干扰阻力等用算式表达如下，

$$C_{x0} q S = (C_{x0})_{\text{翼}} q S + (C_{x0})_{\text{身}} q S_M + (C_{x0})_{\text{发}} q S_{\text{发}} + K (C_{x0})_{\text{尾}} q S_{\text{尾}} + \dots$$

式中脚注的翼、身、发、尾四字分别表示机翼、机身、发动机舱、尾翼；

$$q = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$$

$$\text{所以 } C_{x0} = (C_{x0})_{\text{翼}} + (C_{x0})_{\text{身}} \frac{S_M}{S} + (C_{x0})_{\text{发}} \frac{S_{\text{发}}}{S} + K (C_{x0})_{\text{尾}} \frac{S_{\text{尾}}}{S} + \dots \quad (8-15)$$

2. 升致阻力系数 $C_{x\text{升}}$

升致阻力包括，机翼翼尖涡流引起的诱导阻力、升致波阻及由于升力（迎角）增加时而引起的压差阻力。升致阻力系数为

$$C_{x\text{升}} = A C^{\frac{3}{2}} \quad (8-16)$$

式中 A 与 M 数及机翼平面形状有关。图 8-24 给出某飞机 A 与 M 数的关系曲线及 C_{x0} 随 M 数而变化的曲线。

由上可见，飞机阻力系数公式可表示如下形式

$$C_x = C_{x0} + A C^{\frac{3}{2}} \quad (8-17)$$

二、飞机的极曲线

从综合衡量飞机的空气动力特性出发，可将飞机的升力系数和阻力系数随迎角而变化的关系，综合地用一条曲线画出来，此曲线就是飞机极曲线。如图 8-25 所示，曲线的纵坐标代表升力系数，横坐标代表阻力系数。

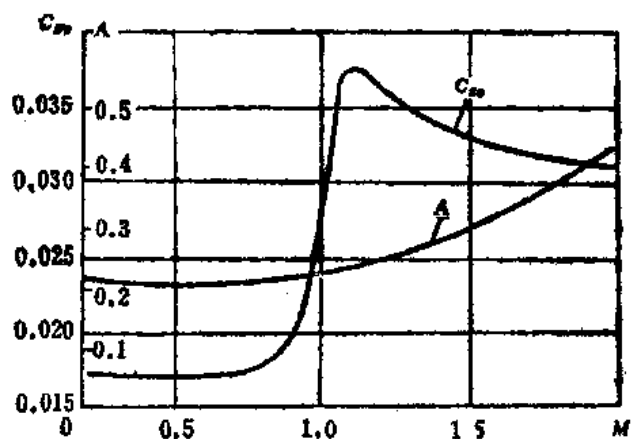


图 8-24

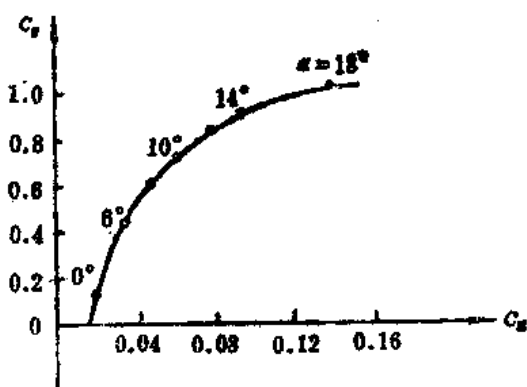


图 8-25

在一定的升力系数（或迎角）下，阻力系数是随 M 数而变化的，所以不同 M 数的极曲线形状也是不同的。因此在极曲线图上会出现不同 M 数的极曲线相互交叉的情况（图8-26）。

飞机的特征面积（用机翼面积 S ）算出升力系数和阻力系数

$$C_y = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho_a V^2 S}$$

$$C_x = \frac{X}{\frac{1}{2} \rho_a V^2 S}$$

把它画成一条曲线，即为全机极曲线。作为计算飞机飞行性能的原始数据。

通过试验所取得的曲线，可以弥补上述估算方法不足之处。

练 习 题

- 8.1 低速机翼对机身、尾翼的干扰表现在哪些方面？这些因素影响机身、尾翼哪些特性？
- 8.2 机身对机翼的干扰表现在哪些方面？影响机翼哪些气动特性？
- 8.3 利用跨音速面积律的原理来说明大后掠角、小长细比 λ 身的组合体能减少波阻。

第九章 飞机的飞行性能

飞机飞行性能，即对给定的飞机确定它在已知外力（空气动力、发动机推力和重力）作用下的运动特性。通常用来解决飞机能飞多快、多高、多远、多久以及飞机的机动性能、起落特性等这类问题。

处理这类问题时，常可将飞机视为质点，认为在各种飞行情况下，只要满足力的平衡关系，且绕飞机的重心的力矩平衡，总可以通过操纵面适当偏转得以解决；同时，由操纵所引起的附加气动力很小，不致影响原有力的平衡关系。这种处理方法对于以机翼为产生升力的主要部件的一般飞机来说是可行的，通常不会带来显著的误差。

§ 9-1 飞机的基本飞行性能

飞机的基本飞行性能是指飞机定常直线运动性能。所谓“定常”，是指运动参数不随时间改变的运动情况。

本节的任务是利用简单的图解分析方法，确定上述的基本飞行性能。

一、性能计算的原始数据

研究飞机的飞行性能，就是研究作用在飞机上的外力和飞机质心运动之间的关系，因此分析飞机的性能就必须知道作用在飞机上的外力，以及这些外力与飞行速度，飞行高度之间的关系。

在正常飞行中,作用在飞机上的外力有飞机的重力 G ,空气动力 R 及发动机推力 P 。各种飞行情况下, G , R , P 的大小以及它们的变化规律就是进行性能计算所需的原始数据。

1. 飞机所受的重力 G

通常对给定的飞机，在各种使用情况下的质量或质量的突然变化（如投弹、扔付油箱等），都是事先可以确定的。因燃油消耗而引起的质量逐渐变化的规律，则可根据发动机的耗油特性来确定。

在飞行过程中，飞机质量是在不断的变化，为了简化计算，在以后的性能计算时，我们常常把飞机质量当作某一个已知的常量，设飞机的质量为 m ，则飞机所受的重力 $G = mg$ 。为了使计算较为合理，我们将对不同的性能计算问题采用不同的质量。

2. 空气动力 R

对一定的飞机来说，飞行中作

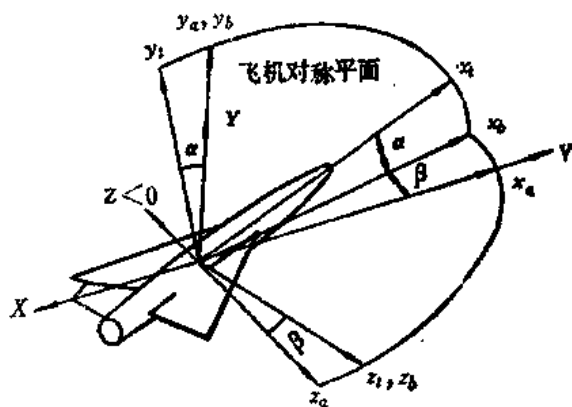


图 9-1

用在飞机上的空气动力 R 取决于飞机的飞行速度、高度和气流与飞机的相对方位。根据空气动力学的处理方法,将空气动力 R 分解为升力 Y 、阻力 X 和侧力 Z (见图9-1),并表示为:

$$Y = C_y \frac{1}{2} \rho V^2 S,$$

$$X = C_x \frac{1}{2} \rho V^2 S,$$

$$Z = C_z \frac{1}{2} \rho V^2 S。$$

式中 C_y 、 C_x 、 C_z 分别称为升力系数、阻力系数和侧力系数。

对一定的飞机来说,一般地有如下函数关系:

$$C_y = f_1(\alpha, \beta, M, Re),$$

$$C_x = f_2(\alpha, \beta, M, Re),$$

$$C_z = f_3(\alpha, \beta, M, Re)。$$

式中 α 、 β 分别为来流迎角及侧滑角; $M = \frac{V}{a}$, a 为来流音速; $Re = \frac{\rho V b}{\mu}$; b 为翼弦; μ 为空气粘性系数。

通常飞机主要作无侧滑飞行,即 $\beta = 0$,于是 $C_z = 0$, $C_y = f_1(\alpha, M, Re)$, $C_x = f_2(\alpha, M, Re)$

使用上,常常将 C_y 及 C_x 近似表达成下列形式:

$$C_y = \frac{dC_y}{d\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ (线性段)}$$

$$C_x = C_{x0} + AC_y^2 \text{ (失速前)}$$

$\frac{dC_y}{d\alpha}$: 升力系数斜率,主要由机翼平面形状、翼型及 M 数决定;

α_0 : 零升迎角,主要由机翼翼型的弯度,机翼扭转等决定;

C_{x0} : 零升阻力系数,主要由粘性摩擦阻力,压差阻力以及零升波阻组成;

AC_y^2 : 因升力而引起的阻力系数,主要由诱导阻力、压差阻力及升致波阻组成;

A : 系数,由机翼平面形状及 M 数决定。

图9-2、图9-3给出了某机在不同 M 数下的升力系数随迎角变化曲线和极曲线。由曲线可见,随着 M 数增加升力系数斜率 $dC_y/d\alpha$ 先是增加,而后再降低, $C_{y\max}$ 则一直降低;而零升角 α_0 变化不大。由极曲线可见,随着 M 数的增加,曲线先是右移,而后左移,最大的升阻比 $K_{\max}$ 一直是逐渐降低;而系数 A 则是逐渐增加, $dC_y/d\alpha$, C_{x0} , $K_{\max}$, 以及 A 随 M 数的变化规律可见图9-4

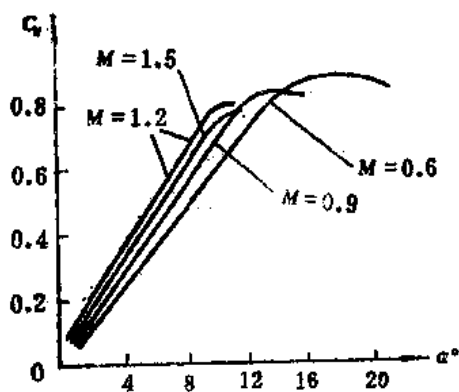


图 9-2

3. 发动机推力 P

涡轮喷气发动机的推力一般与发动机转

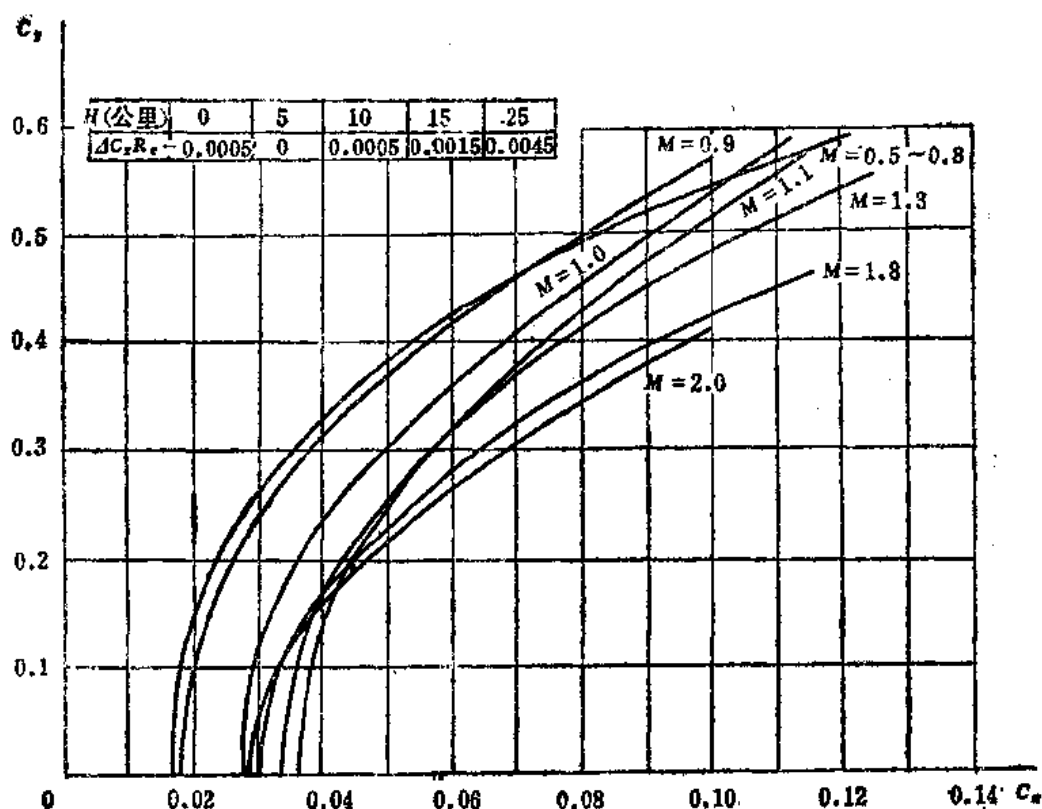


图 9-3

速 n (即油门开度)、飞行速度 V 和飞行高度 H 有关。

通常进行飞行性能计算时,需要的发动机推力 P 多以曲线形式给出。这类曲线包括转速特性、速度特性和高度特性。

所谓发动机的转速特性是指在一定的飞行速度 V 及高度 H 下,发动机的推力 P 和燃料消耗率 $q_{N \cdot h}$ 与转速的关系。当发动机转速不变时,推力及燃料消耗率随飞行速度及高度的变化关系,称为涡轮喷气发动机的速度特性和高度特性。见图 9-5、图 9-6、图 9-7。关于发动机燃料消耗率 $q_{N \cdot h}$ 的变化在讨论续航性能时再作介绍。

由图 9-6 可见:

涡轮喷气发动机的推力随飞行速度的加快而增大,而随飞行高度的增加而减小。在低空和小 M 数 ($H=0-2$ 公里, $M=0-0.5$), 推力随速度的加快而略有下降。随着飞行速度的增加,喷气发动机推力由于通过发动机的空气流量相应增大而增加。随着飞行高度的增加,

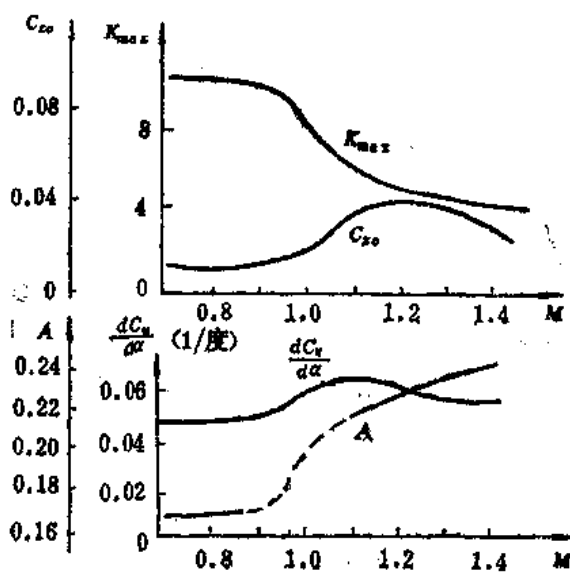


图 9-4

由于空气密度减小而引起发动机流量减小, 发动机推力也相应减小。

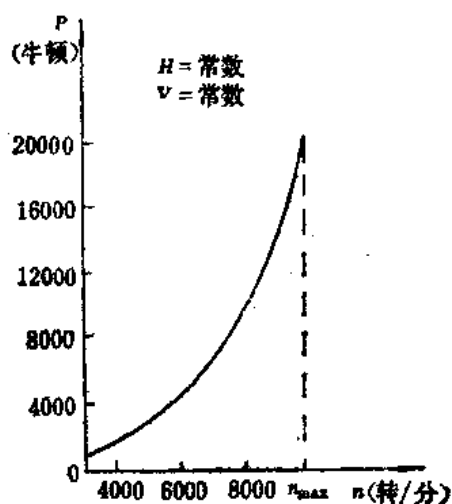


图 9-5

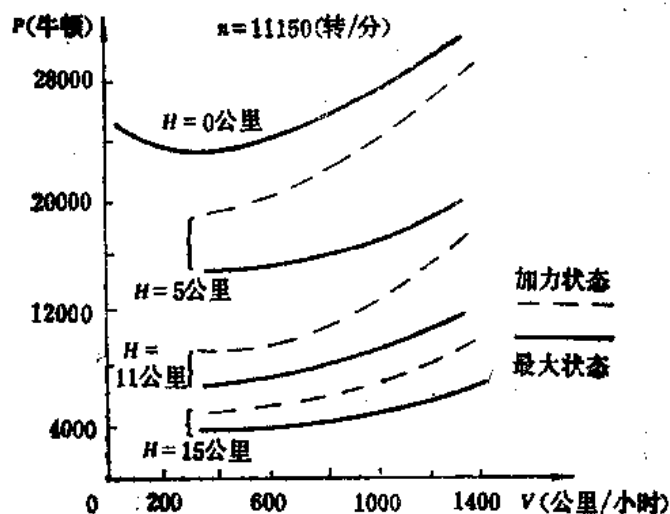


图 9-6

当涡轮喷气发动机安装在飞机上时, 因安装部位不同, 进气道形式及尾喷管不同, 从而引起不同程度的推力损失。这样, 真正作用于飞机的发动机推力就将低于发动机特性曲线给出的数值 (用 P 来表示)。很明显, $P_{\text{可用}}$ 与 P 的关系应是 $P_{\text{可用}} = \eta P$, η 称为效率系数。通常作飞行性能计算时, 应根据具体情况确定出 η 随飞行状态的变化规律, 然后加以引用。 $\eta = 1$, 最低可至 0.7 左右。

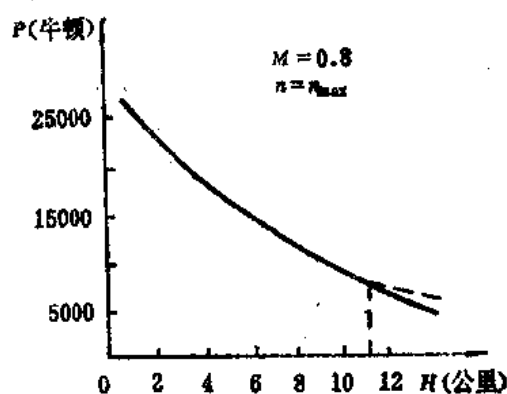


图 9-7

二、飞机的等速直线运动

1. 垂直平面内飞机等速直线运动方程式

飞机的等速直线运动是飞机整个飞行过程中最简单也是最常见的运动形式。所谓垂直平面内的等速直线飞行是指飞机航迹所在的垂直(铅垂)平面与飞机的对称面重合, 飞行航迹为一直线, 沿航迹各点的速度始终不变的飞行情况。如图 9-8 所示。此时, 飞机飞行中所受的力 G , 发动机可用推力 $P_{\text{可用}}$ 及气动力 Y 和 X 均在飞机的对称平面内, 并作用在质心上。

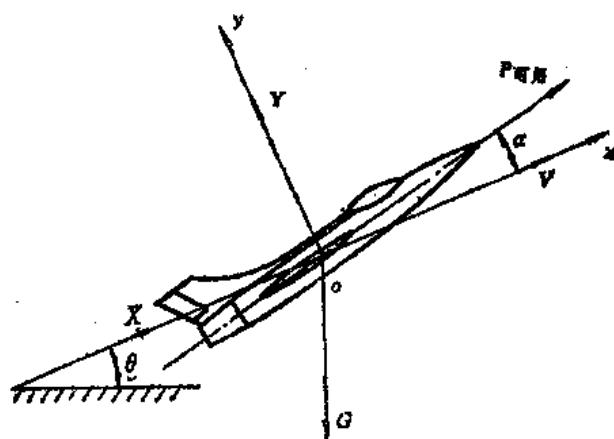


图 9-8

为了建立运动方程,取通过飞机质心的动坐标系 $oxyz$ 。其中, ox 轴沿飞行速度方向; oy 轴与 ox 轴垂直并指向座舱方向,而且始终在包含 ox 轴的铅垂平面内; oz 轴垂直于 oxy 平面指向右机翼(在图9-8中指向读者)。

设飞行航迹与地面的夹角为 θ (航迹倾角)。我们规定,上升时 θ 为正,下滑时为 θ 负。发动机推力线假定与飞机的机翼弦向一致,飞机的迎角为 α 。由于是等速运动, $dV/dt=0$;由于是直线飞行, $\frac{d\theta}{dt}=0$ 。所以,按牛顿第二定律 $\vec{F}=m\vec{a}$,在 x 轴和 y 轴上的力的平衡表达式为:

$$\begin{cases} F_x = P_{\text{可用}} \cos \alpha - X - G \sin \theta = 0 \\ F_y = Y + P_{\text{可用}} \sin \alpha - G \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (9-1)$$

为简单起见,略去 P 的脚注“可用”,并将上式移项,写成为

$$\begin{cases} P \cos \alpha = X + G \sin \theta \\ Y + P \sin \alpha = G \cos \theta \end{cases} \quad (9-2)$$

通常,飞机飞行的 θ 和 α 不大, P 比 G 也不大,故可近似地认为 $P \sin \alpha \approx 0$, $\cos \alpha \approx 1$, $\cos \theta \approx 1$,则上式可简化成

$$\begin{cases} P = X + G \sin \theta \\ Y = G \end{cases} \quad (9-3)$$

它近似地描述飞机的等速直线运动情况,形式较式(9-2)简单,便于工程计算。

当飞机作等速直线水平飞行时, $\theta=0$,则上式就变成

$$\begin{cases} P = X \\ Y = G \end{cases} \quad (9-4)$$

这一式子表明,在飞机作等速直线水平飞行时,升力恰与重力平衡;推力恰与阻力平衡。当飞行高度一定,在一定的迎角下,要使 $Y=G$ 的条件满足,必须使飞机具有一定的飞行速度。而飞机在这一状态下飞行时所产生的阻力 X ,则用发动机推力 P 来平衡。所以,在等速直线平飞状态,对应一定高度和一定速度,就需要一定的发动机推力。

2. 等速直线平飞时的需用推力曲线

飞机在一定的高度上以不同的飞行速度进行等速直线平飞时所需要的发动机推力,称为平飞需用推力,用 $P_{\text{平需}}$ 表示。显然 $P_{\text{平需}} = X = C_x \frac{1}{2} \rho V^2 S$ 。

当高度一定时,平飞需用推力 $P_{\text{平需}}$ 随飞行速度 V 变化的曲线叫平飞需用推力曲线。

根据等速平飞条件

$$\begin{cases} P_{\text{平需}} = X = C_x \frac{1}{2} \rho V^2 S \\ G = Y = C_y \frac{1}{2} \rho V^2 S \end{cases}$$

两式相除可得平飞需用推力为

$$P_{\text{平需}} = \frac{G}{K} \quad (9-5)$$

当给出了一架具体飞机的极曲线以后,我们就可用(9-5)式按下述步骤来计算每一给定高度上的平飞需用推力 $P_{\text{平需}} = f(V)$ 或 $P_{\text{平需}} = f(M)$ 曲线。

(1) 当高度一定时, 空气密度 ρ 可由标准大气表查得;

(2) 对于给定的速度 V (或 M 数), 可以由 $C_y = \frac{2G}{\rho V^2 S}$ 算出对应的 C_y 值;

(3) 根据 C_y 和 M 数由极曲线查出 C_x , 并算出升阻比 $K = \frac{C_y}{C_x}$;

(4) 按(9-5)式算出 $P_{\text{平需}}$ 。

最后, 将计算结果绘成曲线, 如图 9-9 所示。

在图 9-9 中, 还给出了迎角 α 的变化趋势。可以看出, 在一定的高度 H 之下, 随着平飞速度增加, 平飞迎角 α 是逐渐降低的。反之, 迎角 α 则逐渐增加。

通常, 要对不同的给定高度重复上述计算, 从而得出不同高度上的需用推力曲线。图 9-10 即为某机不同高度的平飞需用推力曲线。

3. 平飞需用推力曲线的分析

由极曲线的表达式

$$C_x = C_{x0} + AC_y^2$$

平飞需用推力可写成

$$P_{\text{平需}} = X_0 + X_1 = C_{x0} \frac{1}{2} \rho V^2 S + AC_y^2 \frac{1}{2} \rho V^2 S \quad (9-6)$$

式中 $X_0 = C_{x0} \frac{1}{2} \rho V^2 S$

$$X_1 = AC_y^2 \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

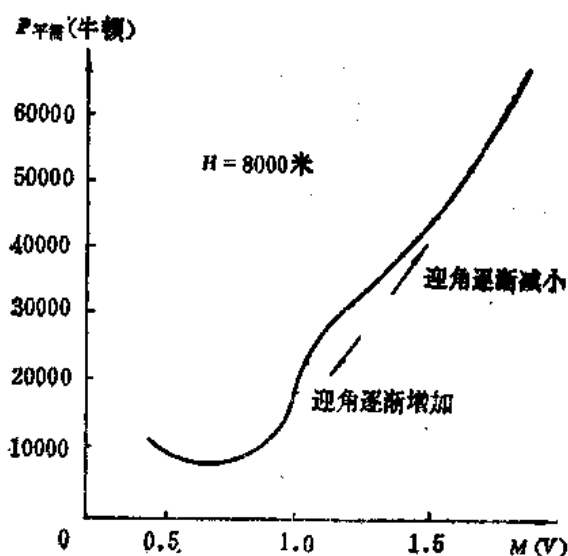


图 9-9

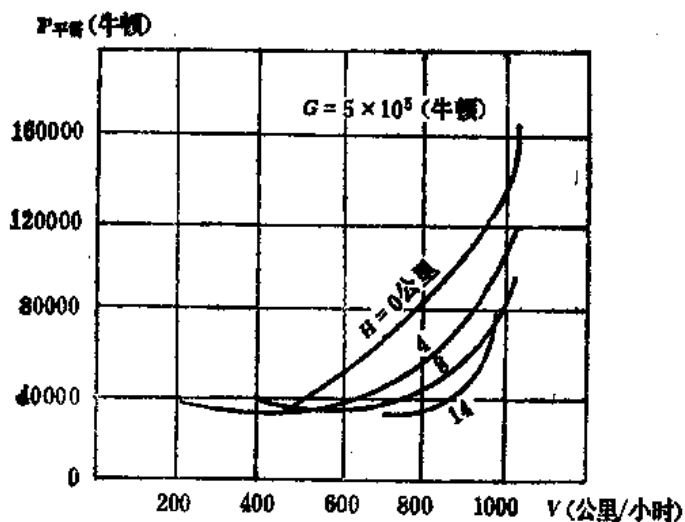


图 9-10

X_0 表示与升力无关的气动阻力, 称为零升阻力; X_1 表示由升力而引起的气动阻力, 称为升致阻力。

而平飞需用推力则是零升阻力和升致阻力之和。注意到等速平飞时 $C_v = \frac{2G}{\rho V^2 S}$, 所以, (9-6) 式可写成

$$P_{\text{平需}} = C_{x0} \frac{1}{2} \rho V^2 S + \frac{AG^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \quad (9-7)$$

$$P_{\text{平需}} = K_1 C_{x0} M^2 + K_2 \frac{A}{M^3} \quad (9-8)$$

式中 $K_1 = \frac{\rho a^2 S}{2}; \quad K_2 = \frac{2G^2}{\rho a^2 S}$

对于给定的飞机, K_1 、 K_2 仅是飞行高度 $H(\rho)$ 的函数。由 (9-8) 式可见, 平飞需用推力 $P_{\text{平需}}$ 除直接同飞行 M 数有关外, 还同零升阻力系数 C_{x0} 及系数 A 随飞行 M 数的变化规律有关。所以, 在不同的飞行速度范围及不同的高度范围, 平飞需用推力曲线随飞行速度及高度变化规律也不相同, 见图 9-11 所示。

由图示曲线可见, $P_{\text{平需}}$ 有一最小值, 且由式 (9-5) 可见, 当飞行重量一定时, $P_{\text{平需 min}}$ 一定与 K_{max} 相对应, 即

$$P_{\text{平需 min}} = \frac{G}{K_{\text{max}}}$$

由图 9-11 的曲线我们还可看出, 在 $P_{\text{平需 min}}$ 亦即 K_{max} 状态下, 恰好 $X_0 = X_1$, 亦即 $C_{x0} = C_{x1}$ 。以后, 我们称与 K_{max} 状态相对应的 C_v 为 $C_{v \text{ 有利}}$, 相对应的速度为 $V_{\text{有利}}$ ($M_{\text{有利}}$)。

飞行高度升高时, 空气密度下降。对应于同一 C_v 值, 要保持平飞, 则平飞速度要增大。所以平飞需用推力曲线随高度的升高向右移, 见图 9-10 所示。

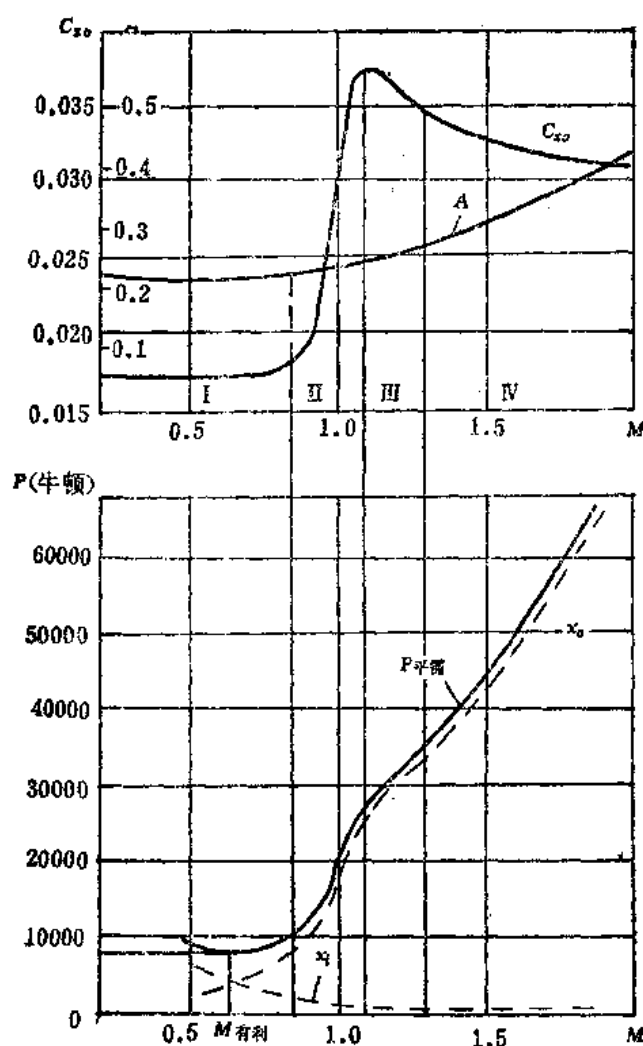


图 9-11

三、确定飞机基本飞行性能的简单推力法

上一节已建立了飞机等速直线运动的近似方程式 (9-3)

$$\begin{cases} P = X + G \sin \theta \\ Y = G \end{cases}$$

当我们给定飞行状态 H, V 时, 由 (9-3) 式的第二式可求得 $C_D = \frac{2G}{\rho S V^2}$ 。然后利用极曲线, 由 $M = \frac{V}{a}$ 可查得 C_x , 从而算出 $X = C_x \frac{1}{2} \rho V^2 S$ 。当给定发动机工作状态, 即转速 n 时,

则由给定的 H, V, n 查发动机曲线可得出 $P_{可用}$ 。将 $X, P_{可用}$ 代入 (9-3) 的第一式, 即可求得 θ 。以上, 就是从近似方程 (9-3) 出发求解飞机基本性能的思路。由于这种求解过程, 是直接利用了飞机极曲线和发动机特性曲线, 而没有采用极曲线和发动机特性曲线的解析表达式, 所以这种求解方法称为图解分析法。

1. 简单推力法

由近似方程 (9-3) 式出发, 利用图解分析法, 确定飞机的基本飞行性能, 就称为简单推力法。用 $P_{平需}$ 来表示的式 (9-3) 为

$$\begin{cases} P_{可用} = P_{平需} + G \sin \theta \\ Y = G \end{cases} \quad (9-9)$$

从 (9-9) 式可以看到, 只有在可用推力 $P_{可用}$ 恰与平飞需用推力 $P_{平需}$ 平衡时才能保持平飞, 即 $\theta = 0$; 而当可用推力 $P_{可用}$ 大于平飞需用推力 $P_{平需}$ 时, 飞机将上升, 即 $\theta > 0$; 反之, 飞机将下滑, 即 $\theta < 0$ 。可见, 飞机基本飞行性能的一些指标是与可用推力及平飞需用推力紧密相关。

2. 简单推力法确定飞机的平飞性能

确定飞机的平飞性能时, 把不同高度上的平飞需用推力曲线和相应飞行高度上的满油门状态下的可用推力曲线用同一坐标绘制在一张图上, 该图称为推力曲线图。如图9-12所示。

通常飞机所受的重力可用平均值来表示, 即 $G_{平均} = \frac{1}{2}(m_0 + m_1)g$, m_0 为起飞质量, m_1 为降落质量。飞机的平飞性能主要包括最大平飞速度、最小平飞速度、平飞速度范围等。

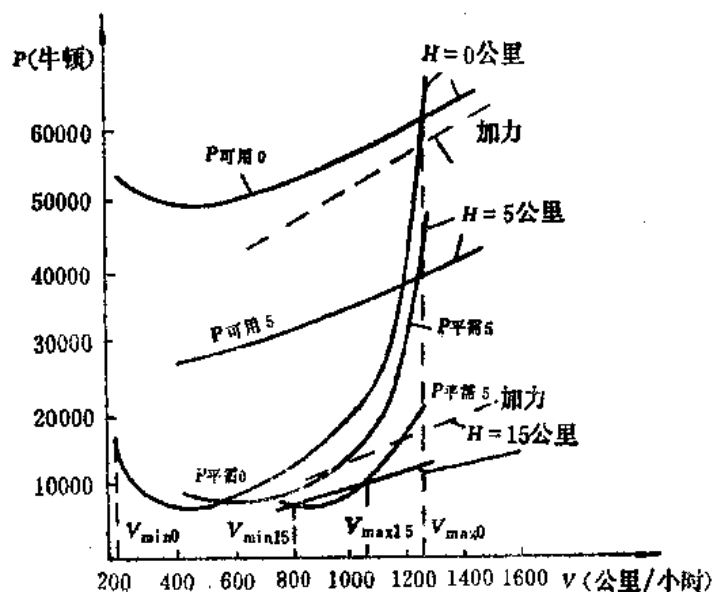


图 9-12

根据推力曲线图可确定下述平飞性能:

(1) 最大平飞速度 V_{max} 从推力曲线图可以看出, 某高度的最大平飞速度 V_{max} 应由该高度的可用及需用推力曲线的最右交点确定。此时, $P_{平需} = P_{可用满}$ 。

所以

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2P_{可用满}}{C_D \rho S}} \quad (9-10)$$

通过上式可以定性分析影响 V_{max} 的因素。

找出不同高度的 V_{max} , 就可以绘制 V_{max} 随高度 H 的变化曲线, 如图 9-13 所示。

(2) 最小平飞速度 V_{min}

根据 $Y = G$, 可得到

$$V = \sqrt{\frac{2G}{C_y \rho S}}$$

由此可见, 对一定飞行高度 H (ρ 一定), 当 $C_y = C_{y_{max}}$ (相当于 $\alpha = \alpha_{临}$) 时, 平飞速度最小。

实际上, 由于空气分离现象在 $\alpha < \alpha_{临}$ 时就开始出现。当迎角 α 到达某 $\alpha_{抖}$ 时, 飞机发生抖动现象。为飞行安全, 一般不希望 $\alpha > \alpha_{抖}$ 的情况下飞行。所以上面对应 $C_{y_{max}}$ 的最小

平飞速度只具有理论意义。所以实际上最小平飞速度应由飞行安全条件所允许的升力系数 $C_{y_{安全}}$ 来确定, 称为允许最小平飞速度。

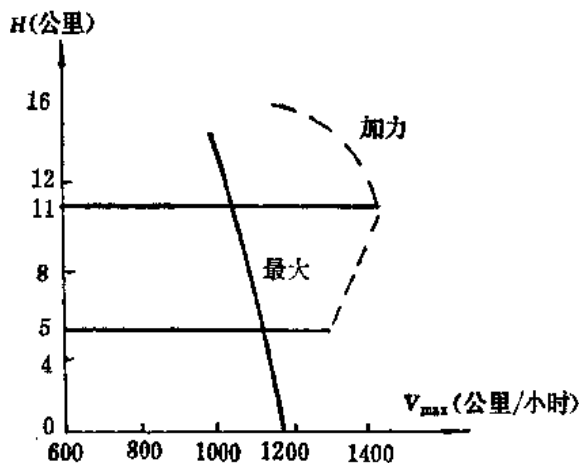


图 9-13

$$V_{min(允)} = \sqrt{\frac{2G}{\rho S C_{y_{安全}}}} \quad (9-11)$$

按飞行条件确定 $C_{y_{安全}}$ 约为 $(0.7-0.9)C_{y_{max}}$, 具体数据根据飞行试验结果确定。显然 $V_{min(允)} > V_{min}$ 。

在推力曲线图上, 若两曲线最左边有交点, 图 9-14, 且交点处速度小于该高度由 $C_{y_{安全}}$ 对应的 $V_{min(允)}$, 则仍应以 $V_{min(允)}$ 作为该高度的最小平飞速度。如果大于 $V_{min(允)}$, 则应取两条推力曲线交点对应的速度为 V_{min} 。

找出不同高度的 V_{min} 后, 就可绘制 V_{min} 随高度变化的曲线图 9-15。

飞机的起降性能与飞机的最小速度有关, 因为 V_{min} 值愈小, 飞机起飞着陆时所需跑道也愈短。对于空投运输机, V_{min} 愈

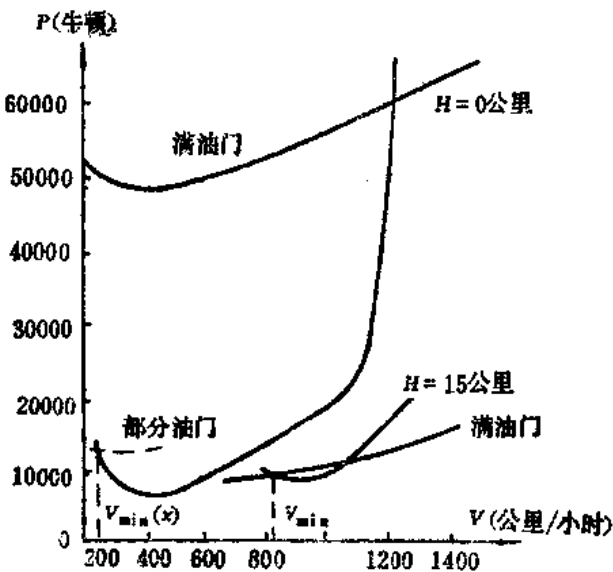


图 9-14

小就愈能使空投物质和伞兵的散布面积愈小。

从(9-11)式可分析影响 $V_{\min}$ 值的因素。

(3) 飞行范围 由飞机可以进行定常直线平飞的速度和高度所勾划出来的范围, 就是飞机作定常运动的范围。飞行范围可由 $V_{\max}-H$ 和 $V_{\min}-H$ 曲线定出, 如图 9-16。飞行范围的边界称为速度包线。

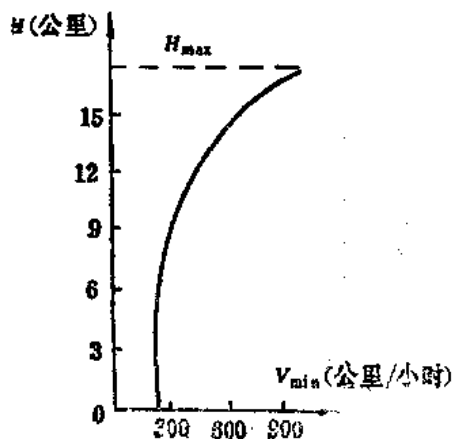


图 9-15

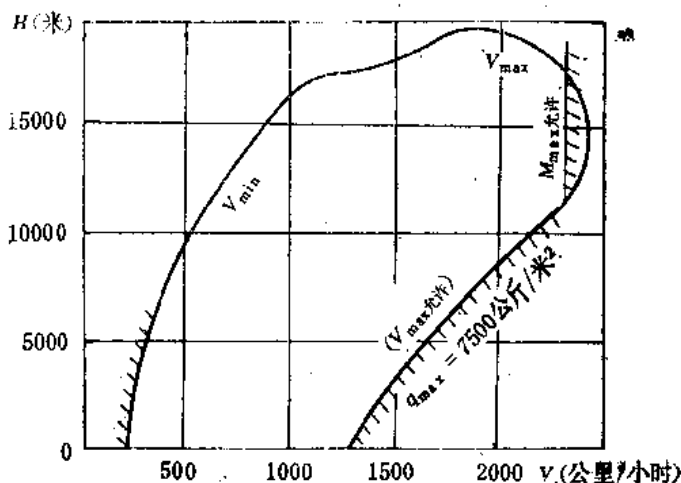


图 9-16

在飞机设计中, 根据飞机结构强度设计规定, 飞行中的动压 $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ 不得大于容许的最大动压 $q_{\max}$; 根据飞机操纵性、稳定性及气动加热等方面的考虑, 飞行 M 数不得大于容许的 $M_{\max}$ 。

$q_{\max}$ 限制的允许速度值

$$V_{\max \text{ 允许}} = \sqrt{\frac{2q_{\max}}{\rho}} \quad (9-12)$$

图 9-16 示出某机规定 $q_{\max} = 7500$ 公斤/米², 速压 q 和空气密度 ρ 、飞行速度 V 有关。在飞行速度相同情况下, 低空的速压比高空要大, 所以速压限制主要是限制了低空的 $V_{\max}$ 。高度较高时受 $M_{\max}$ 的限制。

3. 简单推力法确定飞机的上升性能

飞机的上升飞行与平飞不同的是航迹与地面有一个倾角 θ 。发动机推力 $P_{\text{可用}}$ 不单用来克服直线运动中的阻力 X , 还要克服飞机所受的重力在航迹方向的分量 $G \sin \theta$ 。利用简单推力法确定上升性能时, 如前所述, 可将直线运动时的阻力 X 用同一高度同一速度下的平飞需用推力 $P_{\text{平需}}$ 代替。确定上升性能时, 一般需用满油门时的可用推力 $P_{\text{可用满}}$ 。

由式 (9-9) 的第一式可得

$$P_{\text{可用}} - P_{\text{平需}} = G \sin \theta \quad (9-13)$$

所以

$$\sin \theta = \frac{P_{\text{可用}} - P_{\text{平需}}}{G} = \frac{\Delta P}{G} \quad (9-14)$$

ΔP 称为剩余推力。根据 (9-13) 式可以确定每一个速度 V 下的瞬时上升性能。

(1) 航迹倾角 θ 及最大航迹倾角 $\theta_{\max}$ 由 (9-14) 式可知,

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\Delta P}{G}$$

显然, $\theta_{\max}$ 对应于 $\Delta P_{\max}$, 相应的速度用 $V_{\theta \max}$ 来表示。 $\Delta P_{\max}$ 可直接从推力曲线图上由比较大而得出。 $V_{\theta \max}$ 称为最陡上升速度, 见图 9-17。

(2) 最大上升率 $V_{y \max}$ 和最快上升速度 飞机上升时, 每秒钟升高的高度叫上升率, 以 V_y (米/秒) 表示。上升率越大, 飞机上升到预定的高度所需的时间就越短, 是目前机动格斗中的一项重要的飞行性能。

由图 9-18 可见

$$V_y = V \sin \theta = \frac{dH}{dt} \quad (9-15)$$

而 $\sin \theta = \frac{\Delta P}{G}$

所以

$$V_y = \frac{V \Delta P}{G} \quad (9-16)$$

把推力曲线图上的每一速度下得到的 ΔP 代入 (9-16) 式就可求得该速度下的瞬时上升率 V_y 。与 $(\Delta PV)_{\max}$ 相对应的 V_y 就是 $V_{y \max}$, 此时的飞行速度用 $V_{\text{快升}}$ 表示。通常 $V_{\text{快升}} > V_{\theta \max}$ (或 $V_{\text{有利}}$)。见图 9-17 及图 9-19。

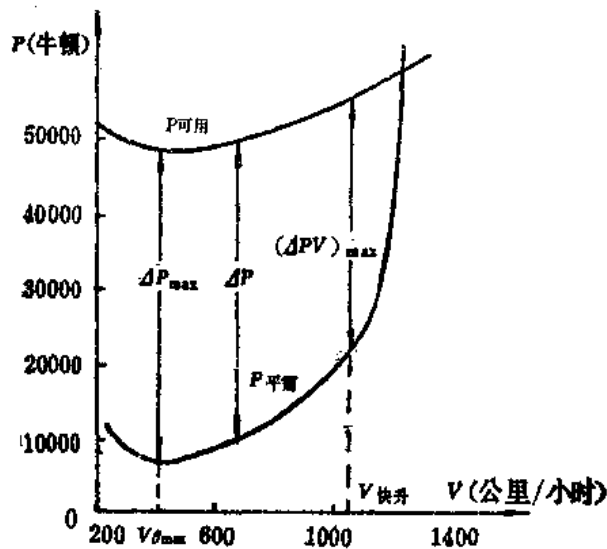


图 9-17

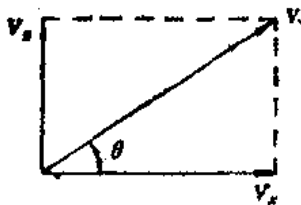


图 9-18

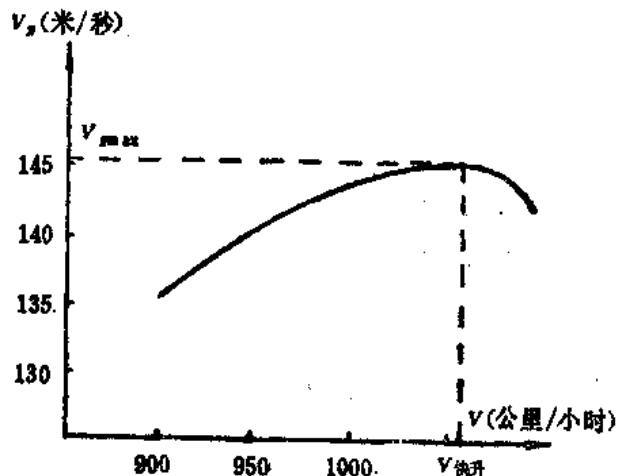
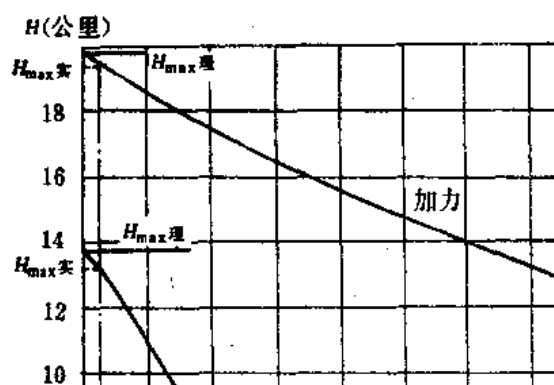


图 9-19

(3) 理论静升限 $H_{\max \text{理}}$ 与实用升限 $H_{\max \text{实}}$ 如果我们绘制 $V_{y \max}$ 随高度变化的曲线, 如图 9-20 所示, 则可以看出 $V_{y \max}$ 随高度增加而减少, 最后趋向于零。 $V_{y \max} = 0$ 所对应的高度就称为理论静升限 $H_{\max \text{理}}$ 。在该高度下发动机的可用推力只能使飞机在某一速度下维持平飞。偏离该速度飞行时, 飞机不能维持定常飞行。这样确定的升限称为理论静升限的理

由是愈接近此一高度，飞机的 $V_{y\max}$ 愈小，因而上升单位高度所需时间愈长，最后达此一高度的时间将趋向于无限大。所以利用近似于定常直线上升办法达不到这一高度。实用上，对高速飞机常规定 $V_{y\max} = 5$ 米/秒时所对应的高度称为实用升限 $H_{\max\text{实}}$ 。

(4) 飞机上升到某一高度的时间 实用中需要知道如何最迅速地上升到某一高度。显然，若在上升过程中按实际高度相应



可把 $\frac{1}{V_{y\max}}-H$ 曲线分成若干线段, 每段近似为直线分别求出梯形面积 (如 $abcd$ 中, 视 bc 为直线), 再按比例换算时间 t 。

这里所确定的最短上升时间 $t_{\min}$ 是在认为快升速度 $V_{\text{快升}}$ 随飞行高度变化不大, 即在近似定常假设的前提下确定的最短上升时间。

(5) 飞机上升到一定高度所经过的水平距离 L

由图 9-18 可知, 飞机上升的水平分速是 $V_x = V \cos \theta$ 。根据 $V_y = dH/dt$ 的关系, 可得 $dt = dH/V_y$, 于是, 以 V_y 上升所经过的水平距离 L 可由下式确定:

$$L = \int_0^t V_x dt = \int_0^t V \cos \theta dt = \int_0^{H_n} V \cos \theta \frac{dH}{V_y}$$

最后写成

$$L = \int_0^{H_n} \cot \theta \cdot dH \quad (9-18)$$

与确定上升所需的时间 t 相类似, 可按 (9-18) 式用图解积分确定 L 。

四、飞机的气动参数、构造参数和使用条件对基本飞行性能的影响

在飞机设计中, 为满足战术技术要求, 往往会反复改变飞机的气动参数和构造参数, 以便选择尽可能合理的气动布局和构造方案。气动布局和构造方案的任何变化都会对基本飞行性能产生不同程度的影响。另外, 对于一架正式投入使用的飞机, 实际装载量、外挂物以及大气条件等都会随时发生变化。因此研究各种使用条件下基本飞行性能的变化是很有实际意义的。

飞机的气动参数、构造参数和使用条件的变化, 归根结底都会对飞机的平飞需用推力 $P_{\text{平需}}$ 或对发动机可用推力 $P_{\text{可用}}$ 产生影响, 因此讨论上述诸因素对推力曲线的影响, 就能了解其对主要飞行性能的影响。根据 (9-7) 式

$$P_{\text{平需}} = C_{x0} \frac{1}{2} \rho V^2 S + \frac{AG^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

或

$$P_{\text{平需}} = C_{x0} \frac{1}{2} \rho V^2 S + \frac{A(mg)^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

可见主要影响平飞需用推力的是零升力阻系数 C_{x0} 和系数 A 这两个气动参数和飞机质量 m 以及机翼面积 S 这两个构造参数。

可用推力 $P_{\text{可用}}$ 受发动机实际工作的大气条件影响, 尤其是受大气温度 (TK) 的影响更为明显。本节不予讨论。

为了讨论的方便, 在研究每一气动参数 (对构造参数也一样) 的改变时认为其余参数都不变。

1. 气动参数变化的影响

零升阻力系数 C_{x0} 对平飞需用推力 $P_{\text{平需}}$ 的影响随飞行速度的增大而增大, 而系数 A 则相反, 飞行速度愈低其对平飞需用推力 $P_{\text{平需}}$ 的影响愈大如图 9-22 所示。

由图 9-22 可见, 零升阻力系数 C_{x0} 的变化主要影响最大平飞速度 $V_{\max}$; 而系数 A 的变化将主要影响速度较低时的上升性能, 有可能对最大上升率 $V_{y\max}$ 产生影响。

在飞机设计中, 为了提高飞机的最大平飞速度, 在跨音速范围时减小零升阻力系数 C_{x0}

是很关键的措施。高速飞机采用大后掠、薄机翼而又尽可能光滑的气动外形其原因也正在这里。如果系数 A 的减少是由增大翼展 l 引起 (因为 $A \approx \frac{K}{\pi l} = \frac{K}{\pi l^2} S$, K 为修正系数, 取决于根梢比 η 、后掠角 χ 以及飞行 M 数), 则通过增大翼展 l 改善飞机的上升性能可提高飞机的静升限。有些高亚音速飞机, 如美国的 U-2 飞机通过采用大翼展而使静升限大大提高。

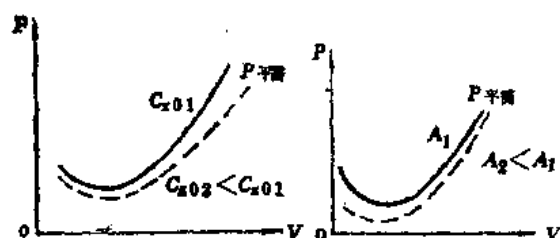


图 9-22

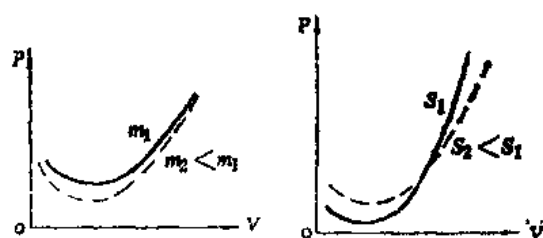


图 9-23

2. 构造参数变化的影响

飞行速度愈低, 飞机质量 m 的变化对平飞需用推力 $P_{平需}$ 的影响愈大, 见图 9-23。因此, 飞机质量 m 的变化对最大平飞速度 V_{max} 影响不大, 而对最小平飞速度 V_{min} 产生较大的影响, 对速度较低时的上升性能的影响尤其显著, 这是因为最大上升率

$$V_{y_{max}} = \frac{(\Delta PV)_{max}}{G} = \frac{(\Delta PV)_{max}}{mg}$$

飞机质量的变化除直接通过分母影响 $V_{y_{max}}$ 外, 还使平飞需用推力发生变化因而剩余推力 ΔP 亦相应变化。因此, 飞机质量 m 的变化对最大上升率 $V_{y_{max}}$ 有双重影响。所以, 在飞机设计中采用合理的构造方案尽可能减小结构重量, 可以使上升性能得以改善, 有利于飞机静升限的提高。因为 $V_{min} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_{y_{max}}}}$, 所以 m 的减小也使 V_{min} 减小。

机翼面积 S 的变化对零升阻力 X_0 和升致阻力 X_i 的影响完全相反, 见式 (9-7) 可知, 减小机翼面积 S 使零升阻力 X_0 下降而使升致阻力 X_i 增加, 如图 9-23 所示。所以减小机翼面积 S 可提高飞机的最大平飞速度 V_{max} , 但因同时 V_{min} 也提高, 这样就使速度较低时的上升性能恶化, 而使速度较高时的上升性能有所改善。

综上所述, 可归纳下述几点:

(1) 提高 V_{max} 的可能措施——首先是加大发动机可用推力。从气动外形方面考虑, 则主要从减少 C_{x0} , S 等方面着手。

(2) 提高亚音速上升性能的可能措施——增加 $P_{可用}$ 满是关键的措施。从气动外形方面考虑, 主要从减轻 G , 加大翼展 l 及减少 C_{x0} 方面着手。

(3) 改善低速性能的可能措施——应从减少质量 m , 增大 S 方面着手。

五、超音速飞机基本飞行性能的特点

超音速飞机的出现是由于飞机气动外形的演变和大推力发动机出现的结果。由于推力曲线图的变化使超音速飞机的基本飞行性能具有某些特点。

图 9-24 中的 (a), (b) 分别给出供某超音速飞机和供某亚音速飞机使用的可用推力曲线。

从图 9-24(a) 可以看出,在超过音速的一定范围内,由于大速度飞行时速度冲压的作用,使可用推力随飞行 M 数的增加而增加。在某一飞行 M 数(M_p)时,可用推力达最大值。飞行 M 数再增加时可用推力又下降。相应于可用推力最大的 M_p 开始随高度增加而增加,而在某一高度以上 M_p 基本上不变。

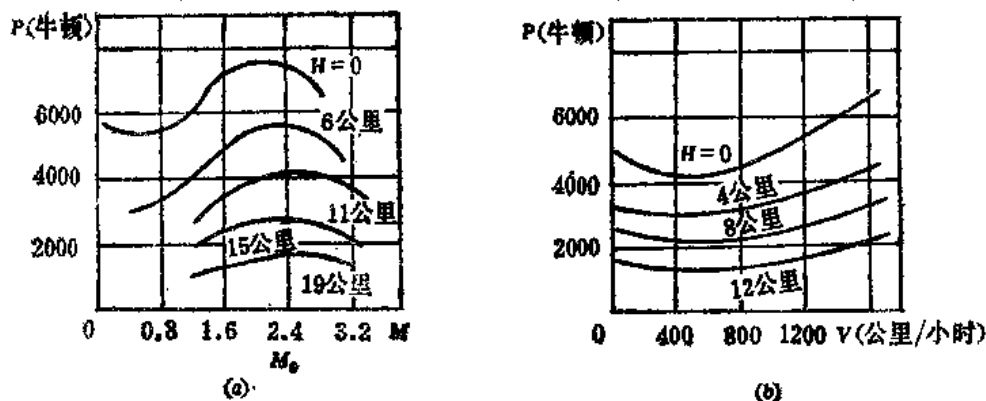


图 9-24

超音速飞机的平飞需用推力曲线已在本章第二节指出那样,在不同的高度范围和速度范围其变化规律是不一样的,见图 9-11 所示。这是由于超音速飞机的阻力特性所决定的

超音速飞机在高空中飞行,可用推力曲线和平飞需用推力曲线有时会出现几个交点。图 9-25 所示在 $H=17$ 公里上有几个交点,其中大于 V 有利的就有 A , B , C 三个。每个交点都对应一个平飞速度。但自 V_A 到 V_B 这一速度范围, $P_{平需} > P_{可用·满}$ 。因此, V_A 是无法通过平飞加速到达 V_B 的。除非利用下滑或使用加速器才能达到 V_B 。从 V_B 到 V_C 这一段, $P_{可用·满} > P_{平需}$, 因此,一旦速度达到 V_B 后,就可以通过平飞加速到达 V_C 。所以, V_A 应是该高度可以通过平飞加速实现的 V_{max} , V_C 则是通过下滑加速可能实现的该高度的 V_{max} 。

值得注意的是 B 点的飞行速度是不稳定的。由于某种原因,增加 ΔV 或减小 ΔV , 则因 $P_{可用·满} > P_{平需}$ 或 $P_{平需} > P_{可用·满}$, 将使飞机加速至 C 点或减速至 A 点。

由于超音速飞机在一定的高度以上,可用推力曲线和需用推力曲线出现几个交点,故超音速飞机的速度范围随高度的变化规律也有其特点。由图 9-25 可见,在某高度以上飞行范围边界出现了“双峰”,即有两个速度范围,一个在跨音速区,一个在超音速区。随飞行高度的增加,由于可用推力降低,这两个速度范围都在缩小。由于小速度飞行时可用推力也较小,故速度较低的飞行速度范围首先消

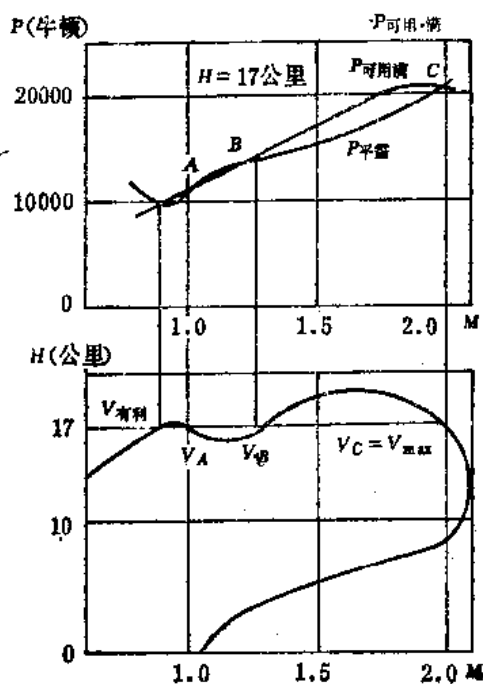


图 9-25

失。而在理论升限附近的飞行高度上，飞机只能在速度较大的超音速范围飞行。

超音速飞机在一定飞行高度上升时，上升率具有两个峰值，一个在超音速范围，一个在跨音速范围。如图 9-26 所示。而相应的 $V_{y\max}-H$ 曲线如图 9-27 所示。

要使超音速飞机上升得最快，就应选择：在低空时以跨音速的 V 快升上升，而在高空则改为以超音速 V 快升上升，由于在上升过程中要改换 V 快升状态，所以应根据具体情况来确定什么时候改换可使上升时间最短。

对跨音速或亚音速飞机来说，静升限大概是在 V 有利状态飞行。而对于超音速飞机来说，静升限大概在 $P_{\text{可用}} \cdot \eta$ 最大值所对应的 M 数—— M_P 状态下飞行。见图 9-28。

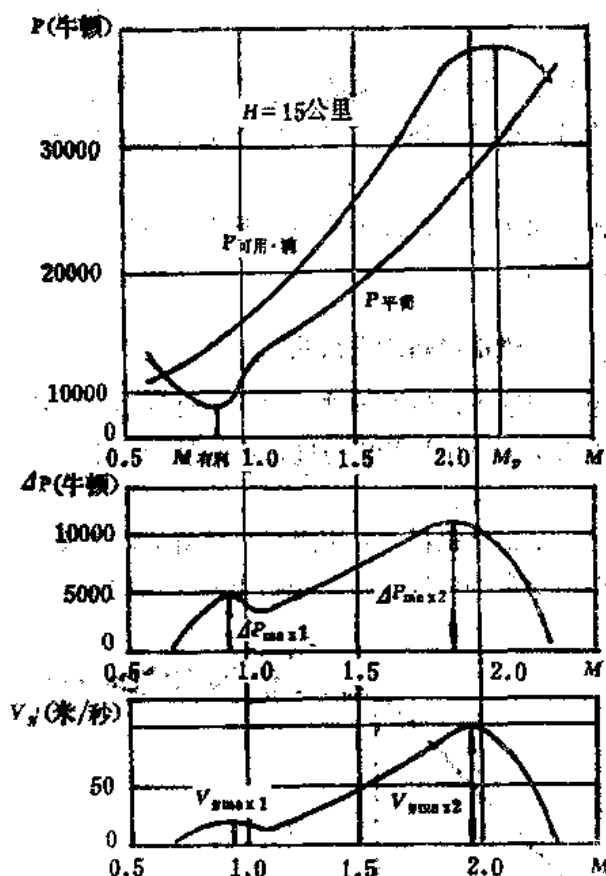


图 9-28

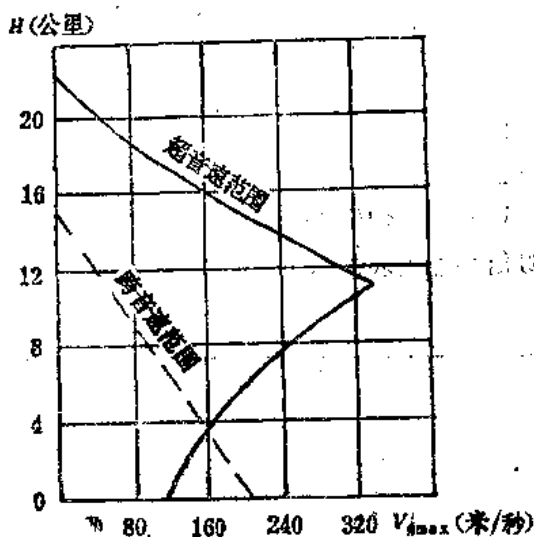


图 9-27

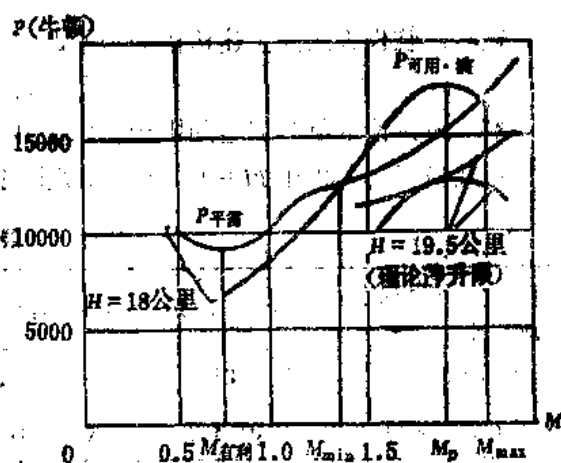


图 9-28

§ 9-2 飞机的续航性能

前一节我们讨论了飞机的基本飞行性能，着重解决飞机能够飞得多快、多高等问题。飞行性能的另一类问题是涉及飞机能够飞得多远多久的问题，即持续航行的性能或简称续航性能。

飞机的续航性能直接牵涉到飞机的活动范围和它持续作战的能力，所以它是飞机性能好坏的基本指标之一。

一、续航性能的基本关系式

作为飞行性能比较的标准，在飞机设计中，对续航性能作如下规定：

航程 L 是指飞机沿给定方向，在平静大气中，耗尽其可用的燃料储备量时，所飞过的水平距离。以公里计。

航时 T 是指飞机耗尽其可用燃料量所能持续飞行的时间。以小时计。

飞机沿给定的航向飞行，包括上升，巡航及下滑等阶段，如图 9-29 所示。

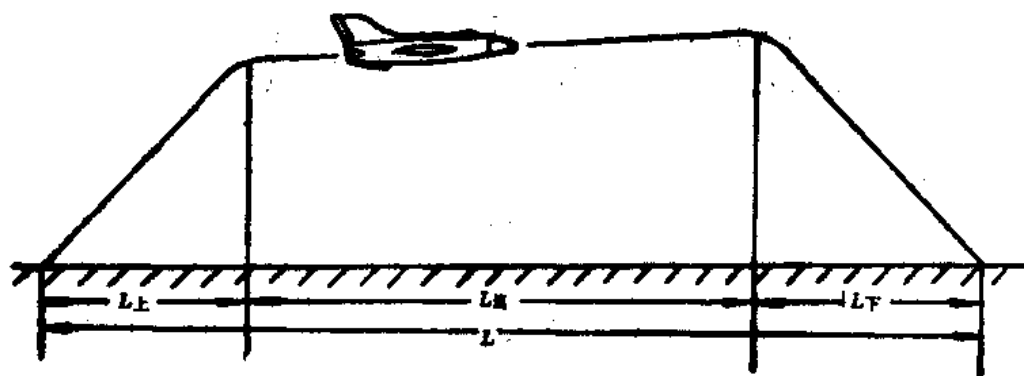


图 9-29

显然，航程 L 应为上述诸段的水平距离之和，即

$$L = L_{\text{上}} + L_{\text{巡}} + L_{\text{下}} \quad (9-19)$$

本节所讨论的航时 T 也局限于在以上几个阶段飞行中所经历的总时间。

如某喷气式飞机在 $H = 11$ 公里高度上飞行的续航性能见表 9-1。

表 9-1

飞行状态 项 目	上 升 段	巡航飞行段	下 滑 段	总 量
航程 L (公里)	67	1307	106	1480
航时 T (小时)	0: 4.7	1: 27	0: 10.4	1: 42.1

由表可知，在沿给定航向的飞行中，巡航段的航程和航时占总量的主要成分。关于上升，下滑段所经历的航时及其所飞过的水平距离的计算方法，第一节已述及。因此，本节研究巡航段的续航性能。

1. 可用燃料量 $m_{\text{可用}}$

通常,飞机上所装的燃料并不能全部为巡航段飞行所用。除了扣除上升、下滑段用油外,还应考虑扣除起飞前发动机地面试车用油、因气象条件变化等安全因素所留的备份油以及油箱的构造原因致使少量燃料不能使用的剩油等等。

$$\text{即 } m_{\text{可用}} = m_{\text{总}} - (m_{\text{备分}} + m_{\text{地}} + m_{\text{剩}} + \dots) \quad (9-20)$$

$$m_{\text{巡}} = m_{\text{可用}} - (m_{\text{上升}} + m_{\text{下滑}}) \quad (9-21)$$

(9-20)式中各项应按照不同的发动机型号,根据不同飞机的使用条件确定。(9-21)式中 $m_{\text{上升}}$, $m_{\text{下滑}}$ 根据具体飞机的上升、下滑方案算出或参照类似型号飞机近似估算。

例如某超音速歼击机总燃料量 $m_{\text{总}} = 2192$ 千克,而 $m_{\text{地}} = 110$ 千克, $m_{\text{剩}} = 30$ 千克, $m_{\text{备分}} = 153$ 千克和 $m_{\text{小航线飞行}} = 140$ 千克,则可用燃料量为

$$m_{\text{可用}} = 2192 - (110 + 140 + 30 + 153) = 1759 \text{ 千克}$$

飞机上升到巡航高度时,消耗燃料量 $m_{\text{上升}} = 200$ 千克;从巡航高度下滑到地面,消耗燃料量 $m_{\text{下滑}} = 70$ 千克。故用于巡航段的可用燃料量为

$$m_{\text{巡}} = 1759 - (200 + 70) = 1489 \text{ 千克}$$

2. 燃料消耗量

发动机的耗油量可以用公里耗油量 q_K 及小时耗油量 q_h 表示。

小时耗油量 q_h 表示飞机每飞1小时,发动机工作所消耗的燃油质量。其单位是[千克(燃油)/小时]。在一定的可用燃油量下, q_h 越小,则对应的续航时间就越长。

而发动机的耗油率是以单位燃料消耗率 $q_{N,h}$ 来表示的。它的单位是[千克(燃油)/牛顿(推力)小时],表示每牛顿推力每小时所消耗的燃油质量(千克)。

如果飞机在巡航时的需用推力是 $P_{\text{巡}}$,那么小时耗油量可表示为:

$$q_h = q_{N,h} P_{\text{巡}} \quad (9-22)$$

公里耗油量 q_K 表示飞机每飞过一公里距离时,发动机工作所消耗的燃油质量,其单位是[千克(燃油)/公里]。

如果飞机以巡航速度 $V_{\text{巡}}$ [公里/小时]飞行,则

$$q_K = \frac{q_h}{V_{\text{巡}}} = q_{N,h} \frac{P_{\text{巡}}}{V_{\text{巡}}} \quad (9-23)$$

由 q_h 与 q_K 的表示式可以看出,耗油量的大小取决于发动机耗油率 $q_{N,h}$,也取决于飞机的外形设计(反映在 $P_{\text{巡}}$ 的大小上)以及飞机的飞行状态。关于发动机的耗油率 $q_{N,h}$ 与发动机工作状态及飞行高度、速度的关系在后面介绍。

3. 续航性能的计算公式

飞机在巡航飞行过程中,随着燃料的消耗飞机质量不断减小,即使保持飞行速度及高度不变,飞机迎角也要随质量变化而变化。一般情况下,飞行速度和高度也可能变化。但是,由于变化缓慢,故在计算巡航飞行的航程和航时时,认为每一时刻都可以利用等速平飞的运动方程式,有 $X = P_{\text{巡}}$, $Y = G$ 。于是将 q_h 及 q_K 表示成:

$$q_h = q_{N,h} P_{\text{巡}} = \frac{q_{N,h} G}{K} \quad (9-24)$$

$$q_K = \frac{q_h}{V} = \frac{q_{N,h} G}{VK} \quad (9-25)$$

如果飞行过程中 q_h , q_k 是常数, 则已知 $m_{巡}$ 后, 航程 $L_{巡}$ 、航时 $T_{巡}$ 可由下式决定:

$$L_{巡} = \frac{m_{巡}}{q_k} \quad (9-26)$$

$$T_{巡} = \frac{m_{巡}}{q_h} \quad (9-27)$$

由上式可见, 当 $m_{巡}$ 一定, 如 q_k 、 q_h 越小, 则 $L_{巡}$ 、 $T_{巡}$ 越大。但由于 q_h 及 q_k 随飞机质量及飞行状态而变, 所以, 通常不能用上面的公式来确定巡航飞行段的航程及航时。

下面就介绍确定航程、航时的一般计算公式。

设某瞬时 t , 小时耗油量为 q_h , 则 dt 时间内消耗油量为 $dm_{油} = q_h dt$, 飞行质量减轻 $-dm$ 。显然 $dm = -dm_{油}$ 。

于是可得微分关系式:

$$dm = -dm_{油} = -q_h dt$$

或

$$dt = -\frac{dm}{q_h}$$

如果飞机在巡航飞行开始的质量为 m_1 , 飞行终了时的质量为 m_2 , 则飞机巡航可用燃油量 $m_{巡}$ 就是这两个质量之差:

$$m_{巡} = m_1 - m_2$$

飞机消耗巡航可用油量的续航时间为

$$T = -\int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{q_h} = \int_{m_2}^{m_1} \frac{dm}{q_h} = \int_{m_2}^{m_1} \frac{K}{q_{N,h} mg} dm \quad (9-28)$$

类似地

$$dm = -dm_{油} = -q_k \cdot dL$$

于是可得

$$L_{巡} = -\int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{q_k} = \int_{m_2}^{m_1} \frac{dm}{q_k} = \int_{m_2}^{m_1} \frac{KV}{q_{N,h} mg} dm \quad (9-29)$$

式中 K , $q_{N,h}$, V 都与巡航阶段所选取的飞行状态(高度 H , 速度 V , 发动机转速 n)有关。所以, 对于确定的飞机, 为了取得最好续航性能, 必须恰当地选取飞行状态, 以实现最佳续航性能。不过, 有时飞机的飞行状态是由飞行任务所规定的, 例如侦察机按预定的高度、速度执行任务; 歼击机按轰炸机的巡航高度、速度执行护航任务等等。因此, 有关航程和航时的计算可有多种情况。

二、续航性能计算

(1) 给定高度和速度时, 飞机续航性能的计算

为了确定飞机的续航性能, 就要找到 V , K , $q_{N,h}$ 随 m 变化关系, 然后积分(9-28)、(9-29)式即可。由于这些参数的变化规律很复杂, 一般不容易用简单的函数表达, 故实际确定续航性能时多用图解积分法。

进行计算的原始数据有:

飞机极曲线, 发动机特性曲线, 即可用推力 $P_{可用} = P(HVn)$ 图线和耗油特性曲线 $q_{N,h} = q_{N,h}(HVn)$; 见图9-30; 国际标准大气表和飞机结构参数质量 m 、机翼面积 S 等。

具体计算步骤如下:

(1) 将飞行质量由 m_1 到 m_2 分为若干区间, 对每一区间取平均质量, 若飞机起飞时的质量为 m_0 , 燃料装载量小于 35~40% m_0 , 则可在整个巡航段取飞机平均质量

$$m_{\text{平均}} = m_0 - \frac{m_{\text{巡}}}{2};$$

(2) 查标准大气表得出对应 H 下的大气密度 ρ 和音速 a , 并计算 $M = V/a$;

(3) 按 $mg = C_y \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S$ 确定每一个 m 值下的 C_y ;

(4) 查飞机极曲线, 确定与 C_y 和 M 数相对应的 C_x , 并计算 $K = C_x/C_y$;

(5) 计算平飞需用推力 $P_{\text{平需}} = \frac{mg}{K}$;

(6) 由发动机特性曲线, 查出对应 H, V, P 值下的转速 n 和在此 H, V, n 值下, 由发动机耗油特性曲线查出单位耗油率 $q_{N \cdot h}$, 见图 9-30;

(7) 计算每一 m 值下的 $KV/q_{N \cdot h}mg$ 及 $K/q_{N \cdot h}mg$, 并绘制 $KV/q_{N \cdot h}mg - m$ 及 $K/q_{N \cdot h}mg - m$ 曲线如图 9-31;

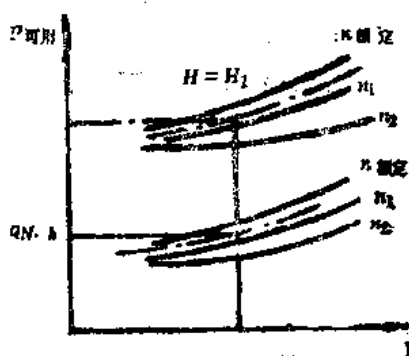


图 9-30

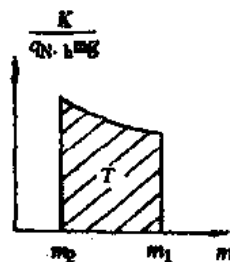
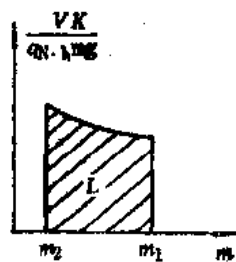


图 9-31

(8) 按比例近似估算曲线所围的阴影线面积, 即是所求的巡航段航程 L 和巡航段航时 T 。

从以上计算过程可见, 当飞行高度 H 、飞行速度 V 给定后对应每一飞行质量 m 都有相应 C_y (或迎角 α) 和转速 n (即油门位置)。因此, 在这种情况下作巡航飞行时, 随着燃料的消耗, 驾驶员要不断调节油门和迎角以保持作用在飞机上外力的平衡。实际上严格保持定高度、等速直线飞行是比较困难的。我们还可以看到, 对于确定的飞机, 当 H, V 这两个运动参数规定后, 根据外力平衡条件, 进而确定此时的航程 L 和航时 T 。就是说, 在计算喷气式飞机的续航性能时, 预先规定的运动参数不能多于两个。很显然, 这样得出来的航程、航时不一定是最大。由于上述参数确定后, 飞行状态不是处于气动效率最高, 发动机油门也不是处在省油的位置, 如果不预先规定巡航运动参数, 则可以通过合理选择运动参数以获得最好的续航性能。

2. 最佳续航性能的飞行状态

前面已经提到: 飞机的续航性能在一定的可用燃油量下, 则取决于耗油量 $q_{N \cdot h}$ 的大小, 而 $q_{N \cdot h}$ 与发动机的单位耗油率 $q_{N \cdot h}$ 有关, $q_{N \cdot h}$ 又随飞行状态及发动机转速而变。所以在讨论怎样状态下飞行能得到最大航程和最大续航时间时, 必须先讨论飞行状态对 $q_{N \cdot h}$ 的影

响。但对各种常用的巡航飞行状态而言, $q_{N \cdot h}$ 的变化不大, 因此在初步的分析中, 可以近似假设 $q_{N \cdot h}$ 为常数。

在给定的可用燃油量下, 要求续航时间 T 最长, 就要求小时耗油量 q_h 最小, 而

$$q_h = q_{N \cdot h} P = q_{N \cdot h} \frac{G}{K}$$

由此可见, 最长续航时间所对应的飞行状态应该是最小需用推力状态, 也就是最大升阻比状态, 见图 9-32。

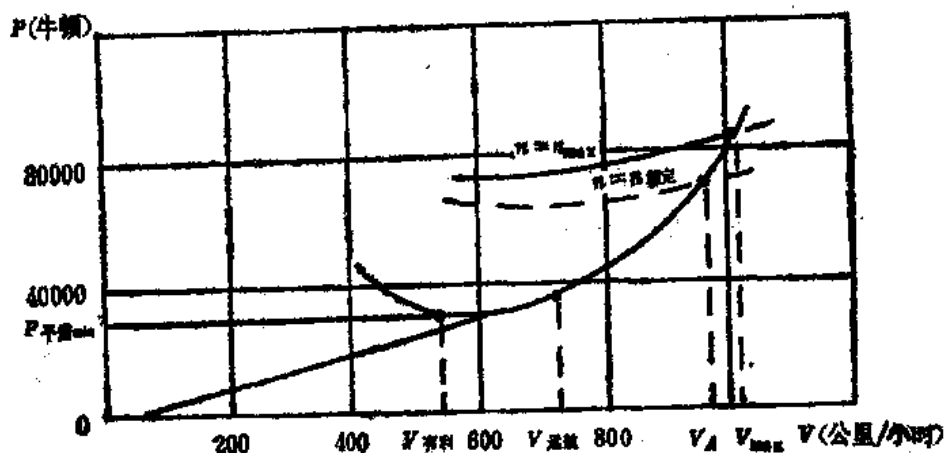


图 9-32

对应的飞行速度 $V_{\text{有利}}$ 可由需用推力曲线上 $(P_{\text{平需}})_{\min}$ 点查到, 见图 9-32。飞行高度愈高, 需用推力曲线向右移, 则对应 $T_{\max}$ 的飞行速度也增加 (见图 9-10)。

在给定的可用燃油量下要求航程最大, 就要求公里耗油量最小, 而 $q_k = q_{N \cdot h} P/V$ 。由此可见, 航程最长所对应的飞行状态应该是需用推力曲线图上 $(P_{\text{平需}}/V)_{\min}$ 的那一点, 对应的飞行速度为 $V_{\text{远航}}$ (大于 $V_{\text{有利}}$), 见图 9-32 所示。因 $KV/G = KM_a/G = 1/(P_{\text{平需}}/V)$, 所以飞机在最大航程与 $(P_{\text{平需}}/V)_{\min}$ 相对应, 亦即与 $(KM)_{\max}$ 相对应。当飞行 M 数大于 $M_{\text{临}}$ 后, 由于波阻产生, $K_{\max}$ 急剧下降, 故 $(KM)_{\max}$ 值多半在 $M_{\text{临}}$ 附近得到, 也就是说最大航程所对应的飞行 M 数在 $M_{\text{临}}$ 附近 (超音速飞机除外)。

当飞机以不同高度巡航飞行时, 平飞需用推力曲线将随高度不同发生变化, $(P_{\text{平需}})_{\min}$, $(P_{\text{平需}}/V)_{\min}$ 值和相应的 $V_{\text{有利}}$, $V_{\text{远航}}$ 也随之变化, 因此航程和航时也就不同。通过对不同高度下得出的结果进行分析比较, 最终可选得某一飞行高度, 飞机以该高度上的 $V_{\text{有利}}$ 和 $V_{\text{远航}}$ 巡航飞行时, 其对应的航程和航时为最大。

考虑单位耗油率 $q_{N \cdot h}$ 变化的影响。

我们首先来讨论一下发动机耗油特性曲线, 即 $q_{N \cdot h}$ 随 n , H , V 变化的规律。

在飞行高度和飞行速度一定时, 涡轮喷气发动机的单位耗油率 $q_{N \cdot h}$ 随发动机转速 n 变化的关系曲线称为耗油率的转速特性曲线, 见图 9-33(c)。

发动机以额定转速工作时耗油率最小。其它状态下, 耗油率都要大。在额定转速附近, $q_{N \cdot h}$ 变化不大。

在发动机转速和飞行速度一定时, $q_{N \cdot A}$ 随飞行高度变化的曲线称为耗油率的高度特性曲线(图9-33(b))。

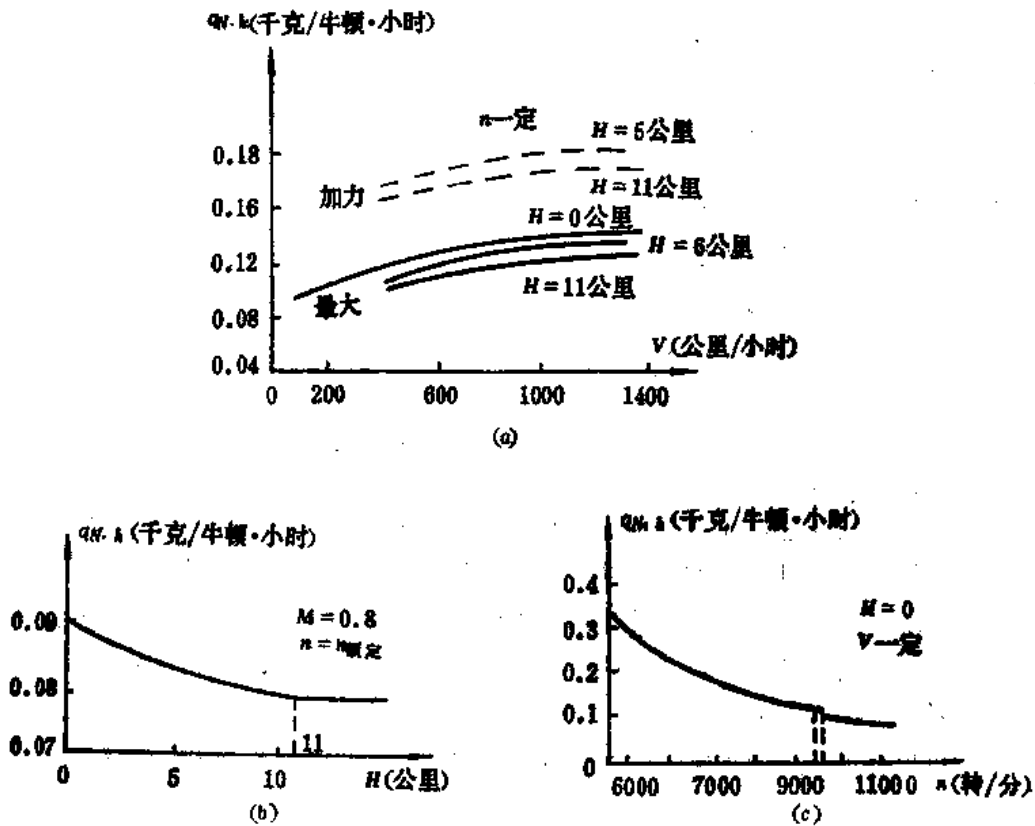


图 9-33

$q_{N \cdot A}$ 随高度增加而降低。但高度超过 11 公里后, 就不再减小了。

在转速和飞行高度一定时, $q_{N \cdot A}$ 随飞行速度变化的曲线称为耗油率的速度特性曲线。飞行速度增大, 则耗油率增大。(见图 9-33(a))。

现在分别来分析, 当飞行高度增加时, 由于发动机转速 n 、高度 H 、飞行速度 V 的相应变化对 $q_{N \cdot A}$ 变化的影响。

由推力曲线图 9-35 可见, 随高度增大, 曲线向右移, 而 $P_{\text{需min}}$ 值基本不变。可用推力则随高度增大而下降。

飞机在接近地面以 $V_{\text{有利}}$ 飞行时, 必须大大降低发动机转速(见图 9-34), 结果 $q_{N \cdot A}$ 值很大(见图 9-33(c))。随着高度的增加, 发动机转速愈来愈接近额定转速(见图 9-35), 使得 $q_{N \cdot A}$ 值降低。在升限附近, 发动机以额定转速运转时 $q_{N \cdot A}$ 值最小。其次, 随高度的增加, $q_{N \cdot A}$ 值也略有下

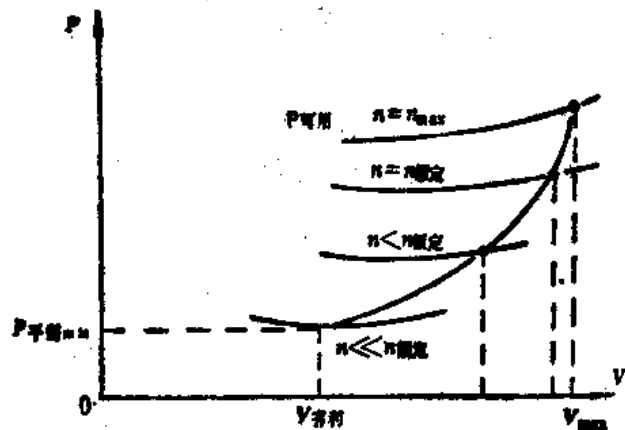


图 9-34

降(见图 9-33)。再次,随高度的增加,按前面的分析, T_{max} 和 L_{max} 所对应的飞行速度 $V_{有利}$ 和 $V_{远航}$ 也有所增加(见图 9-35),又使 $q_{N\cdot h}$ 稍有增大。

然而,这三个因素的影响,第一个因素发动机转速 n 是主要的,因此,随着飞行高度的增加,影响 $q_{N\cdot h}$ 的结果是降低的。由此可见, T_{max} 和 L_{max} 的飞行状态是在接近升限高度上获得的。

同时还要指出,因考虑到 $q_{N\cdot h}$ 变化的影响,实际上最大航程 L_{max} 所对应的飞行速度应略大于图 9-32 中 $V_{远航}$ 之值,而小于图中的 V_A 之值。

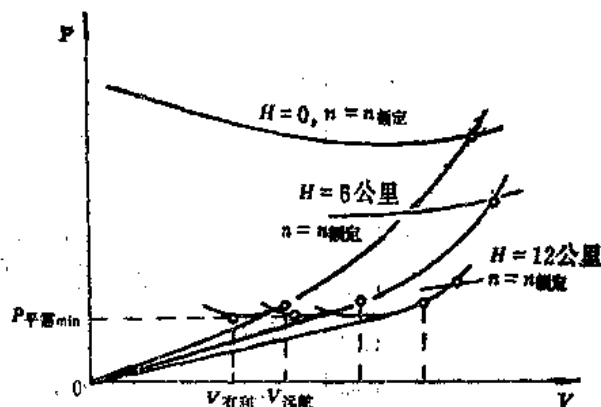


图 9-35

因为以 $V_{远航}$ 飞行时 $(P_{需}/V)$ 最小,但由于这时需要大大减小发动机转速,所以 $q_{N\cdot h}$ 很大,如果增大发动机转速,则 $q_{N\cdot h}$ 减小。但同时飞行速度增大, $P_{需}$ 增大,而 $(P_{需}/V)$ 也增大,这时飞行速度改变对 $q_{N\cdot h}$ 也有影响,即飞行速度增大使 $q_{N\cdot h}$ 也增大,但这个影响比发动机转速对 $q_{N\cdot h}$ 的影响小。当发动机以额定转速工作时, $q_{N\cdot h}$ 最小,但这时 $(P_{需}/V)$ 很大。

由以上分析,我们可以得到一个结论:在 $(P_{需}/V)_{min}$ 的飞行速度 $V_{远航}$ 与 $q_{N\cdot h min}$ 所对应的飞行速度(图 9-32 上的 V_A)之间,有一个飞行速度使 $(q_{N\cdot h} P_{需}/N)$ 最小,也就是使 q_K 最小。

这个飞行速度稍大于巡航速度,叫做公里耗油量最小的速度 $V_{qK min}$,以这个速度飞行,航程最大。

飞行实践表明,喷气式飞机的最大航程和最久航时是在实用升限附近飞行时得到。

三、超音速飞机续航性能的特点

超音速喷气式飞机的续航性能与跨音速喷气式飞机大体相同,但在远航速度方面具有一些特点。

一般情况下,喷气式飞机通常只有一个远航速度,大约出现在临界 M 数附近,而对某些具有后掠翼的超音速飞机,在超过某一高度后,会出现两个远航速度。较小一个称跨音速远航速度,相应的 M 数常小于 1 或稍小于 1;较大的一个称为超音速远航速度,相应的 M 数都大于 1。

上述情况的产生,是由于在高空飞行时,某些超音速飞机的需用推力曲线出现了转折点,见图 9-36。当超过某一 M 数后,需用推力随 M 数增加缓慢,因而出现了两个 $(P/M)_{min}$ 。

由(9-23)式可知

$$q_K = \frac{q_{N\cdot h} P}{V} = \frac{q_{N\cdot h} P}{M} \cdot \frac{1}{a}$$

故随着 (P/M) 两个最小值的出现, q_K 也出现两个最小值,即有两个远航速度点,一个在跨音速区,另一个在超音速区。

将不同高度的 $(q_K)_{min}$ 取出画在 $H-(q_K)_{min}$ 图上,则得图 9-37。由图可见,当 $H < H^*$ 时,以跨音速远航对应的 $(q_K)_{min}$ 值较小;当 $H > H^*$ 时,则以超音速远航对应的 $(q_K)_{min}$ 值

较小。所以，对此种超音速飞机，要增大巡航航程，在某高度以下以跨音速远航速度飞行，当超过该高度后，应采用超音速远航速度飞行。这个高度按具体飞机确定。

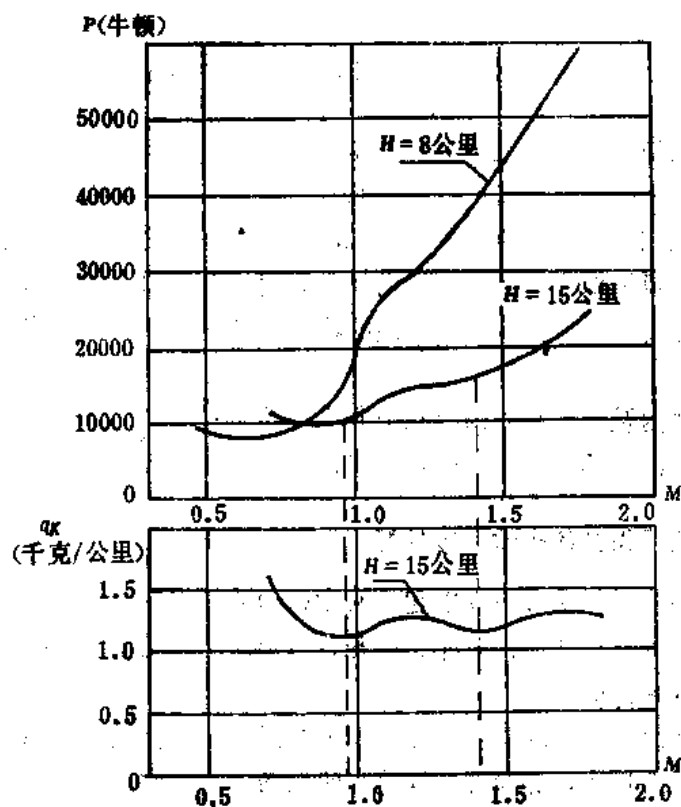


图 9-36

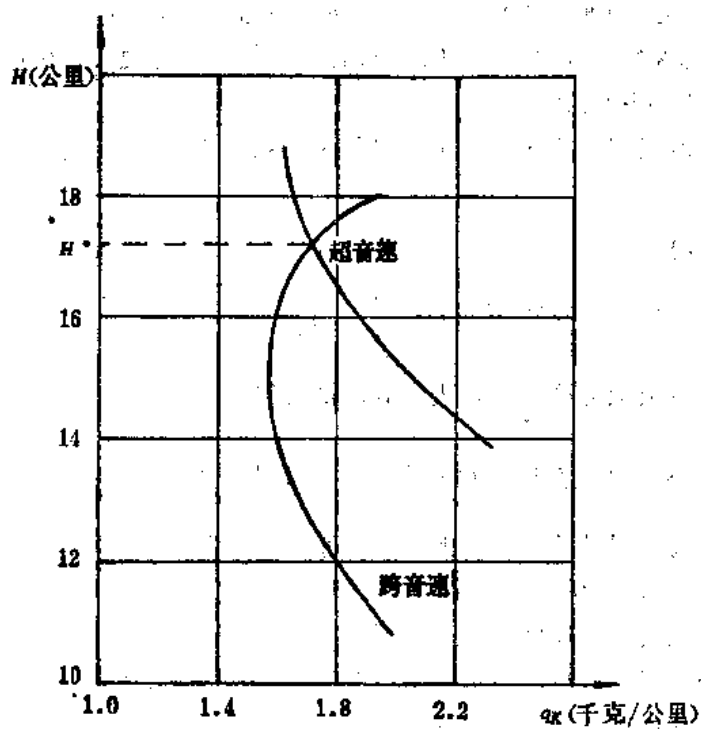


图 9-37

但应指出,实际巡航飞行时,巡航速度不应只片面地根据航程大小来选择,而应考虑作战任务的需要来确定。

§ 9-3 飞机的机动飞行性能

飞机的机动性就是飞机改变飞行状态(速度、高度及飞行方向)的能力。飞行状态可以改变的范围越大,以及改变飞行状态所需要的时间越短,飞机的机动性能就越好。

飞机的机动性是飞机的又一重要性能指标,尤其在当前的空战格斗中更显得重要。

飞机的机动性一般可划分为:速度机动性、高度机动性和方向机动性,分别反映了飞机改变速度、高度和方向的能力。从运动航迹的特点来划分又分成:垂直平面内、水平平面内及空间机动飞行。

本节就垂直平面内及水平平面内的几个典型机动飞行情况,介绍机动飞行性能;讨论影响机动飞行的诸因素;介绍超音速飞机机动飞行性能的一些特点。

一、飞机在垂直平面内的机动飞行性能

飞机在垂直平面内的机动飞行性能包括速度机动性能(平飞加速或减速性能);同时改变速度、高度的典型的飞行动作:俯冲、跃升、以及筋斗,见图 9-38。

1. 平飞加、减速性能

平飞加、减速突出了飞机改变飞行速度大小的能力。现代喷气式飞机的最大速度不断提高,平飞速度范围日益扩大,加减速的幅度也随之增大,因此,对飞机的速度机动性能就提出了更高的要求。

一般采用 $0.7V_{\max}$ 加速到 $0.97V_{\max}$ 的时间作为加速性指标,有时也有用快升速度 $V_{\text{快升}}$ 或远航速度 $V_{\text{远航}}$ 加速到 $0.95V_{\max}$ 或 $0.99V_{\max}$ 的时间作为加速性指标;采用由 $V_{\max}$ 减速到 $0.7V_{\max}$ 的时间作为减速性指标。

实现平飞加、减速飞行要保持平飞条件 $Y=G$, 因此飞机平飞加减速飞行时的运动方程为

$$\begin{cases} Y=G \\ m \frac{dV}{dt} = P - X = \Delta P \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} Y=G \\ \frac{G}{g} \frac{dV}{dt} = \Delta P \end{cases} \quad (9-30)$$

显然,飞机的加速度或减速度 $\frac{dV}{dt}$ 取决于剩余推力 $(P-X)$ 的符号,当 $P>X$ 时飞机加速,

当 $P<X$ 时飞机减速。并且在质量 m 一定时,加或减速度 $\frac{dV}{dt}$ 与剩余推力 ΔP 的大小成正比。

飞行员可以通过油门调节发动机推力,使加速飞行中 $\Delta P>0$; 减速飞行中 $\Delta P<0$ 。过去计算飞机上升性能时, ΔP 是用来改变飞机的位能即改变高度的参数,现在 ΔP 则是用来改变飞机的动能即改变飞行速度,加速飞行时驾驶员尽量加大油门,并且随着飞行速度的增大,不断操纵驾驶杆减小迎角,使 $Y=G$ 条件随时得到满足;减速飞行时驾驶员尽量收小油门打开减速装置,并且随着飞行速度减小,不断操纵驾驶杆增大迎角,使 $Y=G$ 随时得到满足。

由(9-30)式可得:

$$dt = \frac{m}{(P-X)} dV \quad (9-31)$$

所以从速度 V_1 加速至 V_2 的飞行时间为:

$$t = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{(P-X)} dV \quad (9-32)$$

而

$$dL = V dt = V \frac{m}{(P-X)} dV$$

所以从速度 V_1 加速至 V_2 的飞行距离为

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \frac{Vm}{(P-X)} dV \quad (9-33)$$

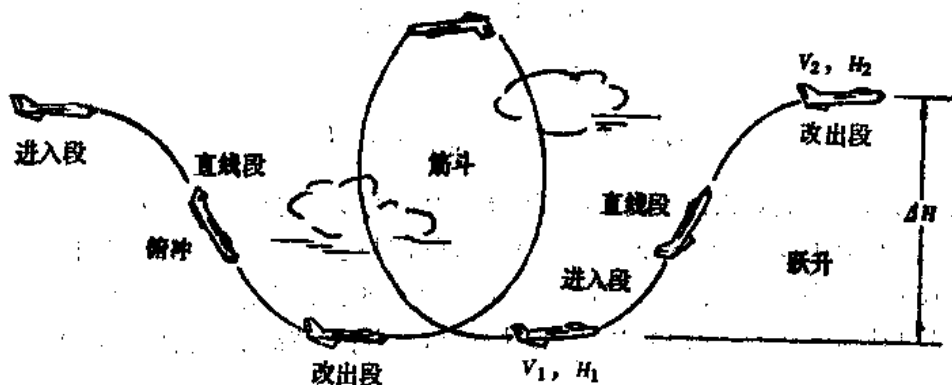


图 9-38

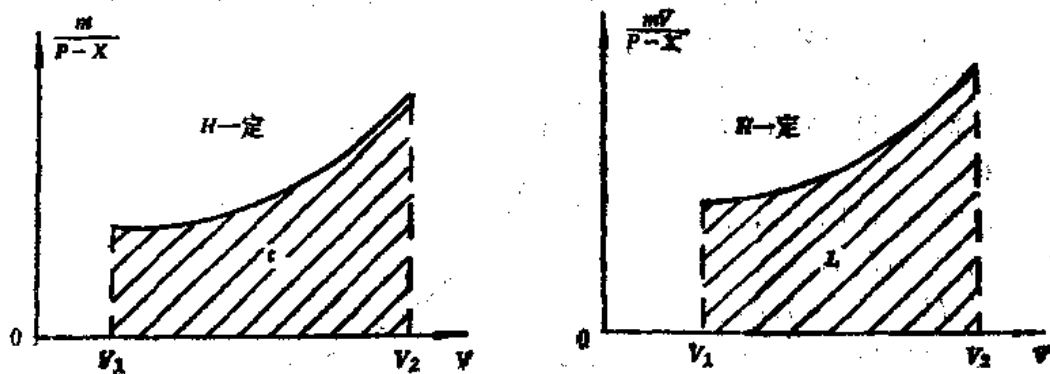


图 9-39

(9-32) 及 (9-33) 式的积分可用图解积分法进行。具体作法是对给定高度 H 作出被积函数 $m/(P-X)$ 及 $mV/(P-X)$ 与 V 的关系曲线, 如图 9-39。此曲线与 $V=V_1$ 和 $V=V_2$ 两直线及横坐标轴所围的面积按比例分别给出自 V_1 改变到 V_2 所需时间 t 及所飞经距离 L 。

俯冲和跃升是同时改变速度、高度的机动飞行。俯冲是将飞机的位能转化为动能的飞行动作; 跃升是将飞机的动能转化为位能的飞行动作。通常, 可将整个跃升、俯冲飞行过程分为进入段、直线段及改出段(图9-38)。筋斗也可看成是由进入跃升段及改出俯冲段等几段所组成。

2. 跃升性能的近似计算(能量法)

跃升性能的好坏由跃升时间和跃升所增加的高度 ΔH 来表示, 跃升时间短, 增加高度 ΔH 大, 则跃升性能就好。

设进入跃升时飞行状态为 (V_1, H_1) , 改出跃升时飞行状态为 (V_2, H_2) , 在跃升过程中假如近似认为 $P = X$, 或认为 $(P - X)$ 的平均作用可以忽略。这样, 飞机跃升过程中, 做功的力主要是飞机的重力 G 。因为发动机推力与阻力互相抵消(或者在跃升过程中推力和阻力做功之和为零), 而升力 Y 与运动航迹垂直, 因此它们不做功。应用能量守恒定律(将飞机近似看成是质点)则有: $E_1 = E_2$ 。其中 E_1, E_2 分别为进入及改出跃升时飞机动能和位能的总和或称为总能量。它在跃升过程中是保持不变的。由于

$$E_1 = \left(H_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right) G$$

$$E_2 = \left(H_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right) G$$

而

$$E_1 = E_2$$

所以

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_2^2) \quad (9-34)$$

由上式可看出: 起始跃升速度 V_1 越大, 跃升改出高度上要求的速度 V_2 越小, 则跃升的高度增量越大。但是 V_1, V_2 的大小要受到飞机本身的特性(气动阻力和发动机推力)以及飞行安全的限制。 V_1 可用的最大速度为 H_1 上的最大平飞速度 $V_{1\max}$; V_2 的允许最小速度取为 H_2 上的抖动速度 $V_{抖}$ 。所以如从 $V_{抖}$ 改出跃升, 可得此情况中最大的高度增量 $\Delta H_{\max}$, 即

$$\Delta H_{\max} = \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_{抖}^2) \quad (9-35)$$

这里的 $V_{抖}$ 决定于待求高度 $(H_1 + \Delta H_{\max})$ 处的密度 ρ 和抖动升力系数 $C_{y抖}$, $C_{y抖}$ 又决定待定的 $V_{抖}$ 所对应的 M 数。图 9-40 为某机的 $C_{y抖}$ 随 M 数变化的曲线。故一般需用逐次近似的办法进行计算:

(1) 先取一估计 $V_{抖}'$, 由 (9-35) 式算出 $\Delta H_{\max}'$

(2) 按 $H_2 = H_1 + \Delta H_{\max}'$ 及 $V_{抖}'$ 可由图 9-40 查得一个 $C_{y抖}'$

(3) 由 H_2 及 $C_{y抖}'$ 按

$$V_{抖} = \sqrt{\frac{2G}{\rho S C_{y抖}}} \quad (9-36)$$

确定一个新的 $V_{抖}''$;

(4) 用 $V_{抖}''$ 重复(1)至(3)步骤, 直到所得的 $V_{抖}$ 变化很小时为止;

(5) 用此 $V_{抖}$ 就可求得最终的 $\Delta H_{\max}$ 。

3. 动升限的概念

结合飞机的跃升, 我们再讨论一下飞机的动升限问题。第一节中谈到在理论升限 $H_{\max理}$

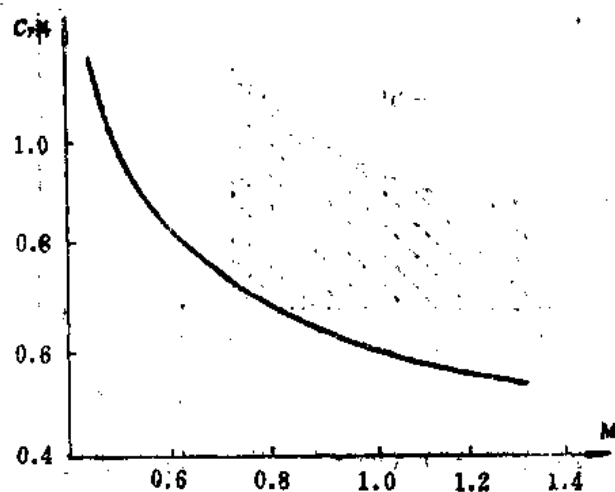


图 9-40

高度处飞机的上升率为零。这是在等速直线飞行条件下得到的。由于飞机在 $H_{\max \text{理}}$ 处平飞的速度往往比 $V_{\text{抖}}$ 大, 一般 $H_{\max \text{理}}$ 处的速度为 $V_{\text{有利}}$, 故还可以利用 $(V_{\text{有利}} - V_{\text{抖}})$ 这一速度裕量所具有的动能, 通过跃升转为位能, 以获得比 $H_{\max \text{理}}$ 更高的飞行高度。飞机通过跃升而达到的最大高度就称为动升限。

在静升限处通过跃升所能达到的高度, 一般低于其动升限。因为静升限处 $(V_{\text{有利}} - V_{\text{抖}})$ 速度裕量较小, 因而由动能转化而得的位能较小。如果在低于 $H_{\max \text{理}}$ 的某高度上从 $V_{\max}$ 开始跃升, 尽管起始高度较低, 但 $(V_{\max} - V_{\text{抖}})$ 速度裕量较大, 由动能转化而得的位能也较大, 结果所能达到的高度反而可以提高。因此获得动升限的进入高度往往较 $H_{\max \text{理}}$ 低。虽然飞机在动升限处不能保持等速平飞状态, 动升限对掌握高度优势来说, 具有一定的实践价值。

4. 机动飞行的过载和驾驶员感觉

飞机在空中飞行时, 作用在飞机上的外力一般有发动机推力、空气动力和重力。如果不计燃料消耗而引起的质量变化, 则作用在飞机上的重力, 可以认为是不随飞行状态的改变而改变的, 即无论飞机在空中做怎么复杂的动作, 作用在飞机上的重力的大小和方向却始终保持不变。但作用在飞机上的其它外力却不然, 随着飞行状态的改变, 它们也要改变, 尤其是在急剧的机动飞行中, 推力和空气动力的大小和方向发生急剧的变化。因此, 为了研究机动飞行中作用在飞机上外力的变化情况, 有必要把重力和其它外力分开来研究, 这样我们引进了过载的概念, 并作如下定义。

除了重力以外, 作用在飞机上的一切外力之和与飞机重量之比称为飞机的过载。如果作用在飞机上的外力只有发动机推力 $\vec{P}$ 、空气动力 $\vec{R}$ 、重力 $\vec{G}$, 则飞机的过载 $\vec{n}$ 等于:

$$\vec{n} = \frac{\vec{P} + \vec{R}}{G} \quad (9-37)$$

注意上式的分子中, 发动机推力和空气动力均为矢量, 而分母 G 为标量, 因此过载 $\vec{n}$ 是一个矢量, 它的方向沿推力及空气动力合力方向。

可以将过载 $\vec{n}$ 写成分量形式。以航迹坐标系为例来说明。例如飞机在垂直平面内作机动飞行 (如图 9-41), 取飞机的质心 O 为原点, 建立航迹坐标系。 OX_h 轴与飞行速度方向一致, OY_h 轴垂直于 OX_h 轴并指向上方, 而且始终在包含 OX_h 轴的铅垂平面内, OZ_h 轴垂直于 $OX_h Y_h$ 平面指向右翼。则空气动力 $\vec{R}$ 可分解为升力 Y 及阻力 X 。将推力 P 、升力 Y 、阻力 X 投影到航迹坐标系的三个坐标轴上并除以 G , 便得到沿航迹坐标系三个轴方向的过载 $(n_x)_h, (n_y)_h, (n_z)_h$ 它们分别等于:

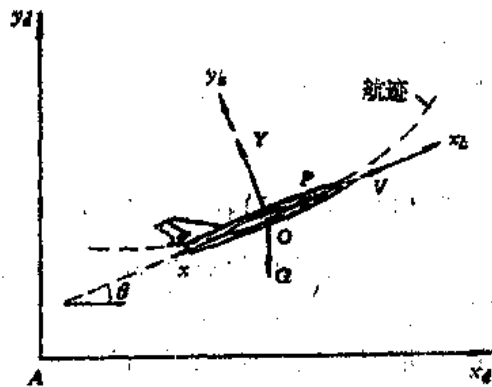


图 9-41

$$\begin{cases} (n_x)_h = \frac{P - X}{G} \\ (n_y)_h = \frac{Y}{G} \\ (n_z)_h = 0 \end{cases} \quad (9-38)$$

飞机作机动飞行时, 驾驶员的感觉与作等速直线飞行时不同。例如飞机以过载 n 作曲线飞行时, 驾驶员会感觉他身上受到一个等于他本身重量 n 倍的作用力。这一点可证明如下。

设飞机在飞行中加速度为 $\vec{a}$, 则由牛顿第二定律

$$\begin{aligned}\frac{G}{g}\vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{G} \\ \vec{a} &= \frac{\vec{P} + \vec{R}}{G}g + \frac{\vec{G}}{G}g = n\vec{g} + \vec{z}g\end{aligned}\quad (9-39)$$

式中 $\vec{z}$ 为单位重力矢量。设驾驶员的体重为 G , 因为驾驶员坐在飞机上, 必与飞机有相同的加速度 $\vec{a}$ 。如果座椅给予驾驶员的反作用力为 $\vec{N}$, 则对于驾驶员来说, 我们有下述运动方程:

$$\begin{aligned}\frac{G_1}{g}\vec{a} &= \vec{N} + \vec{G}_1 \\ \vec{a} &= \frac{\vec{N}}{G}g + \frac{\vec{G}_1}{G_1}g = \frac{\vec{N}}{G}g + \vec{z}g\end{aligned}\quad (9-40)$$

比较(9-39)、(9-40)式, 我们得到

$$\vec{N} = n\vec{G}_1\quad (9-41)$$

上式表明, 当飞机以过载 n 作曲线飞行时, 作用在驾驶员身上的座椅反作用力 $\vec{N}$ 为他本身重量的 n 倍。

飞机以大于 1 的过载 n 作机动飞行时驾驶员感觉到相当于他本身重量 n 倍的压力, 形成“超重”现象, 驾驶员身体各部分受到 n 倍于本身重量的力, 身体变重了。体内的血液由于惯性而向下肢积聚, 时间久了会头晕目眩。当 n 过大或作用时间过长时甚至会失去知觉。一般情况下, 若驾驶员坐的姿势正确, 在 5—10 秒钟内能承受的极限过载为 8, 在 20—30 秒内能承受的过载为 5。

飞机以小于 1, 甚至于负的过载作机动飞行时, 发生“失重”现象, 血液向头部集中, 驾驶员更难以忍受, 因此通常很少在负过载下飞行。为了改善驾驶员的自我感觉情况, 在退出跃升或进入俯冲等情况时, 驾驶员往往可先使飞机倾斜或倒飞(头朝下), 以避免负过载飞行。目前有些飞机还采用可随过载加大改变座椅后倾角度办法来提高驾驶员的抗过载能力。

二、飞机在水平平面内的机动飞行性能

飞机在水平平面内的机动飞行性能着重反映飞机的方向机动性。比较典型的动作是盘旋。通常所说的盘旋是指飞机连续转弯不少于 360° 的飞行。盘旋中, 飞机可以带侧滑, 也可不带侧滑; 飞机速度及盘旋半径可随时间而变, 也可不随时间而变。在各种盘旋情况中, 不带侧滑, 飞行速度及盘旋半径不随时间变化的所谓正常盘旋, 具有一定的代表性。所以, 下面着重讨论正常盘旋。

1. 飞机作正常盘旋时的运动方程式

飞机作正常盘旋时的受力如图 9-42 所示。

为了获得必要的使飞机盘旋的向心力, 飞机作正常盘旋时必须带滚转角, 绕速度矢量的滚转角用 γ 表示。我们沿航迹坐标轴的三个方向列出运动方程

$$\begin{cases} \frac{G}{g} \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha - X \\ \frac{G}{g} \frac{V^2}{R} = (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma_s \\ (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma_s = G \end{cases} \quad (9-42)$$

因为飞行速度保持不变, 所以 $\frac{dV}{dt} = 0$, $P \cos \alpha = X$ 。由于作正常盘旋时迎角 α 不太大, 推力 P 小于重力 G , 因此可以近似认为:

$$P \cos \alpha \approx P \quad P \sin \alpha \approx 0$$

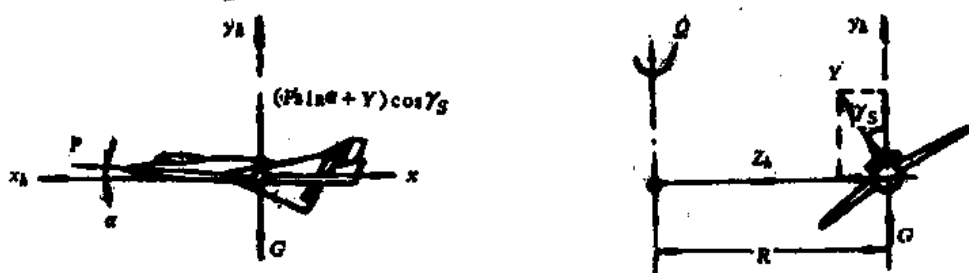


图 9-42

于是 (9-42) 式可简化为

$$\begin{cases} P = X \\ Y \sin \gamma_s = \frac{G}{g} \frac{V^2}{R} = \frac{G}{g} V \Omega \\ Y \cos \gamma_s = G \end{cases} \quad (9-43)$$

式中 Ω 为盘旋角速度。(9-43) 式就是正常盘旋的运动方程式。

2. 盘旋半径 R 与盘旋一周的时间 T

表征正常盘旋的性能指标是盘旋半径 R 及盘旋一周的时间 T 。

盘旋半径 R 可由 (9-43) 式中第二个方程式得到

$$R = \frac{G}{g} \frac{V^2}{Y \sin \gamma_s} = \frac{1}{g} \frac{V^2}{n_y \sin \gamma_s} \quad (9-44)$$

由 (9-43) 式第三个方程得到

$$\frac{Y}{G} = \frac{1}{\cos \gamma_s}$$

所以

$$n_y = \frac{1}{\cos \gamma_s} \quad (9-45)$$

由上式可知当 γ_s 增大时, n_y 也增大。图 9-43 表示 γ_s 与 n_y 的关系。

由 (9-45) 式可得

$$\sin \gamma_s = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_s} = \sqrt{1 - \frac{1}{n_y^2}} = \sqrt{\frac{n_y^2 - 1}{n_y^2}} \quad (9-46)$$

代入 (9-44) 式得盘旋半径为:

$$R = \frac{V^2}{g \sqrt{n_y^2 - 1}} \quad (9-47)$$

盘旋一周的时间 T 应为:

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{V} \frac{V^2}{g\sqrt{n_y^2 - 1}} = \frac{2\pi V}{g\sqrt{n_y^2 - 1}} \quad (9-48)$$

分析 (9-47) 及 (9-48) 式不难看出, 对应同一过载因素 n_y , 飞行速度 V 越大, R 及 T 也越大。若保持同一飞行速度, 则过载因素 n_y 越大, R 及 T 越小。

上面已经说明, 盘旋时 $\gamma_s \neq 0$, γ_s 越大, n_y 也就越大, 所以, 飞机以某一飞行速度进行正常盘旋时, 飞机 γ_s 越大, 则 R 及 T 越小。但 γ_s 不能超过某一值, 因为从飞机强度及人的生理条件考虑 n_y 不能超过某一值。另一方面, 当 n_y 一定时, V 越小, R 及 T 也越小。但 V 的减小也受到一定限制, V 越小则 $C_{y\text{抖}}$ 就越大。前已指出 $C_{y\text{抖}}$ 不能大于 $C_{y\text{抖抖}}$, 所以当 V 减小到使 $C_{y\text{抖}} = C_{y\text{抖抖}}$ 时, 便应停止继续拉杆。此外从 (9-43) 式第

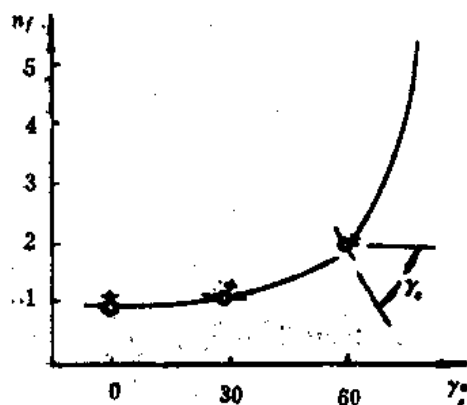


图 9-43

一个方程知 $P_{\text{可用}} = X_{\text{盘}} = P_{\text{盘需}}$ 。对应一定速度, 为了使飞机不掉高度, 盘旋时 ($Y \cos \gamma_s = G$) 的迎角应比平飞时 ($Y = G$) 的迎角大, 因而盘旋时阻力亦比平飞时为大。盘旋需用推力, 可由下式

$$P_{\text{盘需}} = X_{\text{盘}} = \frac{Y_{\text{盘}}}{K} = \frac{G / \cos \gamma_s}{K} = \frac{n_y G}{K} \quad (9-49)$$

确定。其中 K 应根据 $Y = n_y G$ 条件计算。该式说明对应同一 K 值, 盘旋时的需用推力较平飞时大 n_y 倍, 在 $C_{y\text{抖}}$ 相同时, 盘旋速度较平飞速度大 $\sqrt{n_y}$ 倍。为了满足正常盘旋时的等速条件, $P_{\text{可用}}$ 应等于 $P_{\text{盘需}}$ 。如果在某一飞行状态下, $P_{\text{盘需}} > P_{\text{可用}}$, 则不能维持正常盘旋时的等速飞行, 所以 $P_{\text{可用}}$ 又成了正常盘旋中的第三个限制因素。

总结上述讨论可知飞机进行正常盘旋要考虑三种限制因素:

- (1) 从飞机强度或人的生理条件角度所能承受的最大过载因素 $n_{y\text{max}}$ 的限制;
- (2) 从飞行安全角度考虑, $C_{y\text{抖}}$ 的限制;
- (3) 满油门可用推力 $P_{\text{可用·满}}$ 的限制。

3. 盘旋推力曲线图及极限盘旋性能的确定

利用盘旋推力曲线图来确定盘旋性能最为直观。盘旋推力曲线图的绘制与第一节所述方法相同, 只需用 $n_y G$ 代替原来的飞行重量 G 即 $G' = n_y G$, 给 n_y 以不同的值就可得不同过载因素下的盘旋需用推力曲线图 9-44。在该图上绘制同高度的 $P_{\text{可用}}$ 及 $C_{y\text{抖}}$ 或 $\alpha_{\text{抖}}$ 线, 然后, 按上面讲的限制条件用阴影线表示出限制的飞行范围。 $n_y = 1$ 的推力曲线及阴影线所包含的区域 (即 $ABCDEA$ 所组成的封闭曲线), 就是可以实现正常盘旋的范围。习惯上, 把处于曲线 $ABCDE$ 上的飞行状态称为极限盘旋状态, 所对应的盘旋性能称为极限盘旋性能。

利用盘旋推力曲线图, 可以很方便地按 (9-47) 及 (9-48) 式确定极限盘旋性能。例如, 我们计算图 9-44 中点 B 的极限盘旋性能。由图可知该点 $n_y = 3$, $V = 600$ 公里/小时, 所以按 (9-47) 式

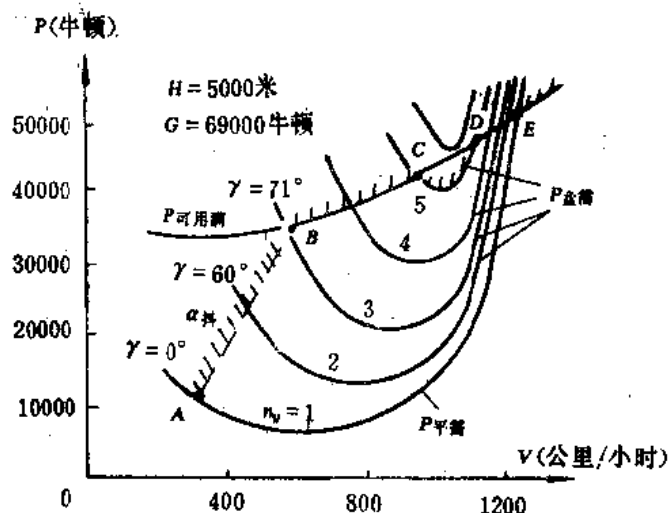


图 9-44

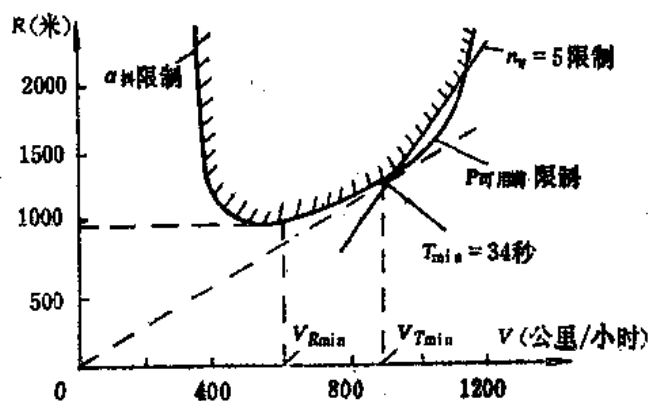


图 9-45

$$R = \frac{1}{g} \frac{V^2}{\sqrt{n_y^2 - 1}} = \frac{1}{9.8} \frac{(600/3.6)^2}{\sqrt{9 - 1}} = 980 \text{ 米}$$

按 (9-48) 式得

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2 \times 3.14 \times 980}{600/3.6} = 37 \text{ 秒}$$

同理，可以计算阴影线上各点的极限盘旋性能。所得结果可绘成极限盘旋性能曲线如图 9-45 所示。由图可见，本情况中 $R_{\min}$ 对应速度 $V = 600$ 公里/小时，而 $T_{\min}$ [与 $(R/V)_{\min}$ 对应] 对应的速度 $V = 900$ 公里/小时。

三、影响机动飞行性能的诸因素

上面我们讨论了飞机的各种机动飞行性能，概括起来，无非是两类问题：一是改变飞行速度的能力；二是改变飞行方向的能力。前者由加速度 dV/dt 表征；后者由向心加速度 V^2/R 表征。显然 $|dV/dt|$ 越大，则速度变化越快，向心加速度越大，则在相同速度下飞行航迹曲率半径越小。

我们知道 $|dV/dt|$ 的大小与 $(P-X)/G$ 有关。要使加速性能好, 应尽量增大 $(P-X)$ 和减小 G 。所以推重比 P/G 大, 气动外形良好 (即 K 大) 的飞机加速性就好。为了进一步改善加速性, 也可使用助推器 (加速火箭)。相反, 要使减速好, 则应尽量减小 $(P-X)$, 这和改善加速性要求是相反的。实际上采用阻力板 (减速板) 人为地使气动外形恶化和尽量减小油门或者用反推力装置, 增加减速度, 以提高减速性能。

为了迅速改变飞机的飞行方向, 应设法提高向心加速度。由 (9-43) 式第二个方程可知,

这主要是靠产生足够大的过载因素 n_y 来实现。根据过载因素 $n_y = \frac{C_y \frac{\rho}{2} V^2 S}{G}$ 的定义, 可以看出: G/S 越小, 高度越低 (ρ 越大); 速度越大; C_y 越大都使 n_y 增加。但如前所述, n_y 的提高要受结构强度及人的生理条件的限制; C_y 的提高要受 $C_{y\text{抖}}$ 的限制; 速度的提高受 $P_{\text{可用}}$ 以及 M_{max} 、 q_{max} 的限制。所以, 提高飞机改变飞行方向的能力, 需要计及这些限制因素的作用, 通过采取相应措施, 例如, 增大推重比 P/G ; 从气动外形特别是机翼设计上考虑增大 $C_{y\text{抖}}$; 驾驶员穿抗荷衣, 并采用特殊的座椅增加驾驶员抗过载因素的能力等等后, 可以改善飞机改变飞行方向的能力。

为了真正能发挥出飞机的机动飞行性能的潜力, 飞机还必须具有适当的操纵机构, 使飞机能迅速改变姿态。这就要求在设计过程中对操纵面的形状, 大小及位置等有全面适当考虑。

最后, 还要求结构刚度允许的 q_{max} 足够大。否则, 在低空大速度飞行时, 由于 q 大, 气动力大, 使操纵面发生扭转弹性变形以至削弱或甚至使操纵作用失效, 无法发挥飞机的性能潜力。

§ 9-4 飞机的起飞和着陆性能

飞机的起飞和降落是实现一次完整的飞行所不可少的两个环节。起降性能的好坏有时甚至影响到飞机能否执行及顺利完成正常飞行任务。所以研究起降性能相当重要。

飞机的起降性能指标可以概括为两部分: 一是起飞降落距离; 二是起飞降落速度。前者直接关系机场的净空面积 (指空间无障碍物的面积)。后者除影响起降距离外, 有时还牵涉到起降的安全问题。过大的机场面积, 无论以经济观点或战略观点考虑都是不适宜的。而飞行的安全问题, 则在任何场合都是必须给予高度重视的。

从飞机性能的发展情况来看, 飞机的飞行性能特别是高速高空飞行的性能有了很大的改进, 但是飞机的起飞着陆性能却是变坏了。近年来发展与设计的垂直/短距起落飞机是试图解决飞行性能与起降性能矛盾的一个途径。

下面我们只讨论一般型式飞机的起飞着陆问题。

一、飞机的起飞过程

现代喷气式飞机的起飞过程分成两个阶段

- (1) 地面加速滑跑阶段;
- (2) 加速上升到安全高度阶段。

起飞时, 飞机在起飞线上, 驾驶员踩住刹车, 加大油门至发动机最大转速状态, 然后和缓地松刹车, 飞机开始加速滑跑。等加速到相当速度时, 驾驶员向后拉驾驶杆抬起前轮, 以主轮着地的两点滑跑姿态继续加速前进。滑跑速度越来越大, 最后到升力等于重量时飞机离地 (此时的速度称为离地速度 $V_{\text{离}}$)。由于喷气式飞机的剩余推力 ΔP 较大, 因此离地后可以立即转入加速上升阶段, 在 10—15 米的高度上将起落架收起, 以减小阻力。飞机上升到一定安全高度 H 后, 加速上升阶段就告结束。

飞机在离地前沿地面滑跑经过的距离称为起飞滑跑长度, 即图 9-46 中的 L_1 。从起飞点至到达安全高度时那一点的水平距离称为起飞距离, 即图 9-46 中的 $L_{\text{起飞}}$ 。安全高度 H 的规定各国不同, 一般是 10 米至 25 米。

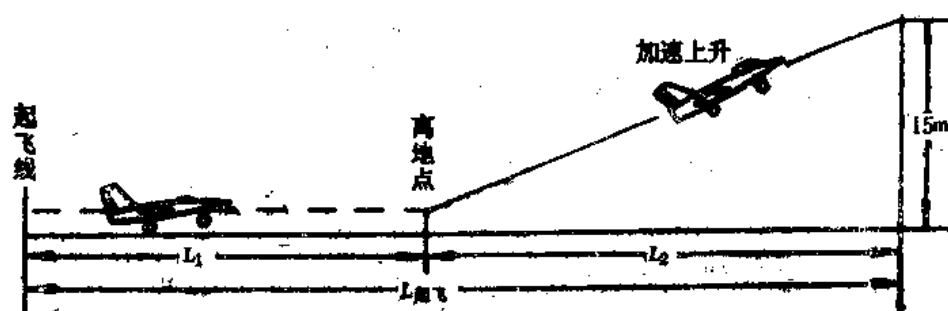


图 9-46

二、飞机的起飞性能计算

1. 起飞滑跑时作用在飞机上的力

地面加速滑跑过程中, 飞机先是三点滑跑, 至 $(0.6-0.75)V_{\text{离}}$ 时, 改成两点滑跑 (即抬起前轮), 一直到离地为止。通常计算时都假定整个滑跑过程是用两点滑跑进行的。此时飞机上所受的力如图 9-47 所示。

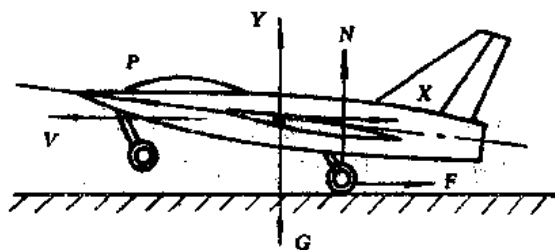


图 9-47

起飞滑跑时作用在飞机上的力除推力 P 、重力 G 、升力 Y 和阻力 X 外, 还有地面垂直反力 N , 机轮与地面摩擦力 F 。

2. 起飞滑跑距离计算

起飞滑跑时, 飞机的运动是水平直线加速运动。假定 P 与地面平行, 可得下列运动方程式:

$$\begin{cases} ma = P - X - F \\ N = G - Y \end{cases} \quad (9-50)$$

式中 $m = G/g$; G 为飞机起飞的重量。

a 为起飞滑跑时的加速度, g 为重力加速度。

机轮与地面的摩擦系数以 f 表示, 而摩擦力等于摩擦系数乘以正压力 N , 即

$$F = fN = f(G - Y)$$

起飞时的加速度可写为:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dL} \frac{dL}{dt} = V \frac{dV}{dL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{dL}$$

则水平力平衡方程可写为

$$\frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dL} = \frac{P}{G} - f - \frac{X - fY}{G}$$

再将阻力与升力用 C_x 、 C_y 表示

$$X - fY = (C_x - fC_y) \frac{\rho V^2}{2} S$$

$$dL = \frac{1}{2g} \left[\frac{P}{G} - f - \frac{S}{G} \frac{\rho V^2}{2} (C_x - fC_y) \right] dV^2$$

飞机从 $V=0$ 增速到 $V=V_{离}$ 所跑过的距离就是起飞滑跑距离:

$$L_{起跑} = \frac{1}{2g} \int_0^{V_{离}^2} \frac{dV^2}{\frac{P}{G} - f - \frac{S}{G} \frac{\rho V^2}{2} (C_x - fC_y)} \quad (9-51)$$

计算上式一般可用图解积分法或数值积分法来解。

发动机推力 P 随速度变化而变化, 这可由喷气发动机的速度特性曲线图上看到。现代飞机的离地速度在 300 公里/小时左右, 在 0—300 公里/小时范围内, 推力 P 变化不大。我们采用平均推力 $P_{平均}$, 它不随速度变化而变化。

机轮与地面滚动摩擦系数 f , 它与跑道的路面质量情况有关。对不同跑道其 f 值不同, 如混凝土跑道可取 $f=0.02$, 硬土跑道 $f=0.05$ 。

在近似分析时, 因 $(C_x - fC_y)$ 值很小, 可以略去这一项, 那末起飞滑跑距离就可写作

$$L_{起跑} \approx \frac{1}{2g} \frac{V_{离}^2}{\frac{P_{平均}}{G} - f_{平均}} \quad (9-52)$$

式中 $P_{平均} = 0.9P_0$, P_0 为发动机地面静推力 (即 $V=0$ 时的推力)。 $f_{平均}$ 可由表 9-2 查出。

飞机离地速度由离地时升力与重量平衡的条件可得

$$V_{离}^2 = \frac{2G}{\rho S C_{y_{离地}}} \quad (9-53)$$

对于前三点式飞机 $C_{y_{离地}}$ 系由飞机护尾迎角 $\alpha_{护}$ 所决定 (图 9-48)。护尾迎角应比护尾包刚触地时的迎角小 $1.5^\circ - 2^\circ$ 。如 $\alpha_{护}$ 所对应的 $C_{y_{护}} > C_{y_{安全}}$, 则 $C_{y_{离地}}$ 应取 $C_{y_{安全}}$ 。为了尽可能地减小 $V_{离}$, 飞机在起飞过程中放襟翼, 此时飞机的极曲线不同于空中飞行时的极曲线: 一是飞机放下起落架及襟翼, 气动外形有了变化; 二是气动特性要受地面干扰的影响。起飞时的极曲线可通过风洞实验或估算得出。图 9-49 给出某型飞机正常飞行及起飞时的极曲线。

例 某飞机起飞时, $m=7800$ 千克, $S=23$ 米², $\rho=1.225$ 千克/米³, $C_{y_{离}}=0.782$, $P_{平均}=29400$ 牛顿, $f_{平均}=0.035$ 。求 $V_{离地}$ 及 L_1 。

由 (9-53) 式即可算出离地速度 $V_{离地}=300$ 公里/小时。

由 (9-52) 式即可算出地面加速滑跑距离 $L_1=1010$ 米。

表 9-2

表 面 状 况	最 小 值 f_{min}	平 均 值 $f_{平均}$
干 水 泥 跑 道	0.02	0.03—0.04
湿 水 泥 跑 道	0.03	0.06
干 硬 土 草 地	0.035	0.07—0.10
湿 草 地	0.06	0.10—0.12

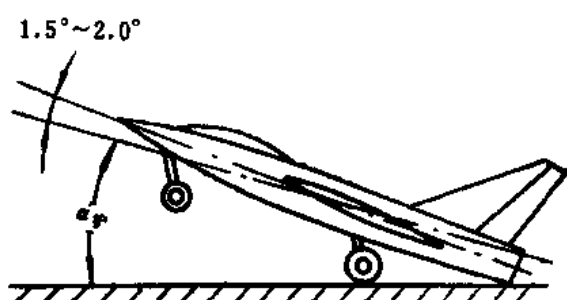


图 9-48

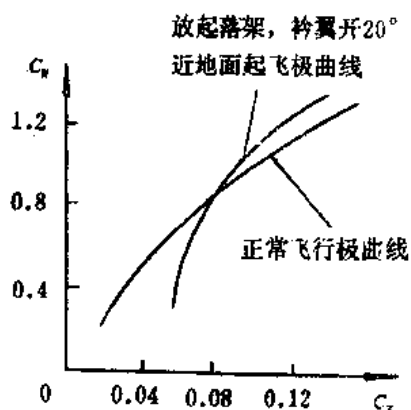


图 9-49

3. 加速上升至安全高度 15 米处所经水平距离 L_2 的计算

飞机离地后沿某一倾斜航迹上升并加速, 此时认为航迹为一直线, 飞机的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{G}{g} \frac{dV}{dt} = P - X - G \sin \theta \\ Y = G \end{cases} \quad (9-54)$$

由第一式得

$$dL = \frac{G}{2g} \frac{dV^2}{(P - X - G \sin \theta)}$$

积分后可得:

$$L_2 = \frac{G}{2g} \int_{V_{离}}^{V_{升}} \frac{dV^2}{P - X - G \sin \theta} \quad (9-55)$$

因航迹角 θ 较小, 故取飞机沿上升航迹所经过的距离作为加速上升段的水平距离 L_2 。式中 $V_{升}$ 为上升到 15 米安全高度的飞行速度。对于喷气式飞机 $V_{升}$ 可取 $(1.1—1.3)V_{离地}$ 。对于某一给定的航迹角 θ 下 (9-55) 式通常采用图解积分法求解。

当航迹角 θ 不大时, 航迹距离与水平距离差别不大, 故 $(P - X)$ 沿航迹所作功可视为沿水平距离所作的功。这时, 可直接用能量法确定加速上升段的距离和时间。取 $(P - X)$ 的平均值, 可得其功为 $L_2(P - X)_{平均}$, 此功应使飞机总能量 $\left(GH + \frac{G}{2g} V^2 \right)$ 有所增加, 于是可得下列关系式:

$$L_2(P-X)_{\text{平均}} = \left(GH_2 + \frac{G}{2g} V_{\text{升}}^2 \right) - \left(GH_1 + \frac{G}{2g} V_{\text{离}}^2 \right)$$

因 $H_2 - H_1 = 15$ 米, 由此得出

$$L_2 = \frac{G}{(P-X)_{\text{平均}}} \left(\frac{V_{\text{升}}^2 - V_{\text{离}}^2}{2g} + 15 \right) \quad (9-56)$$

式中 $(P-X)_{\text{平均}}$ 可按 $V_{\text{平均}} = \frac{1}{2}(V_{\text{升}} + V_{\text{离}})$ 及发动机最大转速 n_{max} 和 $Y \approx G$ 的条件, 利用发动机特性曲线和飞机起飞极曲线加以确定。由于地面效应一般只在离地面高度小于 4—5 米时作用才显著, 所以, 计算 L_2 时可以不考虑地面效应对起飞极曲线的影响。

例 某飞机起飞加速上升, 飞机重量 $G = 76440$ 牛顿, $V_{\text{离地}} = 300$ 公里/小时, $V_{\text{升}} = 108.3$ 米/秒, $(P-X)_{\text{平均}} = 13426$ 牛顿。

由 (9-56) 式可算出加速上升段的距离, $L_2 = 1473$ 米。

最后, 根据

$$L_{\text{起飞}} = L_1 + L_2 \quad (9-57)$$

计算飞机的起飞距离。

算例中的飞机, 其起飞距离 $L_{\text{起飞}} = 2483$ 米。

三、飞机着陆过程

飞机从安全高度下滑, 发动机一般置于慢车工作状态, 飞机接近等速直线下滑。到离地一定高度 (一般为 6—12 米), 驾驶员后拉驾驶杆将飞机拉平。然后, 保持在离地 0.5—1 米左右进行平飞减速。随飞行速度减小, 驾驶员不断拉杆, 使飞机和缓地下沉。在离地 0.15—0.25 米的高度上, 飞机已接近护尾迎角状态。随后, 飞机因继续减速使升力小于飞机重量, 于是飞机飘落以主轮接地。此时的速度称为接地速度。飞机接地后, 驾驶员继续保持飞机两点滑跑姿态, 以充分利用空气阻力减速。随后, 降至一定速度时, 驾驶员推杆使前轮着地进行三点滑跑, 并开始使用刹车以缩短地面滑跑距离。到飞机完全停止运动时, 降落阶段就告结束。所以飞机的着陆过程通常分为: ①下滑, ②拉平, ③平飞减速, ④飘落, ⑤地面减速滑跑五个阶段。如图 9-50 所示。每个阶段所对应的水平距离的总和称为飞机的着陆距离, $L_{\text{着陆}} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ 。从飞机接地到滑跑减速至零即着陆滑跑阶段所跑过的距离, 称为着陆距离 (即 L_5)。



图 9-50

四、飞机着陆性能的计算

飞机的着陆性能计算着重在接地速度 $V_{\text{接地}}$ 及地面减速滑跑距离 L_5 的计算。前者涉及飞

行安全,后者与跑道长度密切相关。而整个着陆距离 $L_{\text{着陆}}$ 和 $L_{\text{起飞}}$ 一样涉及整个机场的净空面积即机场占地的范围。

下面我们分别确定着陆各阶段的距离及有关速度。

与起飞情况类似,计算着陆性能时要用到着陆极曲线。通常,在着陆时为了减小 $V_{\text{接地}}$ 应放下全部襟翼并使襟翼偏转到最大角度,以尽可能地增大 $C_{y\text{max}}$ 。同时,着陆时要放起落架。所以,着陆极曲线通常也由风洞实验或估算得出。

1. 下滑距离 L_1 的计算

下滑时,飞机放下襟翼及起落架,油门位置相当于慢车工作状态, $P_{\text{可用}} \approx 0$ 。飞机近似作等速直线下滑,其受力情况如图 9-51 所示。

由图 9-51 可得:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X}{Y} = \frac{C_x}{C_y} = \frac{1}{K} = \frac{15}{L_1'} \quad (9-57)$$

近似计算时,可取

$$L_1 \approx L_1' = 15K \quad (9-58)$$

由上式可见,升阻比 K 小则下滑距离 L_1 也小,但使 θ 增大,拉平段增大,且容易出危险。故通常下滑时的升力系数 $C_{y\text{下滑}} = (0.6-0.7)C_{y\text{max}}$ 。

由 $C_{y\text{下滑}}$ 查极曲线求出 $C_{x\text{下滑}}$ 从而求出升阻比 K 。根据 $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{K}$ 求出下滑

角。求得 θ 以后,根据

$$Y = C_{y\text{下滑}} \frac{1}{2} \rho V^2 S = G \cos \theta$$

可确定下滑速度为

$$V_{\text{下滑}} = \sqrt{\frac{2G \cos \theta}{\rho S C_{y\text{下滑}}}} \quad (9-59)$$

式 (9-58) 用 L_1' 代替 L_1 , 实际上把下滑段距离算长了。经验表明 L_1' 大体上相当于下滑段和拉平段距离即 $L_1 + L_2$ 之和。故在计算时,拉平段不必再算。

例 某飞机着陆下滑时, $K = 5.66$, $G = 54936$ 牛顿, $\rho = 1.225$ 千克/米³, $S = 23$ 米², $C_{y\text{下滑}} = 0.435$ 。

由 (9-58) 式算出下滑段距离, $L_1 = 84.9$ 米;

由 (9-59) 式算出下滑速度, $V_{\text{下滑}} = 94.6$ 米/秒。

2. 平飞减速段距离 L_2 的计算

平飞减速段飞机的受力情况如图 9-52 所示,其运动方程为

$$\begin{cases} \frac{G}{g} \frac{dV}{dt} = -X \\ Y \approx G \end{cases} \quad (9-60)$$

以第二式除第一式,得:

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = -\frac{X}{Y} = -\frac{1}{K}$$

或改写为

$$\frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dL} = -\frac{1}{K} \quad (9-61)$$

由(9-61)式可得

$$L_s = -\frac{1}{2g} \int_{V_{\text{拉平}}}^{V_{\text{接地}}} K dV^2 = -\frac{1}{2g} \int_{V_{\text{接地}}}^{V_{\text{拉平}}} K dV^2 \quad (9-62)$$

此式通常需用图解积分法求解。如果考虑实际上上式中 $V_{\text{拉平}} \approx V_{\text{下滑}}$, $V_{\text{接地}} \approx 0.95\sqrt{\frac{2G}{\rho S C_{yP}}}$, 而 $K \approx K_{\max}$, 则上式可积分为

$$L_s \approx \frac{K_{\max}}{2g} (V_{\text{下滑}}^2 - V_{\text{接地}}^2) \quad (9-63)$$

按理讲, (9-62) 式积分上限 $V_{\text{接地}}$ 应为 $V_{\text{飘落}}$ 开始时的速度, 比 $V_{\text{接地}}$ 要大一些。另外, 认为 $K \approx K_{\max}$ 也偏大一些。所以 L_s 也略为算大了一点。实践中就认为算大的部分相当于飘落的距离, 即 L_s 为平飞减速及飘落段距离之和。所以, 飘落段距离也不必再予计算。

例 某飞机平飞减速时 $K_{\max} = 8$, $V_{\text{下滑}} = 94$ 米/秒, $V_{\text{接地}} = 72.2$ 米/秒 = 260 公里/小时。

由式(9-63)算出平飞减速段距离

$$L_s = 1477 \text{ 米。}$$

3. 地面减速滑跑距离 L_g 的计算

在地面减速滑跑过程中, 先是两点滑跑, 速度减至一定程度时改为三点滑跑, 并使用刹车。不同阶段中, 飞机的受力情况并不相同。经过实践分析, 可采用下面的近似计算办法, 即近似将飞机在地面减速滑跑过程当作等减速运动。

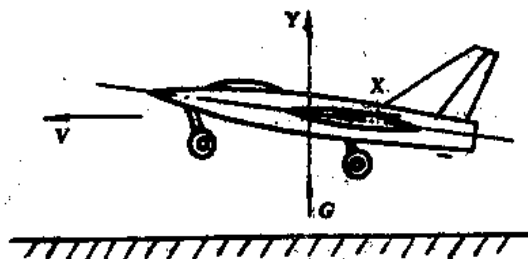


图 9-52

由此

$$L_{\text{着陆}} = V_{\text{平均}} \cdot t_{\text{着滑}} \quad (9-64)$$

式中

$$V_{\text{平均}} = \frac{V_{\text{接地}}}{2}, \quad V \text{ 为速度;}$$

$$t_{\text{着滑}} = \frac{V_{\text{接地}}}{a_{\text{平均}}}, \quad t \text{ 为时间;}$$

$a_{\text{平均}}$ 为着陆滑跑过程中的平均减速度。

$a_{\text{平均}}$ 可按下面的想法求得:

假定在主轮接地瞬时, 地面摩擦力 $F = 0$, 只有 X 起减速作用, 此时近似有 $Y \approx G_{\text{降}}$ 条件, 故

$$\begin{aligned} X &= C_{x\text{接地}} \frac{1}{2} \rho V_{\text{接地}}^2 S = \left(\frac{C_{x0}}{C_{y0}} \right)_{\text{接地}} \frac{1}{2} \rho V_{\text{接地}}^2 S \\ &= \frac{Y}{K_{\text{接地}}} \approx \frac{G_{\text{降}}}{K_{\text{接地}}} \end{aligned}$$

滑跑快结束时, $X \approx 0$, 只有地面摩擦力 F 起减速作用, $F \approx f G_{\text{降}}$ 。整个滑跑过程中的平均减速度 $F_{\text{平均}}$ 应为:

$$F_{\text{平均}} = \frac{X + F}{2}$$

由此得 $a_{\text{平均}}$ 为

$$a_{\text{平均}} = \frac{F_{\text{平均}}}{G_{\text{降}}} = \frac{g}{G_{\text{降}}} \cdot \frac{G_{\text{降}} \left(\frac{1}{K_{\text{接地}}} + f \right)}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{1}{K_{\text{接地}}} + f \right) \quad (9-65)$$

代入(9-64)式中得:

$$L_{\text{着滑}} = \frac{V_{\text{接地}}^2}{2a_{\text{平均}}} = \frac{V_{\text{接地}}^2}{g \left(\frac{1}{K_{\text{接地}}} + f \right)} \quad (9-66)$$

例 某飞机着陆时, $G = 54\,936$ 牛顿, $S = 23 \text{ 米}^2$, $\rho = 1.225$ 千克/米³, $C_{y\text{护}} = 0.675$, $K_{\text{接地}} = 7$, $f = 0.3$ 。

由式 $V_{\text{接地}} \approx 0.95 \sqrt{\frac{2G}{\rho S C_{y\text{护}}}} = 72.2 \text{ 米/秒} = 260 \text{ 公里/小时}$;

由式(9-66)算出地面滑跑距离 $L_5 = 1\,200$ 米。

通过以上分析,最后得到计算着陆性能的式子,它们是

$$L_{\text{着陆}} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \quad (9-67)$$

根据算例的计算,由式(9-67)有

$$L_{\text{着陆}} = 2\,762 \text{ 米}$$

五、缩短起降距离的措施

通过以上对影响飞机起飞滑跑距离的各因素的分析,我们可以采用各种方法缩短飞机的起飞和着陆滑跑距离。但是飞机设计的经验表明,只有那些不影响飞机主要飞行性能的方法和措施,才是在实践中可以采用的。

例如,降低飞机的翼载值 G/S 能使飞机起飞离地速度 $V_{\text{离地}}$ 减小,因而能缩短起飞滑跑和着陆滑跑距离,但 G/S 的数值主要是由飞机的升限和续航性能决定的,所以设计时不能用降低 G/S 的措施来改善起降性能。

在现代飞机上经常采用的措施有以下几种:

1. 增升装置

在机翼上装置各种型式的襟翼,在起飞着陆时放下以增加升力,使 $C_{y\text{离地}}$ 和 $C_{y\text{着陆}}$ 增大以改善起降性能是最常用的设计措施。

2. 增大推重比 P/G

增大发动机的推力,使起飞的加速度增大,飞机可以很快的增速到离地速度,缩短起飞滑跑距离。现代喷气发动机上常用装置加力燃烧室在起飞时增大推力,使起飞滑跑距离缩短(在歼击机上常用)。

3. 增阻装置及刹车

飞机在着陆滑跑时增加阻力可以用阻力伞或减速伞。飞机着陆接地后放出阻力伞,利用伞的空气阻力使飞机减速。着陆滑跑初期滑跑速度较大,伞的阻力也大。速度降低后伞的阻力减小。速度减小后应把伞抛掉。阻力伞是增阻装置的一种形式,其它还有阻力板等。

着陆滑跑时飞行员可以使机轮刹车增大摩擦力。

用增阻装置和刹车使 $(X+F)$ 值大大增加,因而使着陆滑跑距离缩短。

练习题

9.1 某歼击机质量为5100千克,以升阻比 $K=6$ 飞行,若发动机可用推力为24500牛顿,试问在此情况下,飞机是否具有定直平飞的可能性?

9.2 某歼击机质量7500千克,发动机可用推力14715牛顿的油门状态定常上升,若上升时的升阻比为7,试求该机上升航迹倾角。若该机抛掉副油箱后质量减至7000千克,且不计及副油箱抛掉后对升阻比的影响,仍以原来油门状态及升阻比上升,试问其上升航迹倾角将会发生多大变化?

9.3 若飞机在一定高度上定直平飞的速度增加一倍,在不考虑 A 和 C_{x0} 变化的情况下,试说明该机的升致阻力及零升阻力的变化。

9.4 某飞机以速度 $V=800$ 公里/小时定直平飞,此时阻力 $X=7848$ 牛顿,发动机单位耗油率 $q_{r,A}=0.11$ 千克/牛顿·小时,试求飞机的公里耗油量及小时耗油量。

9.5 某飞机在额定油门下以 $V=900$ 公里/小时定直爬升历时5分钟,平均小时耗油量 $q_A=2520$ 千克/小时,以后该飞机作定直平飞且公里耗油量 $q_k=0.9$ 千克/公里;飞行最后阶段以 $V=500$ 公里/小时定直下滑20分钟,平均小时耗油量 $q_A=1000$ 千克/小时,若飞机可用燃油量为1500千克,试求其总航程。(上升及下滑角很小,近似取 $\cos\theta\approx 1$)

9.6 某飞机质量 $m=7500$ 千克,机翼面积 $S=26$ 米²,以速度 $V=800$ 公里/小时在 $H=8000$ 米上定直平飞,近似可把极曲线表示成 $C_x=0.0144+0.08C_y^2$,且其单位耗油率 $q_{r,A}=0.11$ 千克/牛顿·小时,并为常数,试求其小时耗油量。

9.7 一架 $G=25500$ 公斤、 $S=100$ 米²的飞机在3000米空中以其 $V_{max}=575$ 公里/小时速度飞行。当放下减速板时其极曲线公式为 $C_x=0.52+0.048C_y^2$,问当发动机不产生推力的情况下,在放减速板时减速度 a 为若干?

9.8 一架飞机质量25500千克、 $S=100$ 米²,在3000米空中以 $n_y=2$ 进行正常盘旋飞行,若飞行速度为308公里/小时,问需要多大推力 P 来飞行?其盘旋半径 R 和盘旋时的 T 为若干?(飞机极曲线的公式为 $C_x=0.020+0.052C_y^2$)

9.9 某飞机质量 $m=7400$ 千克,机翼面积 $S=26$ 米²,发动机地面静推力 $P_0=51012$ 牛顿, $C_{y,离地}=0.73$,且知在干水泥跑道上滑跑时的摩擦系数 f 平均 $=0.03$,试求起飞滑跑距离。

9.10 某飞机起飞质量 $m=8900$ 千克,机翼面积 $S=27.95$ 米²,离地时 $C_{y,离地}=0.754$,在海平面机场标准大气条件下起飞,试求该机的离地速度 $V_{离地}$ 。

9.11 某歼击机着陆质量 $m=6000$ 千克,机翼面积 $S=26$ 米²,接地时 $C_{y,接地}=0.88$, $C_x=0.09$, $f=0.15$,试求着陆滑跑距离。

9.12 某机的起飞离地速度 $V_{离地}=120$ 公里/小时,无风时的起飞滑跑距离为800米,试问当逆风起飞时,且风速为5米/秒,起飞滑跑距离为多少?

第十章 飞机在定常直线运动时的纵向平衡、稳定性和操纵性

§ 10-1 引言

首先阐明飞机的平衡、稳定性和操纵性的基本概念。

一、飞机的平衡

飞机在飞行时，所有作用于飞机的外力之和与外力矩之和等于零的飞行状态，称为平衡状态。定常直线运动是飞机的一种平衡状态。

在第九章中，把飞机当作一个质点，只讨论了飞机的移动，即讨论了力的平衡问题，而认为力矩的平衡，总可以通过操纵舵面而得到解决。显然研究飞机力矩平衡问题，就不能再把它当作质点，而要把它作为刚体来研究。

为了保证各种飞行情况下飞机力矩平衡（指绕飞机重心的力矩），以及从某一飞行状态改变到另一飞行状态所需要的力矩，就是牵涉到如何安排飞机重心、选择平尾、升降舵、副翼、垂尾和方向舵的几何外形、及其位置安排等问题。就是说，讨论作用在飞机上的力矩和各种参数对它的影响。

二、飞机的稳定性

为了说明飞机运动稳定性概念，我们先来讨论处于静止平衡状态物体的位置稳定性问题。

1. 静平衡的位置稳定性

设一圆球处于图 10-1 三种静止的平衡状态。



图 10-1

第一种是稳定平衡。当圆球受到轻微的外力扰动后，能自动恢复到原来的平衡位置。

第二种是不稳定平衡。当圆球受到轻微扰动后，将向一边运动，不能自动恢复到原先的平衡位置。

第三种是随遇平衡。又称中立平衡。当圆球受到扰动后，不能自动恢复到原先的平衡位置，但可在新的位置平衡下来。

由上可见，物体平衡位置稳定性的判断标准，就是物体偏离其平衡位置的扰动作用停止

后，物体能否自动恢复到原先的平衡位置。

物体在静止平衡状态的位置是否稳定，尚与扰动的大小，扰动作用的时间长短有密切关系。对于稳定平衡的物体，如果外界的扰动很大，作用的时间很长，也可以变为不稳定的。为简单起见，今后在我们所讨论的稳定性问题中，规定扰动是小扰动，作用时间是一瞬时。

2. 飞机运动稳定性

飞机运动稳定性的概念，与上述物体位置稳定性的概念有着相似之处。只不过在飞机的运动中研究的已不是恢复到原先的静止位置的问题，而是研究飞机恢复到原先的（基本的）运动状态的问题。

就是说，当飞机受到外界干扰作用，当干扰停止后，飞机的扰动运动能否自动恢复到基本运动的特性，称为飞机运动的稳定性问题。也可以说，飞机运动的稳定性就是指飞机自动地保持原先飞行状态的能力。

为了讨论简便起见，我们假定飞机原先的基本运动为处于平衡状态。当飞机受到了外界的瞬时干扰后，飞机的平衡被破坏，进入了所谓的扰动运动。

外界干扰的来源，可以是阵风、多发动机飞机的一边发动机突然停车、舵面的偶然偏动、投掷炸弹等等。而我们所讨论的扰动运动，是干扰停止后偏离基本运动不大的小扰动运动。

在干扰停止后，不需要驾驶员操纵，而偏离逐渐消失，则称为未扰前的运动是稳定的，不然则为不稳定或中立稳定。根据运动参数偏离随时间变化的情况，扰动运动大致有二种方式：即指数方式和振动方式。其中每种方式都可以有三种稳定情况（图 10-2）。

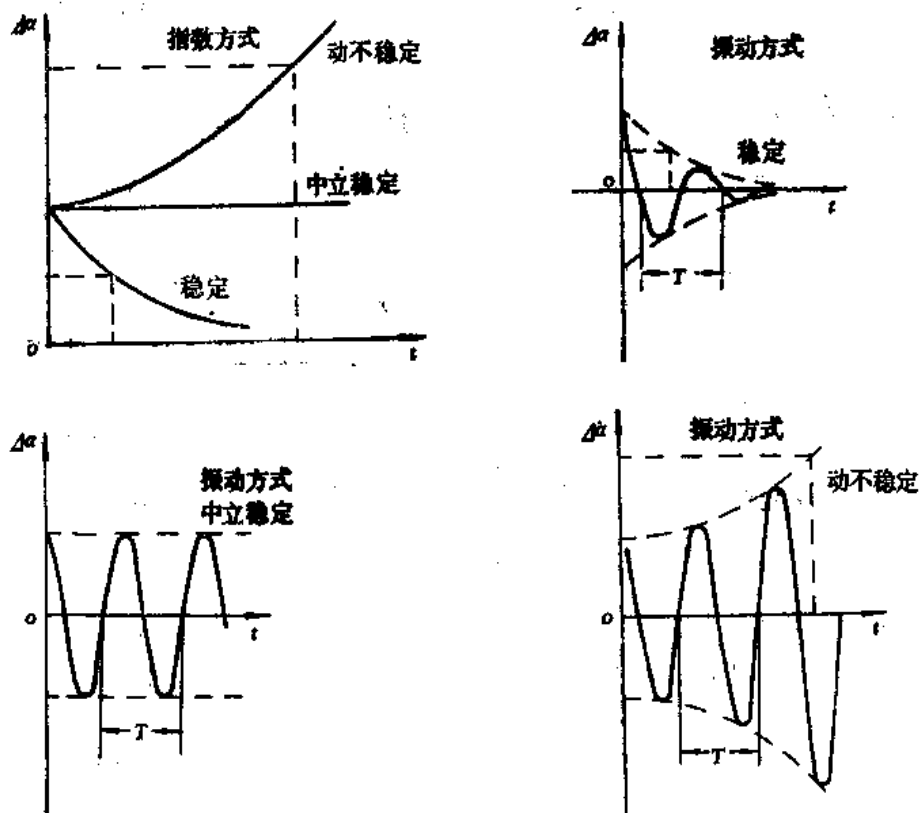


图 10-2

如果飞机运动不具有稳定性,则受到外加扰动后,要求驾驶员及时干预操纵,不然运动将愈来愈偏离原来状态,甚至导致失事,这当然是费力又不安全的。反之如果飞机运动具有稳定性,则驾驶省力简单。

研究飞机受扰动后运动的整个过程的情况,称为动稳定性问题。不讨论运动的全过程,只注意当外界干扰作用停止后,最初瞬时飞机在某一自由度范围内是否具有恢复到原来飞行状态的趋势,这类问题叫做静稳定性问题。

为了进一步说明静稳定性概念,我们来研究下面实例。在介绍实例之前我们介绍一下,在研究飞机的稳定性和操纵性时,采用的是机体坐标系。这种坐标轴系规定飞机的重心作为坐标原点 O , Ox_i 轴在飞机的对称面与翼弦平行,称为飞机的纵轴,以指向机头为正。 Oy_i 轴在飞机的对称面内,垂直于 Ox_i ,称为立轴,以指向坐舱盖为正。 Oz_i 垂直于飞机对称平面 Ox_iy_i ,指向右翼为正,称为飞机的横轴,如图10-3所示。

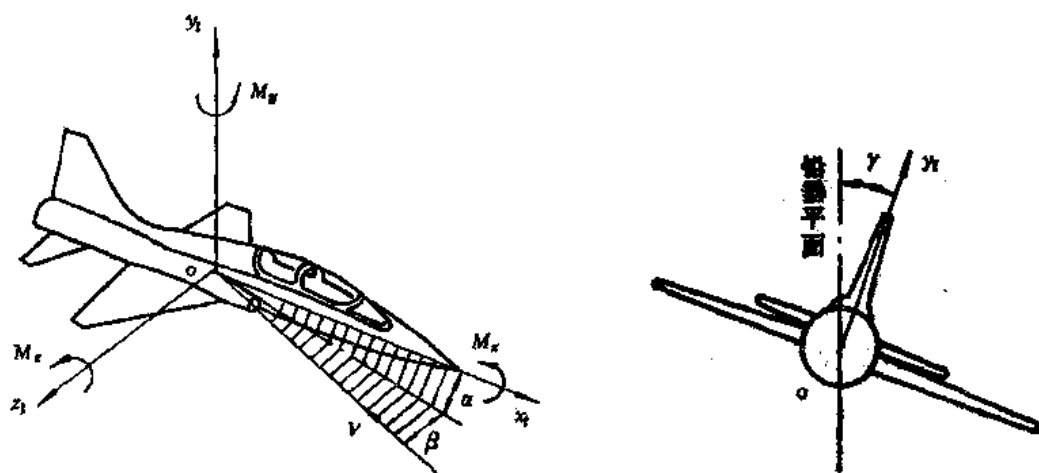


图 10-3

飞机在空间有三个转动自由度,即绕 Ox_i 、 Oy_i 、 Oz_i 三轴的转动。飞机绕 Oz_i 轴的纵向力矩(或俯仰力矩) M_y ,改变了飞机 Ox_i 相对于气流的方位即迎角 α ;飞机绕 Oy_i 轴的偏航力矩 M_x ,改变了飞机的对称面 Ox_iy_i 相对于气流的方位即侧滑角 β ;飞机绕 Ox_i 轴的滚转力矩(或横滚力矩) M_z ,改变了飞机的倾斜角 γ (即飞机对称面与包含 Ox_i 轴的空间铅垂面之间夹角),如图10-3所示。

把一架模型飞机装在风洞实验段中,将通过飞机重心 O 的横轴 Oz_i 固定起来,飞机能绕此轴旋转,即只有一个自由度。利用力矩天平可测得不同迎角 α 时绕飞机重心的气动力矩 M_z ,从而获得如图10-4所示力矩曲线,图中规定上仰力矩为正,下俯为负。

当迎角分别等于图中 a 、 b 、 c 值时,作用在整个模型飞机上的力矩等于零,即 $M_z=0$,这时模型处于平衡状态。如果我们把迎角增大一个 $\Delta\alpha$,使飞机抬头,则可能出现三种情况:第一种情况是如同图10-4(a)所示的那种力矩曲线,所产生的不平衡力矩 ΔM_z 为负值,即是使飞机低头。也就是说 ΔM_z 有使飞机恢复到原来迎角的趋势,或者说 a 点平衡状态是静稳定的。第二种情况是如图10-4(b)所示那样, $\Delta\alpha$ 所产生的 ΔM_z 为正值,即产生使飞机抬头的力矩,这将使得飞机的迎角更加加大,而使飞机离开原来的迎角 b 愈远,因此平衡状态 b 是不稳定的。第三种情况如图10-4(c),在平衡点附近,力矩曲线与横轴重合,

即迎角稍有变化时不产生力矩变化，飞机可在新的迎角下仍保持 $M_z = 0$ ，故 c 点平衡状态是中立静稳定的。可见上述飞机具有静稳定性的条件是飞机平衡点 ($M_z = 0$) 上的 $M_z = f(\alpha)$ 曲线的斜率为负值，即 $\partial M_z / \partial \alpha < 0$ 。

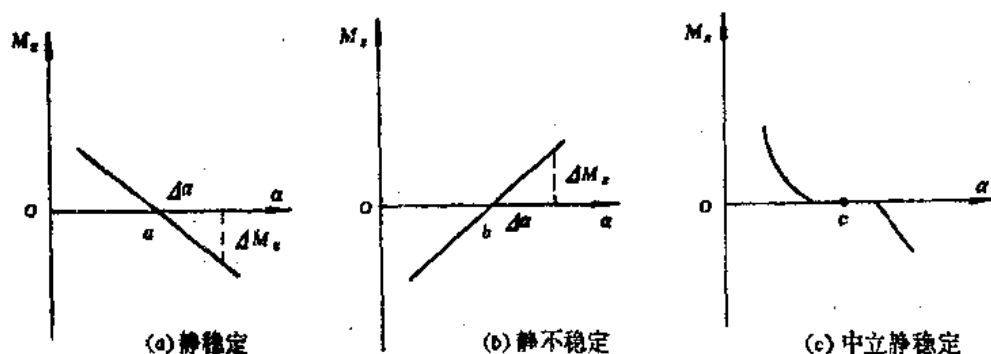


图 10-4

飞机的静稳定性只表示飞机某一个运动自由度受扰动（离开平衡状态）后的最初瞬间有无恢复至原先飞行状态的趋势，而并不讨论飞机最后能否回到原先的飞行状态。而动稳定性是研究飞机受扰动后运动的全部过程。这是静稳定性与动稳定性在概念上的区别。

静稳定性虽然只表示飞机受扰动后运动的最初趋势，但它对飞机的平衡、稳定性、操纵性都有重大影响，所以它是飞机设计的重要参数之一。

三、飞机的操纵性

要使飞机从一个运动状态变到另一个运动状态，或者保持某一特定的平衡状态飞行，需要进行操纵。飞机在驾驶员操纵下改变飞行状态的能力称为飞机的操纵性。有时将操纵性理解为飞机“跟随驾驶杆”的能力。通常要求，为了改变飞机某一飞行状态，驾驶员的动作要简单且符合驾驶员的生理习惯（如减小迎角应要求驾驶员前推杆；加大迎角应要求驾驶员后拉杆）；驾驶杆的位移量和杆力大小适中；在驾驶员操纵下，飞机反应快慢要适中等等。

研究关于为保持任何定常运动中飞机的力矩平衡所必需的舵偏角和驾驶杆力问题，称为“静操纵性”的问题。

由于稳定性是飞机保持给定飞行状态的能力，而操纵性则是改变这种状态的能力，因此飞机的稳定性和操纵性在一定意义上是有矛盾的。对一架稳定度过高的飞机来说，为了改变飞行状态，必须加大操纵舵面偏转，从而也加大了操纵杆力。而且舵面的偏转度是有限制的，因此也就限制了飞机的操纵范围。然而过分地降低飞机的稳定性，使飞机的操纵变得敏感且复杂，也使操纵性变坏。可见操纵性的好坏与飞机的稳定性很有关系，因此要考虑到对飞机的操纵性要求，使飞机具有合适的稳定度。

四、飞机的纵向运动和横侧运动

采用上述的机体轴系，可以把飞机的运动分解为（如图 10-3 所示）：

- (1) 沿 ox_i 方向的移动；
- (2) 沿 oy_i 方向的移动；
- (3) 沿 oz_i 方向的移动；

(4) 绕 ox_i 轴的转动 (又称为滚转);

(5) 绕 oy_i 轴的转动 (对称为偏航);

(6) 绕 oz_i 轴的转动 (又称俯仰)。

通常将飞机作 1、2、6 三种运动中的一种以上的运动 (均为描述飞机在对称面内的运动) 者, 称为飞机的纵向运动 (对称平面的运动)。将飞机作 3、4、5 三种运动中的一种以上的运动者称为横侧运动 (非对称运动)。飞机的一般运动是由纵向运动和横侧运动组合而成的。当飞机没有侧滑和倾斜 (即 $\beta=0, \gamma=0$) 时, 即飞机的对称面与飞行平面重合, 且又在铅垂面内, 飞机只有纵向运动。横侧运动与纵向运动的差别在于, 横侧运动只能与纵向运动同时存在。

飞行中有横侧运动时, 如果横侧运动参数不大, 则实践表明, 具有对称面的飞机, 在给定的纵向运动参数情况下, 它的横侧运动参数对纵向气动力和力矩影响可忽略, 这时就可以单独地研究横侧运动。

在讨论飞机的扰动运动时, 限于飞机的基本运动为纵向 (对称) 定常直线运动 (是一般飞机最经常、最有代表性的飞行状态), 扰动为小扰动 (即扰动运动参数和基本运动参数差别甚小)。在这种情况下, 飞机的扰动运动可以分为互不相关的纵向扰动运动和横侧扰动运动。所以飞机的稳定性 (和操纵性) 问题通常可分为纵向运动和横侧运动单独进行研究。

§ 10-2 飞机作纵向定直运动时的纵向力矩平衡和静稳定性

一、纵向定直飞行中, 飞机各部件的纵向力矩和静稳定性

为了研究飞机的平衡、静稳定性问题, 首先必须研究和确定作用在飞机上的力矩和各种参数对它的影响。

初步分析时, 可以认为, 纵向定直飞行中, 作用在飞机上的力矩是由各个部件 (机翼、机身、尾翼等等) 的力矩线性叠加而得。下面就分别讨论各个部件的力矩。

在讨论飞机力矩特性时, 采用机体轴系。

1. 机翼的纵向力矩

(1) 矩形机翼的纵向力矩 在“空气动力学”部分已经讨论过作用于翼型上的气动力可由翼型的焦点上气动力合力和绕焦点的力矩 M_{x_0} 来代替。如果略去阻力对重心的俯仰力矩, 则翼型对飞机重心 (本节讨论的情况是重心布置在机翼焦点的后面) 的俯仰力矩, 根据图 10-5 可得:

$$M_x = M_{x_0} + (x_G - x_F)Y$$

对于大展弦比的矩形机翼, 略去翼尖效应, 则其力矩表达式与翼型相似, 则上式可表示为

$$M_{x\text{翼}} = M_{x_0\text{翼}} + (x_G - x_F)Y_{\text{翼}} \quad (10-1)$$

将 (10-1) 式两端除以 $\frac{1}{2}\rho V^2 S b$, 得出机翼纵向力矩系数的表达式

$$m_{x\text{翼}} = \frac{M_{x\text{翼}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} = m_{x_0\text{翼}} + (x_G - x_F)C_{y\text{翼}} \quad (10-2)$$

其中

$$m_{z0} = \frac{M_{z0}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b}, \quad \bar{x}_G = \frac{x_G}{b}, \quad \bar{x}_F = \frac{x_F}{b}$$

(2)任意平面形状机翼的纵向力矩 机翼的平面形状是各式各样的,为了简化计算,我们引用“当量机翼”的概念,即用一个能够产生相等的气动力和力矩特性的而且面积也相等的(翼展可不等)矩形机翼来代替任意平面形状的机翼。此矩形机翼的弦长称为平均气动力弦 b_A ,如图10-6所示。按此定义,确定任意机翼的力矩可简化为确定当量矩形机翼的力矩,而后可按(10-2)式计算。

$$m_{z\text{翼}} = m_{z0\text{翼}} + \left(\frac{x_G}{b_A} - \frac{x_F}{b_A} \right) C_y = m_{z0\text{翼}} + (\bar{x}_G - \bar{x}_F) C_y \quad (10-3)$$

式中 $m_{z0\text{翼}}$ 和 $\bar{x}_{F\text{翼}}$ 为当量矩形机翼的零升力矩系数和相对焦点位置。

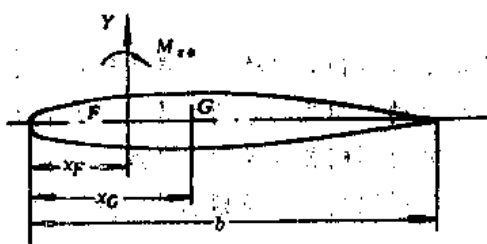


图 10-5

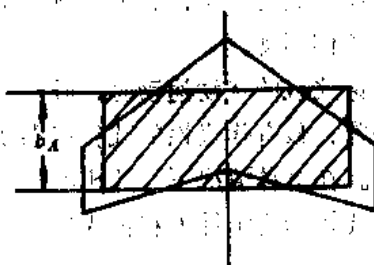


图 10-6

任意机翼平均气动力弦的位置和长度,可借助于上述当量机翼概念用理论计算方法确定(可查阅有关资料)。对于梯形机翼,平均气动力弦的位置和长度,可按图10-7的作图法确定。半翼平均气动力弦应通过该半翼的形心。整个机翼的平均气动力弦为半翼平均气动力弦在对称面上的投影。

将(10-3)式可写成

$$m_{z\text{翼}} = m_{z0} + \frac{\partial m_{z\text{翼}}}{\partial C_y} C_y \quad (10-4)$$

其中 $\partial m_{z\text{翼}} / \partial C_y$ 称为机翼的纵向静稳定度,即

$$m_{z\text{翼}}^{C_y} = \frac{\partial m_{z\text{翼}}}{\partial C_y} = (\bar{x}_G - \bar{x}_F) \quad (10-5)$$

由于飞机重心布置在机翼焦点之后,所以 $m_{z\text{翼}}^{C_y} = (\bar{x}_G - \bar{x}_F) > 0$,

由此可知单独机翼是起静不稳定作用的。

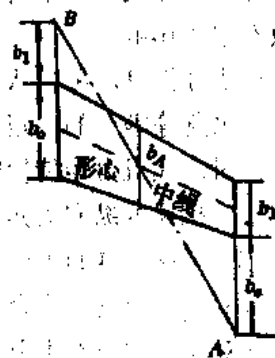


图 10-7

2. 机身及翼身组合体的纵向力矩

现代飞机的机身接近于细长旋成体,因此,在它以不大的迎角在气流中运动时,引起的气动力不大,其作用点靠近机身的头部,产生一部分力矩。另外,当机翼与机身组合在一起时,由于两者之间的相互干扰,亦会产生一部分力矩。但这二部分力矩与机翼的纵向力矩相比,是次要的,因此在计算机翼的纵向力矩时,可忽略不计。(10-2)式的

其中

$$m_{z0\text{翼-身}} = m_{z0\text{翼}} + \Delta m_{z0\text{身}}$$

$$\bar{x}_{F\text{翼-身}} = \bar{x}_{F\text{翼}} - \Delta \bar{x}_{F\text{身}}$$

$m_{z0\text{翼-身}}$ 又称无尾飞机的零升力矩系数； $\bar{x}_{F\text{翼-身}}$ 又称无尾飞机的焦点。

由于机身焦点靠近头部，结果组合体的升力增量作用点——组合体的焦点前移了一个 $\Delta \bar{x}_{F\text{身}}$ ，如图 10-8 所示。一般情况下，机身头部愈长，则 $\Delta \bar{x}_{F\text{身}}$ 愈大。对于现代飞机 $\Delta \bar{x}_{F\text{身}}$ 可达 5—8% b_A 。 $\Delta m_{z0\text{身}}$ 一般情况为负值，取决于机翼的安装角 $\varphi_{\text{翼}}$ 和机翼零升力迎角。 $\Delta \bar{x}_{F\text{身}}$ 和 $\Delta m_{z0\text{身}}$ 的具体数值可根据机身外形、机身和机翼相对位置查有关资料。

由 (10-7) 式可知

$$m_{z\text{翼-身}}^{C_y} = \frac{\partial m_{z\text{翼-身}}}{\partial C_y} = \bar{x}_G - \bar{x}_{F\text{翼-身}} \quad (10-8)$$

在空气动力学课程中知道，低速飞行时，焦点位置与迎角无关，从 (10-8) 式可知，当飞机重心的位置确定以后， $m_{z\text{翼-身}}^{C_y}$ 就不随迎角 (C_y) 而变化。表明翼身组合体即无尾飞机的力矩系数与 C_y 成线性关系，如图 10-9 所示。因为无尾飞机的重心在焦点之后，所以是起静不稳定作用的。

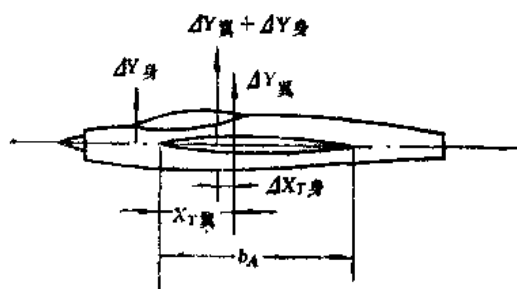


图 10-8

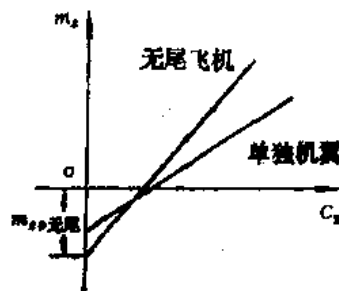


图 10-9

至于发动机短舱，它的情况类似于机身，可仿照以上办法处理。

3. 水平尾翼的纵向力矩

正常式飞机的水平尾翼放在机翼之后，处在翼身洗流及速度阻滞区域内，流场较为复杂。

水平尾翼所采用的翼型通常都是对称的，因此，压力中心和焦点重合。作用在平尾上的升力 $Y_{\text{平尾}}$ 和阻力 $X_{\text{平尾}}$ 位于翼型的焦点上，而绕焦点的 $M_{z0\text{平尾}}$ 为零，如图 10-10 所示。设由平尾焦点至飞机重心的水平和垂直距离分别为 $L_{\text{平尾}}$ 和 $y_{\text{平尾}}$ ，则平尾绕重心的纵向力矩为

$$M_{z\text{平尾}} = -Y_{\text{平尾}}L_{\text{平尾}} + X_{\text{平尾}}y_{\text{平尾}}$$

但一般 $X_{\text{平尾}} \ll Y_{\text{平尾}}$ ，而 $y_{\text{平尾}} \ll L_{\text{平尾}}$ ，故在初步计算时可近似认为

$$M_{z\text{平尾}} \approx -Y_{\text{平尾}}L_{\text{平尾}} \quad (10-9)$$

平尾升力可以表示为

$$Y_{\text{平尾}} = C_{y\text{平尾}} q_{\text{平尾}} S_{\text{平尾}} \quad (10-10)$$

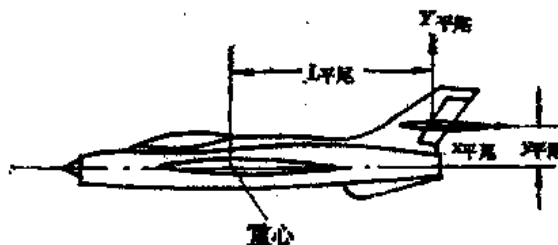


图 10-10

式中 $C_{y\text{平尾}}$ 、 $S_{\text{平尾}}$ 分别表示平尾的升力系数与平尾面积， $q_{\text{平尾}}$ 表示平尾处的速压， $q_{\text{平尾}} =$

$\frac{1}{2}\rho V^2$ 平尾, 因为前方来流经过机翼的阻滞作用(粘性及激波阻滞等), 流到平尾时 $q_{\text{平尾}}$ 要略低于 $q_{\text{机翼}}$, $q_{\text{平尾}} = k q_{\text{机翼}}$, k 称为速度阻滞系数。 $C_{y\text{平尾}}$ 可表示为

$$C_{y\text{平尾}} = a_{\text{平尾}}(\alpha_{\text{平尾}} + n\delta_{\text{舵}}) \quad (10-11)$$

式中 $a_{\text{平尾}}$ 为平尾的实际迎角,

$\delta_{\text{舵}}$ 为升降舵偏度,

n 是一个系数, 称为“升降舵效率”, 可以用实验估算或理论方法确定。例如 $n=0.4$, 表示升降舵下偏 1° 所增加的平尾升力相当于平尾实际迎角增加 0.4° 时所增加的平尾升力。

$a_{\text{平尾}}$ 为平尾升力系数的斜率。

将 (10-11) 式代入 (10-10) 式, 得

$$Y_{\text{平尾}} = a_{\text{平尾}}(\alpha_{\text{平尾}} + n\delta_{\text{舵}})q_{\text{平尾}}S_{\text{平尾}} \quad (10-12)$$

将 (10-12) 式代入 (10-9) 式

$$M_{x\text{平尾}} = -a_{\text{平尾}}(\alpha_{\text{平尾}} + n\delta_{\text{舵}})q_{\text{平尾}}S_{\text{平尾}}L_{\text{平尾}}$$

初步计算中, 可假定 $L_{\text{平尾}}$ 为由飞机重心至升降舵铰链轴之间的距离, 是一常值。

平尾力矩系数为

$$m_{x\text{平尾}} = \frac{M_{x\text{平尾}}}{qSb_{\Delta}} = -kAa_{\text{平尾}}(\alpha_{\text{平尾}} + n\delta_{\text{舵}}) \quad (10-13)$$

式中 $A = S_{\text{平尾}}L_{\text{平尾}}/Sb_{\Delta}$ 称为平尾对重心的静矩系数。

平尾的迎角 $\alpha_{\text{平尾}}$ 一般和机翼的迎角 α 不相等。按照图 10-11, $\alpha_{\text{平尾}}$ 可表示为

$$\alpha_{\text{平尾}} = \alpha + \varphi - \varepsilon \quad (10-14)$$

式中 φ 为平尾翼弦相对于机翼翼弦的安装角;

ε 为平尾处的气流平均下洗角。

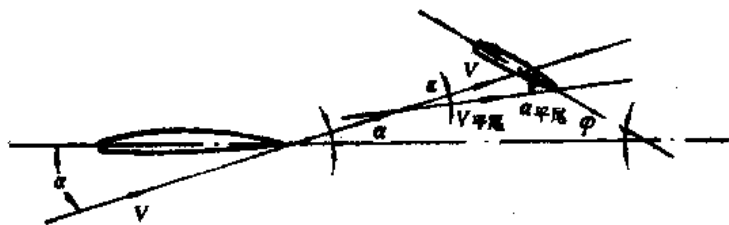


图 10-11

平尾处气流的下洗, 主要是由于机翼涡系, 尤其是机翼的自由涡所产生的, 而机翼涡系的强度是和机翼的升力系数成正比的。用 $\varepsilon_{\text{机翼}}$ 表示机翼对平尾的下洗角, 近似认为和 C_y 成正比, 即

$$\varepsilon_{\text{机翼}} = DC_y$$

D 是一比例系数, 它和平尾与机翼间的水平距离、高低位置、机翼平面形状及飞行 M 数等有关。此外机身对平尾下洗也有一定影响, 用 $\varepsilon_{\text{机身}}$ 表示机身的下洗角, 因数值较小, 近似当作常数, 因此

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{机翼}} + \varepsilon_{\text{机身}} = DC_y + \varepsilon_{\text{机身}}$$

将上式及 $\alpha = \alpha_0 + \frac{C_y}{a}$ 代入 (10-14) 式, 得

$$\alpha_{\text{平尾}} = \alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{机身}} + \left(\frac{1}{a} - D\right) C_y \quad (10-15)$$

将(10-15)代入(10-13)中

$$m_{x\text{平尾}} = -k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{机身}} + n \delta_{\text{舵}}) - k A a_{\text{平尾}} \left(\frac{1}{a} - D\right) C_y \quad (10-16)$$

把(10-16)式写成如下形式, 即

$$m_{x\text{平尾}} = m_{x0\text{平尾}} + m_{x\text{平尾}}^{C_y} C_y$$

其中:

$$m_{x0\text{平尾}} = -k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{机身}} + n \delta_{\text{舵}})$$

$$m_{x\text{平尾}}^{C_y} = -k A a_{\text{平尾}} \left(\frac{1}{a} - D\right)$$

在一定 M 数时, $m_{x\text{平尾}}^{C_y}$ 是一个常数, 因为 $\frac{1}{a} = \partial \alpha / \partial C_y$ 表示产生单位 C_y 所需要的迎角,

$D = \partial \varepsilon / \partial C_y$ 表示单位 C_y 引起平尾处的下洗角。显然, $\frac{1}{a} > D$, 所以 $m_{x\text{平尾}}^{C_y} < 0$ 。可见 $m_{x\text{平尾}} = f(C_y)$ 曲线为一直线, 且斜率是负的。说明平尾是起静稳定作用的。当平尾装在翼身组合体

之后, 翼身组合体和平尾组成的飞机焦点将后移一段距离, 该距离的大小将决定飞机是否具有静稳定性。可见平尾对飞机的焦点后移到重心之后起了决定性作用, 从而保证飞机具有静稳定性。

当平尾的升降舵向下偏动时, 平尾升力增加, 产生下俯力矩, 故曲线向左下方平移; 当升降舵向上偏动时, 平尾升力减少产生上仰力矩, 曲线向上方平移。

规定升降舵下偏, $\delta_{\text{舵}}$ 为正; 升降舵上偏, $\delta_{\text{舵}}$ 为负, 如图 10-12 所示。

4. 其它因素对纵向力矩的影响

纵向定常直线飞行中, 除了机翼、机身、平尾、短舱以及它们之间的相互干扰所产生的空气动力引起纵向力矩外, 还需要考虑一些其它因素。例如, 发动机推力不通过飞机重心所产生的力矩、喷气发动机进气道的进口处产生的轴向气动力对重心的力矩、喷气发动机尾喷流引起的力矩、装有螺旋桨的飞机, 螺旋桨滑流对力矩影响等等。这些因素对纵向力矩的影响, 应根据飞机布局形式, 不同的飞行状态分别给予考虑。由于它们不是影响纵向力矩的主要成分, 此处不作详细介绍, 需要时可参阅有关资料。

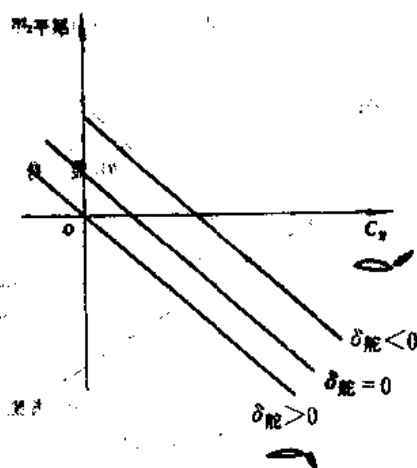


图 10-12

5. 全机的纵向力矩及静稳定度

在纵向定常直线飞行时, 整个飞机绕重心的纵向力矩系数为

$$m_x = m_{x\text{翼-身}} + m_{x\text{平尾}}$$

根据式(10-7)及式(10-16), 飞机纵向力矩系数为

$$m_x = m_{x0\text{翼-身}} - k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{机身}} + n \delta_{\text{舵}})$$

$$+ \left[x_G - x_{F\text{翼-身}} - k A a_{\text{平尾}} \left(\frac{1}{a} - D \right) \right] C_y \quad (10-17)$$

$$\text{或写成} \quad m_z = m_{z0} + (\bar{x}_G - \bar{x}_F) C_y \quad (10-18)$$

式中 m_{z0} 为全机零升力力矩系数，表达式为

$$m_{z0} = m_{z0\text{翼-身}} + m_{z0\text{平尾}} = m_{z0\text{翼-身}} - k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{身}} + n \delta_{\text{舵}}) \quad (10-19)$$

$\bar{x}_F$ 为全机焦点的相对位置，它和机翼焦点的概念相似，即绕全机焦点的飞机纵向力矩系数与 C_y (或 α) 无关，等于一个常数力矩系数 m_{z0} 。

$$\bar{x}_F = \bar{x}_{F\text{翼-身}} + k A a_{\text{平尾}} \left(\frac{1}{a} - D \right) \quad (10-20)$$

因此，全机的静稳定度为：

$$m_z^{C_y} = \frac{\partial m_z}{\partial C_y} = \bar{x}_G - \bar{x}_{F\text{翼-身}} - k A a_{\text{平尾}} \left(\frac{1}{a} - D \right) = \bar{x}_G - \bar{x}_F \quad (10-21)$$

前已指出， $m_{z0\text{翼-身}}$ 一般为负值，如果在 $\delta_{\text{舵}} = 0$ 情况下适当选择平尾安装角 φ 以使 $-k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{身}} + n \delta_{\text{舵}})$ 成为正值，且其绝对值大于 $|m_{z0\text{翼-身}}|$ ，则全机零升力力矩系数 m_{z0} 将变为正值。这是飞机设计中所要求的，否则 (m_{z0} 为负值) 在升降舵处在中立位置时，不可能在力矩曲线上获得正迎角范围平衡点，也就是说不能获得飞机的平衡飞行状态，而这是不允许的。这就是平尾的第一个作用——改变飞机零升力矩系数的大小，使飞机在正迎角范围内获得平衡飞行状态。见图 10-13。

如果焦点后移到飞机重心之后，则全机便具有纵向静稳定性。而平尾起到了使翼身组合体焦点后移的作用，这是平尾的第二个作用，如图 10-14 所示。因此，全机焦点和飞机重心的相对位置，常用以判别飞机是否具有静稳定性：

当飞机焦点位于重心之后， $\bar{x}_F > \bar{x}_G$ ，即 $m_z^{C_y} < 0$ ，飞机静稳定；

当飞机焦点位于重心之前 $\bar{x}_F < \bar{x}_G$ ，即 $m_z^{C_y} > 0$ ，飞机静不稳定。

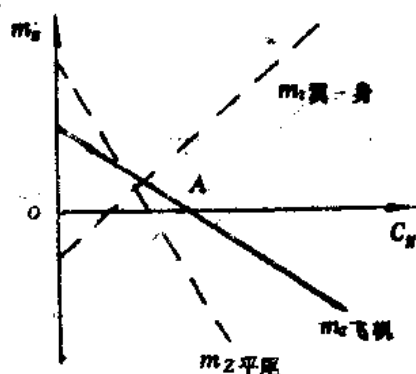


图 10-13

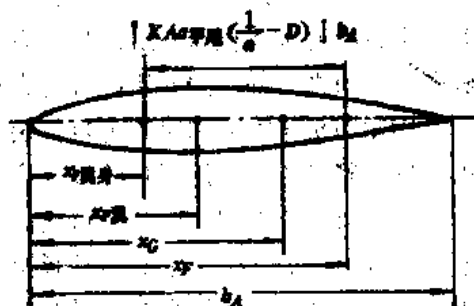


图 10-14

当飞机焦点位于重心处， $\bar{x}_F = \bar{x}_G$ ，即 $m_z^{C_y} = 0$ ，飞机中立稳定。

飞机静稳定度或静不稳定度的大小由飞机焦点和重心之间距离所决定。我们要求飞机为静稳定的，则飞机焦点应位于重心之后，且保持一定的距离，这可以通过调整结构参数 $L_{\text{平尾}}$ 和 $S_{\text{平尾}}$ 办到。 $m_{z\text{平尾}}^{C_y} = -k A a_{\text{平尾}} \left(\frac{1}{a} - D \right)$ ，因为 $\frac{1}{a}$ 经常大于 D ，故 $m_{z\text{平尾}}^{C_y} < 0$ ， $L_{\text{平尾}}$ 和

S 平尾大小就影响 $|m_{x_{平尾}}^{c_y}|$ 的大小。

全机纵向力矩系数曲线如图 10-13 所示，它由 $m_{x_{机身}}$ 和 $m_{x_{平尾}}$ 两条曲线相加而得。由图可见 $m_{x_0} > 0$ ，曲线斜率为负，获得平衡点 A 。如果操纵升降舵，改变其偏角 $\delta_{舵}$ ，则由于 $\delta_{舵}$ 在 (10-17) 式中的作用，将使曲线作平行移动，而斜率不变。但此时平衡点的位置改变了，即飞机的平衡状态随 $\delta_{舵}$ 的改变而改变（见图 10-15）。我们已规定：舵面后缘下偏为正；上偏为负。因此平尾的第三个作用是通过偏转舵面，使飞机在不同 C_y （迎角）下，取得力矩平衡（ $m_x = 0$ ）。

由式 (10-17)，取 m_x 对 $\delta_{舵}$ 的偏导数，则得

$$m_{x_{舵}}^{\delta_{舵}} = \frac{\partial m_x}{\partial \delta_{舵}} = -k A a_{平尾} n \quad (10-22)$$

$m_{x_{舵}}^{\delta_{舵}}$ 称为升降舵操纵效率，表示升降舵改变 1° 时纵向力矩系数的改变量。

二、重心位置对纵向静稳定性的影响

当 M 数不变而飞机重心前移时，重心与飞机焦点之间的距离加大。这意味着当迎角增加时，作用于焦点的升力增量对重心的力臂加大，因而消除迎角增加的下俯力矩增大，即纵向静稳定度增加，力矩曲线斜率亦增大，如图 10-16 所示。相反，若重心后移，则重心与焦点的距离减小，纵向静稳定度和力矩曲线斜率亦都减小。力矩曲线上平衡点的位置亦随之改变。

飞机重心与飞机焦点重合的位置，称为中立重心位置。实际飞行中，纵向静稳定度不能等于零。为了保证静稳定性，飞机重心位置应该在中立重心位置（即全机焦点位置）之前，并留有一定距离。飞机焦点成为重心后移的限制位置之一。

三、空气压缩性对纵向静稳定性的影响

由式 (10-19)、(10-12)、(10-22) 可知， m_{x_0} ， $m_{x_{舵}}^{\delta_{舵}}$ 和 $m_{x_{平尾}}^{c_y}$ 分别取决于飞机各部件的气动特性和相互间干扰。当考虑空气压缩性影响时，飞机机翼和平尾的升力线斜率 and 对应焦点位置都会发生变化，因此，全机 C_y 和 x_F 势必也发生相应的改变。 M 数对各项系数影响的情况随外形的不同，差别也很大。仅举两架典型布局为例，如图 10-17(c) 中可以看出当飞行 M 数由亚音速增加到超音速时，气动导数 $m_{x_{舵}}^{\delta_{舵}}$ 的数值（绝对值）大大减少，为了保证一定的操纵效率，高速飞机常采用全动平尾，如下图中 $m_{x_{平尾}}^{c_y}$ 所示。

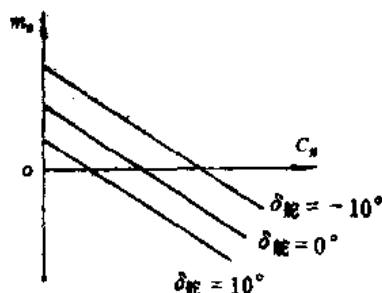


图 10-16

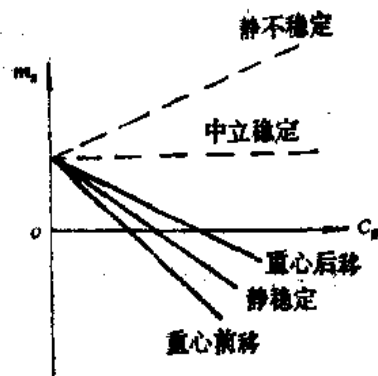
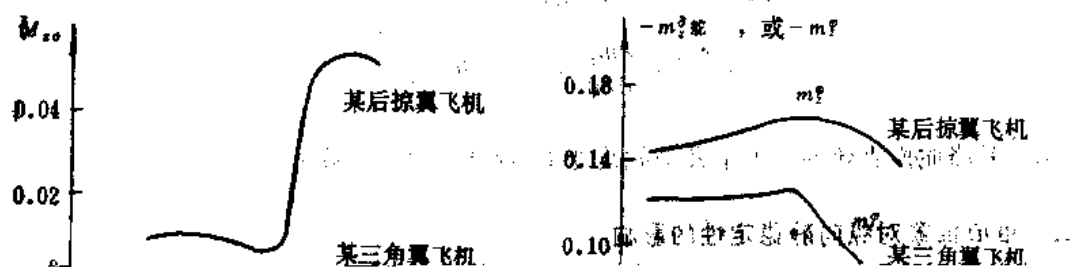
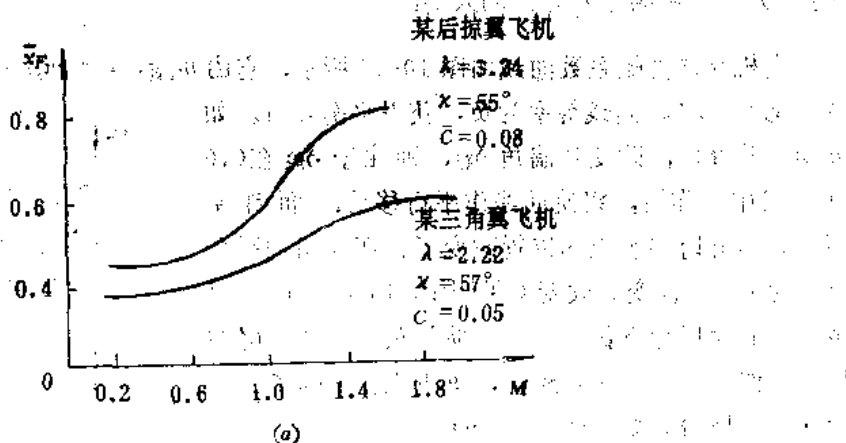


图 10-18



$m_s = 0$, 解出 $\delta_{\text{舵}}$ 整理后得到舵偏角平衡公式

$$\delta_{\text{舵}} = - \frac{m_{s0} \text{翼-身} - k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{身}})}{m_{\delta \text{舵}}} - \frac{C_y}{m_{\delta \text{舵}}} C_v \quad (10-23)$$

由(10-23)式可见, 平衡舵偏角 $\delta_{\text{舵}}$ 对 C_v 成线性关系。对于一定的平飞迎角, 就必须有一个一定的舵偏角与之对应。即可作出不同 C_v 时升降舵偏角 $\delta_{\text{舵}}$ 的曲线, 即平衡曲线, 如图 10-18 所示。

按照纵向定直飞行的外力平衡条件, 当轨迹倾角 θ 不大时, $Y \approx G$, 即 $C_v = \frac{2G}{\rho V^2 S}$, 代入(10-23)式, 得到舵偏角与飞行速度的平衡公式:

$$\delta_{\text{舵}} = \frac{m_{s0} \text{翼-身} - k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 + \varphi - \varepsilon_{\text{身}})}{m_{\delta \text{舵}}} - \frac{G m_{\delta \text{舵}}}{m_{\delta \text{舵}}} \frac{2}{\rho V^2} \quad (10-24)$$

由上式可见, 当飞机在一定高度上以某一速度飞行时, 必有一个舵偏角与之对应。即可作出不同速度时升降舵偏角 $\delta_{\text{舵}}$ 的曲线, 即另一种形式平衡曲线, 如图 10-18b 所示。高度增加时, ρ 减小, 为保持飞机在同一速度下飞行, 迎角需要加大, 因而升降舵偏角 $\delta_{\text{舵}}$ 应向上偏转, 曲线如图中变化。

平衡曲线清楚地告诉我们, 在某一飞行高度和某一飞行速度下定常直线飞行时, 为保证纵向力矩的平衡, 升降舵的偏角大小。例如在 $H=0$ 高度上, 如果要使飞机在 $V < V_B$ 的速度下力矩取得平衡, 由图 10-18 可见, 舵应向上偏, 即 $\delta_{\text{舵}}$ 为负; 反之, 如果要在 $V > V_B$ 的速度下飞行, 舵应向下偏, 即 $\delta_{\text{舵}}$ 为正。这样的操纵是符合驾驶员的生理习惯的。曲线的变化趋势表示在不同高度和不同速度下飞行时舵面应朝什么方向偏转以及偏转多大角度。

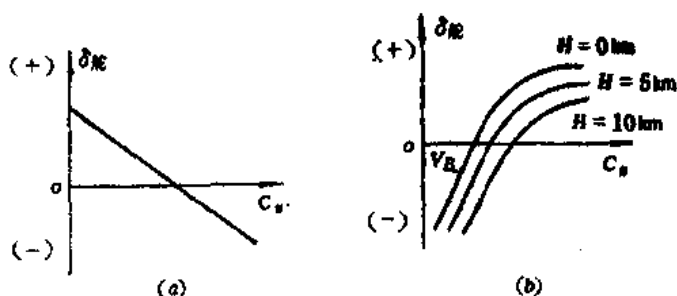


图 10-18

由舵偏角平衡公式(10-23)、(10-24)可见, 当重心位置改变时, 静稳定度随之改变, 平衡舵偏角和平衡曲线形状亦必随之改变, 重心移动对平衡曲线的影响如图 10-19 所示。

可见, 具有纵向静稳定性的飞机, 操纵符合驾驶员的生理习惯。这一点上, 稳定性和操纵性是统一的。

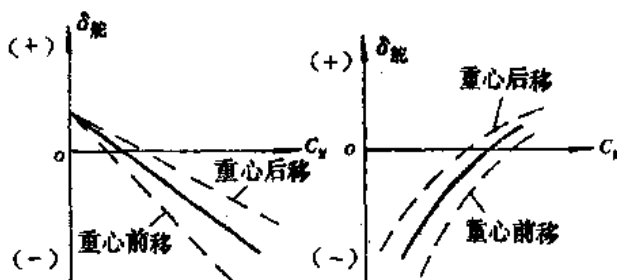


图 10-19

如图 10-19 可见, 重心愈前移, 静稳定度愈大, 从稳定性观点看来似乎是好的, 但重心愈前移, 在大 C_v 或小速度飞行时所需的负的平衡舵偏角 $\delta_{\text{舵}}$ 愈大。实际上, 升降舵的上偏

度受到构造和气动效率限制。通常升降舵只能上偏 30° 左右，且偏度愈大，舵面上气流分离愈强烈，使效率急剧下降，不能产生足够的空气动力来保证飞机的平衡。因此，重心不能过分前移，即重心前移将受到限制。

二、考虑空气压缩性影响时，平衡曲线变化

前已得出飞机纵向定常直线飞行时力矩平衡的规律。

$$m_z = (m_{z0})_{\delta_{\text{舵}}=0} + m_z^{\delta_{\text{舵}}} \delta_{\text{舵}} + m_z^{C_y} \frac{2G}{\rho S} \frac{1}{V^2} \quad (10-25)$$

$$(m_{z0})_{\delta_{\text{舵}}=0} = m_{z0\text{翼-身}} - k A a_{\text{平尾}} (\alpha_0 - \varphi - \varepsilon_{\text{身}}) \quad (10-26)$$

$$m_z^{C_y} = (\bar{x}_G - \bar{x}_F)$$

$$\bar{x}_F = \bar{x}_{F\text{翼-身}} + k A a_{\text{平尾}} \left(\frac{1}{a} - D \right)$$

$$m_z^{\delta_{\text{舵}}} = -k A a_{\text{平尾}} n$$

由图 10-17 可知，不同 M 数时， m_{z0} ， $\bar{x}_F$ ， $m_z^{\delta_{\text{舵}}}$ （或 m_z^n ）都不相同，因此反映在力矩曲线 $m_z - C_y$ 上，同一舵面偏角下（如 $\delta = 0$ ）不同 M 数飞行时， $m_z - C_y$ 曲线不同。见图 10-20 所示。对于纵向定直飞行来说，每个 M 数飞行都必须满足下述力的平衡条件：

$$Y \approx G$$

$$\text{即} \quad C_y \frac{1}{2} \rho V^2 S = C_y \frac{1}{2} \rho a_H^2 M^2 S \approx G \quad (10-27)$$

其中 a_H 为音速，

对于确定的飞机， G 、 S 已定，当飞行高度变化不大时， ρ 、 a_H 也近似常数，故力的平衡关系简化为

$$C_y M^2 = \text{常数} \quad (10-28)$$

就是说，纵向定直飞行中，对于每个 M 数，只有一个 C_y 与它对应。在图 10-20 不同 M 数的 $m_z - C_y$ 曲线上，按 (10-28) 式找出对应 M 数的 C_y 值后，可得到 f ， d ， e 这些点。由这些点联起来的曲线是考虑压缩性影响后，舵面偏角为常数时，飞机的纵向力矩曲线。见图 10-20 曲线“S”。由图可见，考虑空气压缩影响后的力矩曲线与不考虑压缩性的情况相比，变化很大。例如，当飞行的 C_y 从 a 点改变到 b 点时，见图 10-20 不考虑压缩性影响的力矩系数的增量为 bc 段的长度，而考虑压缩性影响后，如在 $M = M_{\text{临}}$ 时，力矩系数的增量为 bd 段长度了。

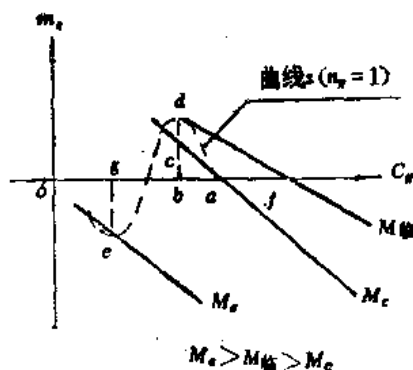


图 10-20

由于力矩曲线变化所引起的平衡曲线变化如图 10-21 所示。不考虑空气压缩性影响时，平衡曲线如图 10-21 中虚线所示。在平衡曲线 I—I 段飞行时，

操纵是不符合驾驶员的生理习惯的。见图 10-21，当飞行速度 $V_{\text{临}}$ 增至 V_A 时，在不考虑空气压缩性时，速度增加，为了保证 $Y \approx G$ 。则 C_y 要减少，即 α 要减少，舵面偏角由 δ_e 下偏

至 δ_D 。这样操纵是符合驾驶员的生理习惯的。在考虑空气压缩性影响后, 速度由 $V_{临}$ 增至 V_A , 舵面偏角不是下偏, 而是由 δ_I 上偏至 δ_A 。这显然是不符合驾驶员的生理习惯。所以 I—II 段, 称为不正常操纵区。另外我们还可以看到在 I—II 区, 还会出现“自动俯冲”现象。如飞机原在 $V_{临}$ 处飞行, 由于偶然的原因使飞机加速到 V_A 。由图可见, 对 A 点处飞行, 只需用下偏 δ_A 就可平衡力矩, 而此时舵的实际位置在 δ_I , 此多余的下偏量将形成使飞机低头的力矩。如果此多余的下偏量数值较大(曲线“勺形”的深度很大), 可能导致飞机进入俯冲而失事。这就是早期高速飞机出现的“自动俯冲”现象。飞机设计中, 应对平衡曲线如图 10-21 所示的不正常操纵区, 其宽度和“勺形”的深度加以限制。

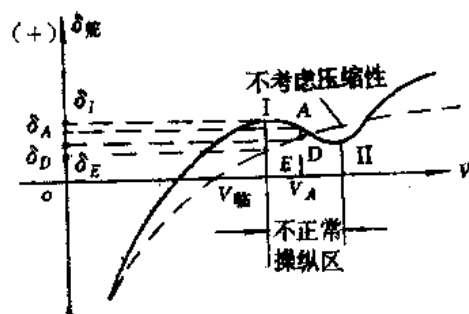


图 10-21

为了减小不正常操纵区的宽度和“勺形”的深度, 从根本上说, 应减少跨音速区 m_{z0} 、 x_p 、 m_z^{δ} 随 M 数的变化。为此可以采用三角翼、减小剖面的弯度和相对厚度等措施。从图 10-17 也可看出, 相对厚度较小的三角翼飞机, x_p 、 m_{z0} 、 m_z^{δ} 随 M 数的变化比后掠翼要小。但这些外形布局上的措施只能减小不正常操纵的程度, 并不能改变跨音速飞行时不正常操纵的本质。为了使驾驶员在感觉上实现正常操纵, 可采用相应的机构。

§ 10-4 纵向动稳定性概念

前面讨论了飞机的纵向静稳定性, 飞机具有纵向静稳定性仅说明扰动停止瞬时飞机具有恢复原来运动状态的趋势。分析飞机在受瞬时扰动后的整个过程, 以判定飞机是否自动地回到原来的运动状态, 这是动稳定性研究内容。

本节不详细研究如何判断飞机是否具有动稳定性, 而着重介绍与动稳定性有关的一些重要概念, 以便对飞机动稳定性问题有初步了解。

一、纵向阻尼力矩

如图 10-22 所示, 飞机以迎角为 1° 作等速平飞(处于平衡状态), 受扰动后迎角增加到 3° (破坏了平衡), 飞机产生了下俯的稳定力矩, 使其迎角减小。当迎角减小到 1° 时, 下俯力矩为零。这时飞机的下俯角速度却达到最大值, 由于飞机具有下俯角速度, 机头还要继续向下转动, 迎角继续减小。当迎角小于 1° 时, 飞机的稳定力矩转为抬头力矩, 才使下俯角速度开始减小, 如果没有阻止飞机转动的力矩存在, 那么要到达迎角为 -1° 时, 下俯角速度才会为零。以后迎角 α 开始增大, 并重新回到 3° 。这样下去, 飞机和真空中摆锤一样, 往复摆动, 永远回不到原来的飞行迎角状态。

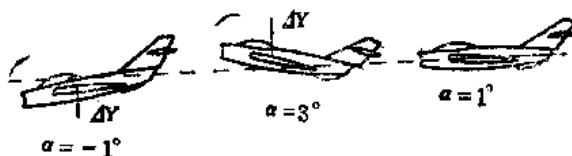


图 10-22

但是,在上述运动中,飞机同时绕横轴转动,飞机的转动与空气相互作用结果,便在飞机上产生了一个新的附加俯仰力矩。由于这个附加俯仰力矩力图阻止飞机的转动,称为纵向阻尼力矩。在此力矩的作用下,俯仰摆动逐渐减弱,乃至消失。飞机又重新取得平衡。下面分别讨论飞机各部件对纵向阻尼力矩的贡献。

1. 水平尾翼的阻尼力矩

水平尾翼离重心较远,所以其阻尼作用最大,故首先讨论。

设飞机以速度 V 飞行,同时以角速度 ω_z 绕 oz_z 轴转动,如图10-23所示。这时水平尾翼相对于气流有一个向下的运动,相当于水平尾翼各点上的空气都有一个向上的附加速度,使得水平尾翼的局部迎角增大。若取其附加速度的平均值为 $\omega_z L_{\text{平尾}}$,则水平尾翼的平均迎角增量为

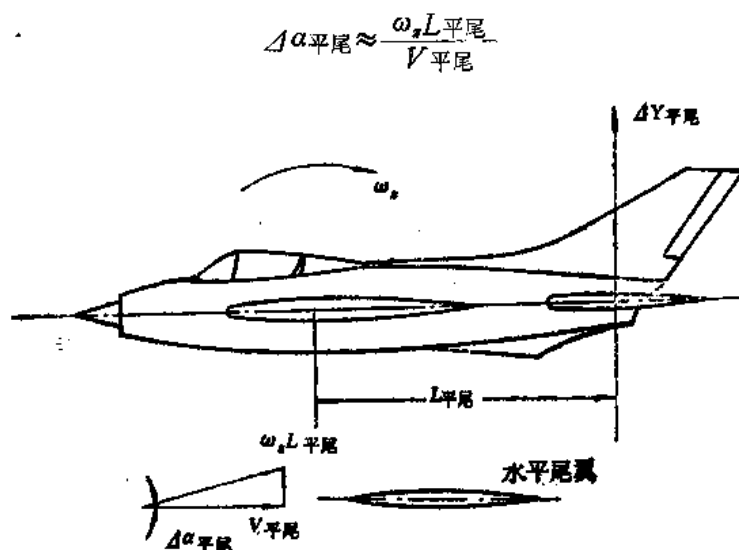


图 10-23

升力增量为:

$$\Delta Y_{\text{平尾}} = a_{\text{平尾}} \Delta \alpha_{\text{平尾}} k q S_{\text{平尾}} = a_{\text{平尾}} k q S_{\text{平尾}} \frac{\omega_z L_{\text{平尾}}}{V_{\text{平尾}}}$$

显然, $\Delta Y_{\text{平尾}}$ 对重心的力矩是阻止飞机转动的,其大小和方向由下式决定

$$M_{x_{\text{平尾}}}(\omega_z) = -\Delta Y_{\text{平尾}} L_{\text{平尾}} = -a_{\text{平尾}} k q S_{\text{平尾}} L_{\text{平尾}}^2 \frac{\omega_z}{V_{\text{平尾}}} \quad (10-29)$$

或者

$$m_{x_{\text{平尾}}}(\omega_z) = -a_{\text{平尾}} \sqrt{k} A \frac{L_{\text{平尾}}}{b_A} \omega_z \quad (10-30)$$

其中 $M_{x_{\text{平尾}}}(\omega_z)$, $m_{x_{\text{平尾}}}(\omega_z)$ 分别为水平尾翼产生的纵向阻尼力矩和纵向阻尼力矩系数;而无因次量 $\omega_z = \frac{\omega_z b_A}{V}$, $A = \frac{S_{\text{平尾}} L_{\text{平尾}}}{S b_A}$ 为平尾对重心的静矩系数。

由(10-29)式可见,飞机绕 oz_z 转动时,水平尾翼产生的纵向力矩,与转动角速度 ω_z 成正比,但方向与 ω_z 方向相反。

通常以阻尼力矩系数对 ω_z 的导数 $\bar{m}_{x_{\text{平尾}}}^{\omega_z}$ (即 $\frac{\partial m_{x_{\text{平尾}}}}{\partial \omega_z}$) 形式来表示 $m_{x_{\text{平尾}}}$ 与 ω_z 之间的关

系, $m_{\dot{\alpha}}^{\omega}$ 平尾表示单位角速度 ω 所产生的阻尼力矩系数的大小。将(10-30)式对 ω 求导数, 可得

$$m_{\dot{\alpha}}^{\omega} \text{平尾} = -\sqrt{k} A a_{\text{平尾}} \frac{L_{\text{平尾}}}{b_A} \quad (10-31)$$

可见要增大平尾阻尼力矩, 以增大 $L_{\text{平尾}}$ 值最有效, 因 $m_{\dot{\alpha}}^{\omega} \text{平尾}$ 与 $L_{\text{平尾}}$ 成比例。

2. 全机的阻尼力矩

正常式飞机机翼及机身的纵向阻尼力矩作用也占一定的百分比。但由于它和外形及 M 数的关系比较复杂, 当缺乏合适的估算曲线时, 也可用平尾的纵向阻尼导数乘一个放大系数来近似描述全机的纵向阻尼导数:

$$m_{\dot{\alpha}}^{\omega} = (1.1-1.25) m_{\dot{\alpha}}^{\omega} \text{平尾} \quad (10-32)$$

$m_{\dot{\alpha}}^{\omega}$ 随 M 数变化规律如图 10-24 所示。

实验结果表明, 如果飞行中 $d\alpha/dt \neq 0$, 所得阻尼力矩比上面计算的结果要大。其原因在于上面我们讨论阻尼力矩时只考虑旋转角速度 ω 引起的阻尼力矩, 而认为旋转过程中飞机(因而平尾)的迎角不变。

如果运动过程中, $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$, 则在

$$\alpha_{\text{平尾}} = \alpha + \varphi - \varepsilon$$

式中不仅 α 随时间而变, 而且 ε 也随时间而变。同时气流自机翼流到水平尾翼区域要有一段时间 τ , 其数值为

$$\tau \approx \frac{L_{\text{平尾}}}{V_{\text{平尾}}} = \frac{L_{\text{平尾}}}{\sqrt{k} V}$$

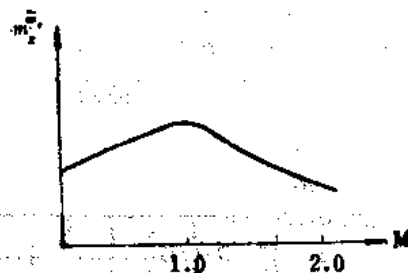


图 10-24

即瞬时 t 的机翼升力系数所对应的下洗角在 $(t+\tau)$ 时才真正作用于水平尾翼。因此水平尾翼处下洗角的变化比机翼迎角的变化落后一段时间 τ 。即这一瞬间水平尾翼的下洗角 ε 是 τ 前的机翼迎角 α 所决定的, 这一影响通常称为洗流时差影响。这样, 当 $d\alpha/dt > 0$ 时, 考虑时差影响, 水平尾翼的实际迎角要大一些(下洗角小了); 这个迎角的修正量 $\Delta\alpha_{\text{平尾}}$ 所形成的附加力矩也是起阻尼作用的, 称之为洗流时差力矩。

需注意的是, 阻尼力矩与静稳定力矩是有本质的区别的, 静稳定力矩是当飞机迎角偏离平衡迎角后, 产生了附加升力引起的, 它的大小直接取决于飞机与气流的相对位置 α 的偏离值与旋转角速度无关; 而阻尼力矩却是在转动过程中产生的, 它直接取决于转动角速度的大小, 一旦转动停止, 阻尼力矩也就消失。

二、飞机纵向扰动运动实例

飞机受外扰动作用偏离原来的纵向平衡状态, 而当外扰动取消后, 飞机迎角 α 、俯仰角 θ 和飞行速度 V 都会发生变化, 它的变化规律往往可由二组振动运动或一组振动运动和二个单调收敛(或发散)运动组合来描述。但前者较为常见。

研究飞机纵向扰动运动的统计结果表明,纵向扰动运动各个运动参数 V , α , θ 随时间变化规律往往由两个振动运动所组成。一个振动运动的周期很短,称为短周期运动。另一个振动运动的周期很长,称为长周期运动。

下面我们举一个典型例子,来说明飞机扰动运动的过程以及扰动运动可分为短周期运动和长周期运动两种典型模态的情况。

设某歼击机在 $H = 1000$ 米以速度 $V = 450$ 公里/小时停车下滑时受到突升气流的扰动,使迎角在 $t = 0$ 时改变 2.39° ,即 $\Delta\alpha_0 = 2.39^\circ$,而此时飞行速度和俯仰角没有变化,即 $\Delta V_0 = 0$, $\Delta\theta_0 = 0$ 。

通过计算可知,该扰动运动系由两个振动所组成,第一个振动运动的周期 T 和振幅减小到一半所需的时间 $t_{1/2}$ 为:

$$T = 3.1 \text{ 秒}, t_{1/2} = 0.27 \text{ 秒}。$$

由此可见,这一振动运动的周期很短,且衰减很快,称为短周期运动。近代飞机在低速飞行时,短周期运动的振动周期约为4—7秒,而 $t_{1/2}$ 约为0.5—1秒。

第二个振动运动的周期 T 和振幅减少到一半所需的时间 $t_{1/2}$ 为:

$$T = 72.3 \text{ 秒}, t_{1/2} = 46.2 \text{ 秒}。$$

由上可见,这一振动运动的周期很长,且衰减很慢,称为长周期运动。近代飞机长周期运动的振动周期可能从几十秒到几百秒,而 $t_{1/2}$ 很长,有时可能出现轻微的不稳定。

依据扰动起始条件,经运算后,求得本例的 ΔV , $\Delta\alpha^\circ$, $\Delta\theta^\circ$ 随时间的变化可以绘成如图10-25所示的扰动过程曲线。

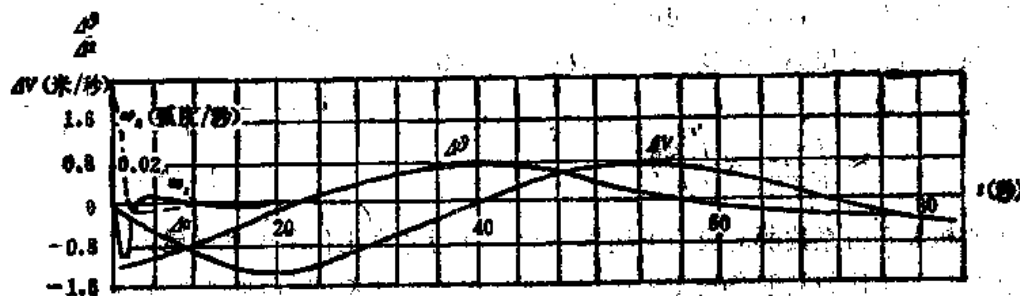


图 10-25

图10-26为图10-25在最初三秒钟内的放大图。

由图可见,扰动运动参数 ΔV , $\Delta\alpha$, $\Delta\theta$ 随时间而变化的规律是完全不相同的。 $\Delta\alpha$ 在很短时间内(在本例中约为一秒)就基本消失,而 ΔV 和 $\Delta\theta$ 却刚开始作周期很长的振动。可以看出, $\Delta\alpha$ 随时间的变化主要表现为短周期运动,而 ΔV 和 $\Delta\theta$ 随时间的变化则主要表现为长周期运动。

纵向扰动运动表现为以上两种在性质上截然不同的模态的物理原因,主要是因为飞机受到突升气流扰动后,很容易绕 z 轴旋转,因此迎角改变非常迅速,而飞机在扰动中的惯性却相当大,故在短时间内速度的改变非常缓慢。

在飞机受到扰动后的短时间内,迎角变化迅速消失,这表明飞机的纵向力矩获得了平衡,此后飞行速度和俯仰角作缓慢的周期性变化,这表明作用于飞机上的沿切线和法线方向

的外力还未获得平衡。如果长周期运动是稳定的，则经过一定时间后，外力必趋于平衡，速度和俯仰角的变化亦即随之消失。

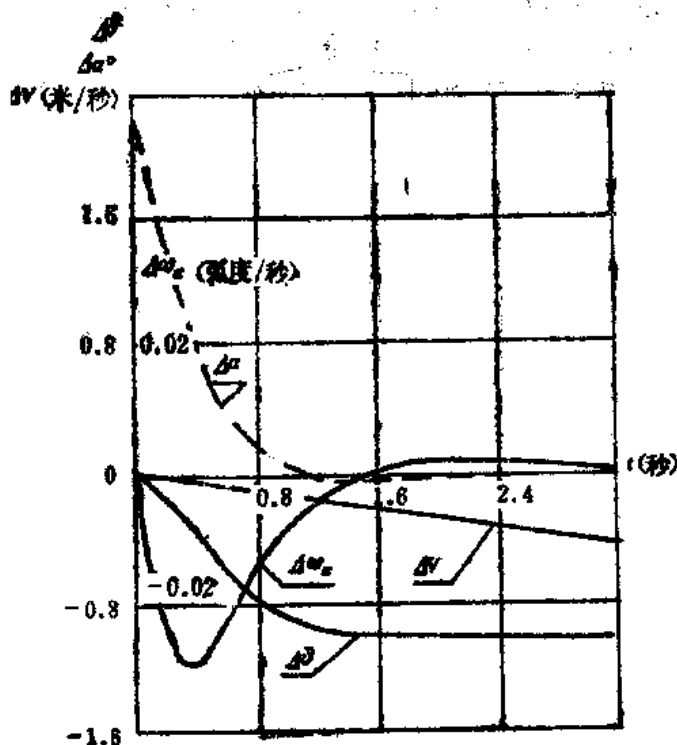


图 10-26

为了保证飞机具有良好的稳定性和操纵性，短周期运动必须稳定，且衰减得快。这是因为，短周期运动发展很快，如果不稳定，则迎角振幅增加极快，使驾驶员来不及操纵飞机，不能及时加以纠正，这是很危险的。衰减太慢，也会引起瞄准射击和操纵上的困难。所幸的是，对于具有一定阻尼和一定静稳定度的飞机，短周期运动总是稳定的，衰减也是比较快的。

在长周期运动（又称沉浮运动）中，飞机的速度和俯仰角作周期性变化。对于这种运动，虽然周期很长，运动发展很慢，但必须力求稳定。

练 习 题

10.1 飞机在某高度定直平飞，受到外界小扰动作用，使迎角减少 $\Delta\alpha$ ，具有静不稳定性的飞机将出现什么方向的附加力矩？

10.2 什么叫飞机的稳定性、静稳定性、静稳定性导数？它们之间的区别和联系何在？

10.3 怎么从力矩曲线判断飞机的静稳定性？

10.4 试论述平尾在纵向力矩平衡中的作用？

10.5 试从概念上分析无尾飞机、鸭式飞机（平尾在前，机翼在后）是怎样取得纵向力矩平衡的。

10.6 力矩曲线 $m_z - C_y$ 与平衡曲线 $\delta_z - C_y$ 之间有什么关系？

10.7 在风洞中测得某机的纵向力矩系数，得出如下数据（设全机 $\alpha_0 = 0$ ，又 m_z 与 α 为线性关系）

$\alpha_1 = 4^\circ$ 时	$m_{z1} = 0.005$
$\alpha_2 = 6^\circ$ 时	$m_{z2} = 0.0026$

已知 $C_{\dot{\gamma}} \approx 3.5$, 试确定该机的静稳定性 $m_{\dot{\gamma}}^c$. 又如只改变飞机重心位置, 测得 $\alpha_s = 4^\circ$ 时, $m_{\dot{\gamma}} = 0.0025$, 试求重心位置的相对移动量。

- 10.8 保持一定速度及一定 M 数 (例如在同温层范围) 随着飞行高度增加, $m_{\dot{\gamma}}^c$ 及 $M_{\dot{\gamma}}^c$ 怎样变化?
- 10.9 纵向扰动运动的两种典型模态是什么? 它们各有什么特征?
- 10.10 试分析飞机纵向扰动运动中两种典型模态的物理成因。

第十一章 飞机的横侧平衡及其稳定性和操纵性

§ 11-1 引言

我们讨论了纵向运动的平衡、稳定性和操纵性问题。这时飞机始终在与其对称面重合的铅垂面内运动。然而,实际飞行中还可能出现另一些飞行情况。如侧滑、滚转、偏航。这类运动可能由于外界干扰所引起;也可能是驾驶员有意操纵副翼和方向舵来实现。

通常把飞机绕 ox 轴的运动称为横向运动或称滚转运动;绕 oy 轴的运动称为航向运动。凡出现侧滑、航向和横向这三者之一,或同时具有其中几项运动的都称为横侧运动。

实际飞行中可能遇到的横侧运动是多种多样的,我们选择其中具有代表性的典型情况进行分析。本章只研究定常侧滑直线飞行时作用在飞机上的力和力矩以及横侧静稳定性;介绍横侧操纵面的作用;讨论实现定常侧滑直线飞行时飞机的平衡和静操纵性问题;介绍动稳定性概念。

§ 11-2 定常侧滑直线飞行时,作用在飞机上的侧力和横侧力矩及横侧静稳定性

侧滑飞行指飞机的速度矢量不在飞机的对称面内的飞行,速度矢与其在对称面上投影之间的夹角称为侧滑角 β 。由图11-1可见,

$$\sin \beta = \frac{V_z}{V}, \text{通常 } V_z \ll V, \text{所以 } \beta \approx \frac{V_z}{V}.$$

规定从驾驶员看相对风来自右翼, β 为正,反之为负。侧滑时,由于气流的非对称性,将在飞机上产生气动侧力 Z 和横侧力矩 M_x (滚转力矩)、 M_y (偏航力矩)。规定力和力矩矢量沿机体轴正向为正值。正侧滑时 ($\beta > 0$), 一般引起负的气动侧力和负的横侧力矩 ($Z < 0$; $M_x < 0$; $M_y < 0$)。

和纵向类似,侧滑时,飞机的侧力和横侧力矩特性也可以通过风洞试验、工程估算和试飞获得。习惯上,气动力和力矩都以系数形式给出。我们规定

$$C_z = \frac{Z}{qS} \quad (11-1)$$

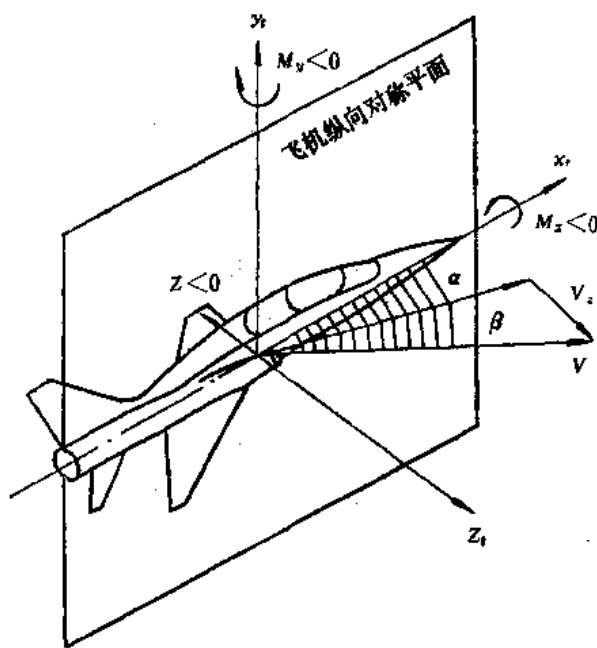


图 11-1

$$m_x = \frac{M_x}{qSl} \quad (11-2)$$

$$m_y = \frac{M_y}{qSl} \quad (11-3)$$

式中 l 为机翼的展长。

图 11-2 给出某机 $m_x - \beta$ 和 $m_y - \beta$ 的风洞试验结果。根据一般的处理原则，研究气动力和力矩随某一参数的变化情况时，如不注明，则认为其余有关参数取零值或常值。所以图 11-2 曲线对应于 ω_x, ω_y 等于零，且横侧操纵面（副翼和方向舵）处于中立位置（即无偏转）。由图可以看出，曲线大体呈线性变化规律。

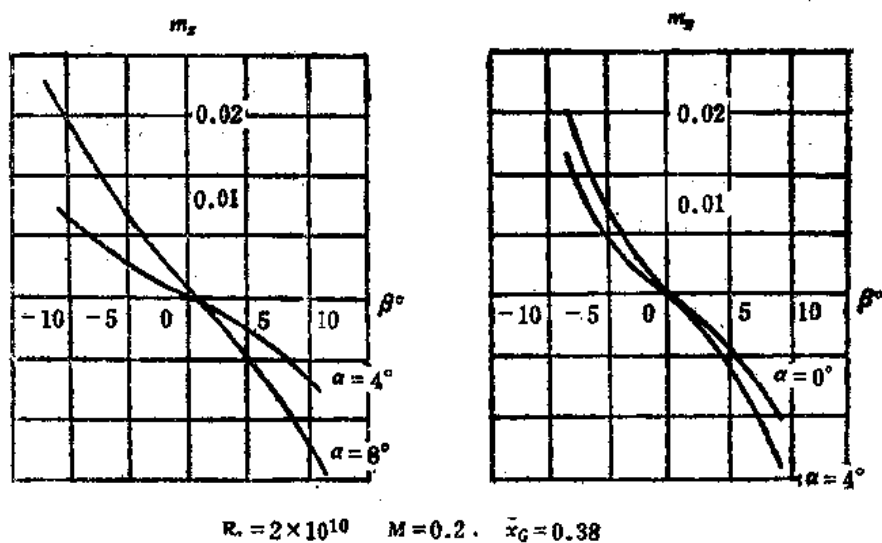


图 11-2

一、飞机的横侧静稳定性

和纵向力矩系数曲线的斜率 m_x^β (或 m_y^β) 的意义相类似，横侧力矩系数曲线的斜率也表示飞机的静稳定性。用 m_x^β 和 m_y^β 来表示飞机的横向静稳定性和航向静稳定性。如果 $m_x^\beta < 0$ ，则称飞机具有横向静稳定性；反之，则不具有横向静稳定性。同样，如果 $m_y^\beta < 0$ ，则称飞机具有航向静稳定性；反之，则不具有航向静稳定性。

类似于第十章关于纵向静稳定性的讨论，设想飞机原先作纵向定常直线飞行，由于偶然原因（如飞机的一侧受垂直阵风干扰，驾驶员的意外操纵等）使飞机倾斜了一个角度 γ （规定右翼下沉，倾斜角 γ 为正）。由于飞机的倾斜，升力 Y 在水平面内产生了分量，在此力的作用下，如图 11-3 所示，飞机将向右侧滑，产生正的 β 角。如果由于右侧滑而引起的横向力矩为负（即 $m_x^\beta < 0$ ），在此力矩作用下，飞机有减小 γ 到零的趋势；反之，如果横向力矩为正（ $m_x^\beta > 0$ ），则飞机有加大 γ 角趋势。同时，如果飞机右侧滑的结果，产生负的航向力矩（ $m_y^\beta < 0$ ），则飞机有减小原来侧滑角的趋势；反之，如果航向力矩为正（ $m_y^\beta > 0$ ），则有加大侧滑角的趋势。

综上所述，当 $m_x^\beta < 0$ ， $m_y^\beta < 0$ 时，飞机有恢复到原始飞行状态的趋势，故表明飞机是静稳定的。相应的，当这些导数为零时，表明飞机为中立稳定；导数为正值时，表明飞机静不稳定。

需要指出的是，具有航向静稳定性的飞机，并不意味着飞机有保持航向的趋势，而只表明飞机有减小侧滑的趋势，即飞机有始终迎着相对风方向的趋势，故有时也称航向静稳定性为“风标”静稳定性。

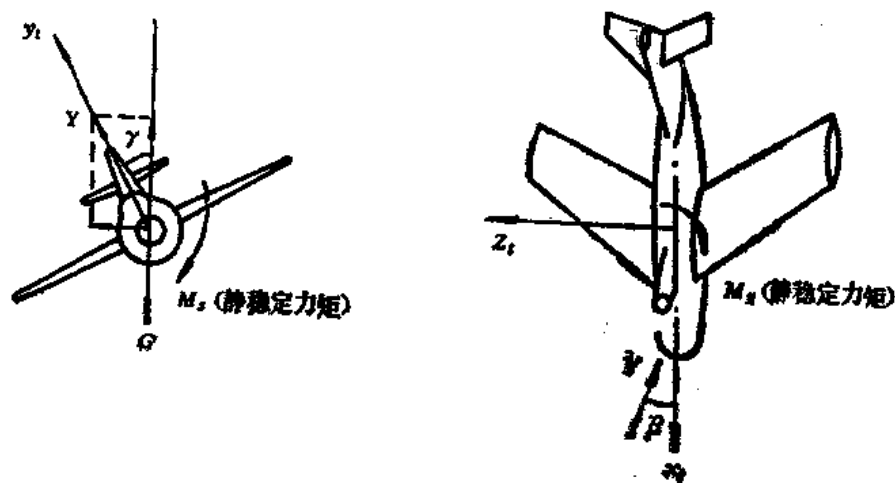


图 11-3

可见横侧力矩系数曲线斜率为负值时，飞机为横侧静稳定。曲线斜率数值的大小，反映了静稳定的程度。

二、定常侧滑直线飞行中，飞机的侧力

当飞机侧滑时，由于气流不对称地流过飞机，左右两侧的气动力分布发生了差异，于是产生了侧力。

侧滑时，产生侧力的主要部件是立尾和机身。机翼的侧力很小，可予忽略。

1. 机身的侧力

现代飞机的机身接近旋成体，故在定常侧滑直线飞行中，由侧滑引起的侧力类似于机身由于迎角产生的升力。此侧力的大小与机身的头部形状等因素有关，一般应根据实验的结果得出。写成侧力系数导数的形式为

$$C_{Y_{\beta}}^{\text{机身}} = -a_{\text{机身}} \frac{S_{\text{机身}}}{S} \quad (11-4)$$

式中 $S_{\text{机身}}$ 为机身的参考面积，可取为机身侧向投影面积；

$a_{\text{机身}} \approx C_{Y_{\beta}}^{\text{机身}}$ ，由实验确定出。

式(11-4)中负号是考虑正侧滑，故产生负侧力。

2. 立尾的侧力

在定常侧滑直线飞行时立尾的侧向力，在飞行侧滑角范围内，可认为与 β 成线性关系，即

$$Z_{\text{立尾}} = -a_{\text{立尾}} \beta k q S_{\text{立尾}} \quad (11-5)$$

化成侧力系数后得

$$C_{Y_{\beta}}^{\text{立尾}} = \frac{Z_{\text{立尾}}}{qS} = -k a_{\text{立尾}} \beta \frac{S_{\text{立尾}}}{S} \quad (11-6)$$

所以

$$C_{z\text{立尾}}^{\beta} = \frac{\partial C_{z\text{立尾}}}{\partial \beta} = -k a_{\text{立尾}} \frac{S_{\text{立尾}}}{S} \quad (11-7)$$

式中 k 为立尾速度阻滞系数, 初步近似中可认为等于水平尾翼的速度阻滞系数;

$a_{\text{立尾}}$ 为立尾的侧力系数曲线的斜率;

$S_{\text{立尾}}$ 为立尾的面积。

3. 全机的侧力

全机的侧力近似认为由机身和立尾的侧力叠加而得。

$$C_z = C_{z\text{身}} + C_{z\text{立尾}} \quad (11-8)$$

或

$$C_z^{\beta} = C_{z\text{身}}^{\beta} + C_{z\text{立尾}}^{\beta}$$

三、定常侧滑直线飞行中的横侧力矩

初步分析估算时, 忽略部件干扰的影响, 侧滑时产生的飞机横侧力矩, 可看作是作用在机翼、机身和立尾的横侧力矩叠加而成。现按部件分别讨论如下:

1. 机翼的横侧力矩

定常侧滑直线飞行中, 机翼的上反角、后掠角和翼尖的局部形状都对横侧力矩有影响。

对于给定的机翼外形, 初步分析时可近似地认为上述作用可线性叠加。

(1) 上反效应 机翼的上反角按第六章的定义, 是指机翼各个剖面的焦点连线在垂直于对称面的平面 (y_z 面) 上的投影与通过翼根弦且垂直于对称面的平面 (x_z 面) 之间的夹角。用 ϕ 表示。焦点连线在 y_z 面上的投影在 oz 轴之上者 $\phi > 0$, 称为上反角。反之, 称为下反角。见图 11-4(a)。

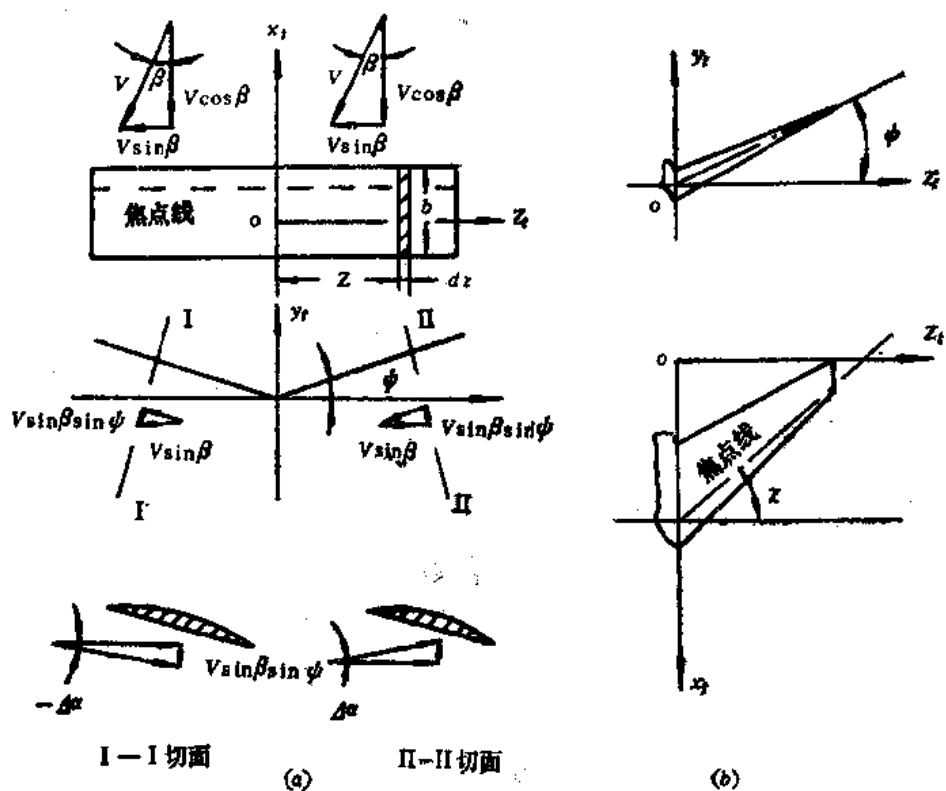


图 11-4

对于具有后掠角的机翼的上反角,如图 11-4(b) 所示。

具有上反角的机翼在侧滑时,左右两半翼有效迎角不等,如图 11-4(a) 所示。设机翼向右侧滑,侧滑角为 β 。可将气流速度 V 分解为垂直于及平行于对称面的两个分速 $V \sin \beta$ 和 $V \cos \beta$,其中 $V \cos \beta$ 对左右机翼的作用一样。而垂直于对称面的分速 $V \sin \beta$ 在有上反角的情况下,又可以进一步分解为垂直于及平行于机翼弦面的两个分速 $V \sin \beta \sin \psi$ 和 $V \sin \beta \cos \psi$,平行分速 $V \sin \beta \cos \psi$ 对机翼压力分布的影响可忽略,而垂直分速对左右机翼来讲,大小相等方向相反,使得右边机翼迎角增加,升力加大,左翼迎角减小,升力减小,产生了负的滚转力矩。

两半翼微段的迎角增量分别为:

$$\begin{cases} \Delta \alpha_{\text{右}} \approx \tan \Delta \alpha_{\text{右}} = \frac{V \sin \beta \sin \psi}{V \cos \beta} = \beta \psi \\ \Delta \alpha_{\text{左}} \approx \tan \Delta \alpha_{\text{左}} = -\frac{V \sin \beta \sin \psi}{V \cos \beta} \approx -\beta \psi \end{cases} \quad (11-9)$$

因此,在机翼微段上升力增量为

$$\begin{cases} \Delta Y_{\text{右}} = C_y^a(\beta \psi) \frac{1}{2} \rho V^2 \cos^2 \beta \Delta S \\ \Delta Y_{\text{左}} = C_y^a(-\beta \psi) \frac{1}{2} \rho V^2 \cos^2 \beta \Delta S \end{cases} \quad (11-10)$$

由此而引起的滚转力矩

$$\Delta M_x = \Delta Y_{\text{左}} z - \Delta Y_{\text{右}} z$$

代入(11-10)式后,沿半翼展积分并化为力矩系数形式得

$$m_{x\psi} = \frac{M_x}{\frac{1}{2} \rho V^2 S l} = -2 C_y^a \beta \psi \frac{1}{4} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{z \cdot b dz}{\left(\frac{l}{2}\right) \left(\frac{S}{2}\right)}$$

上式的积分号内 b 为剖面弦长, $b dz$ 为机翼微段面积,故此积分表示半个机翼的面积中心离对称面的距离再除以半翼展 $l/2$,用 z 形表示。这样

$$m_{x\psi} = -\frac{1}{2} C_y^a \beta \psi z_{\text{形}} \quad (11-11)$$

将(11-11)式对 β 求导数,得

$$m_{x\psi}^a = -\frac{1}{2} C_y^a \psi z_{\text{形}} \quad (11-12)$$

由上式可见,如果飞机具有上反角($\psi > 0$),则 $m_{x\psi}^a < 0$ 。即在定常侧滑直线飞行中,上反角起横向静稳定的作用,叫上反效应。

(2) 机翼后掠角的影响 机翼的后掠角是指机翼各个剖面焦点连线在垂直于对称面且通过机翼根弦平面上的投影与 oz_i 轴之间的夹角,用 χ 表示,见图 11-5。

当后掠机翼作侧滑运动时,左右两半机翼的有效速度和有效迎角不等,使得左右机翼升

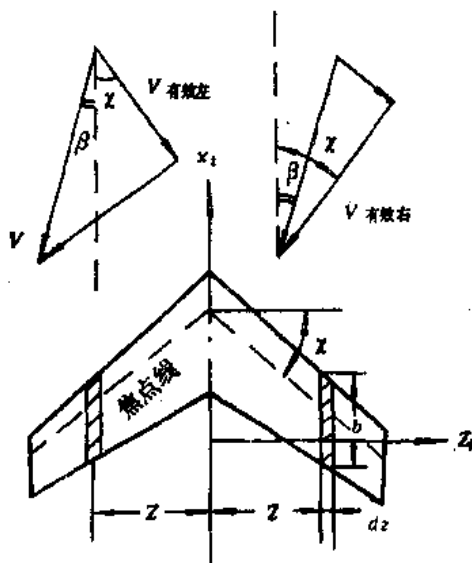


图 11-5

力不等而产生横向力矩。

设机翼向右侧滑，侧滑角为 β ，将流过左右两半翼的气流速度 V 分解为垂直于和平行于焦点联线的两个分速。垂直于焦点联线的分速称为有效速度，由图11-5可见，若右侧滑时，右翼有效速度大于左翼有效速度，因此右翼的升力比左翼大，产生负横向力矩。

左右两半翼的有效速度为

$$V_{\text{有效右}} = V \cos(\chi - \beta)$$

$$V_{\text{有效左}} = V \cos(\chi + \beta)$$

(11-13)

按照机翼迎角的定义，它为速度 V 在对称面上的投影与对称面翼弦的夹角。由图 11-6 可见

$$\sin \alpha = \frac{V_y}{V \cos \beta}$$

所以 $V_y = V \cos \beta \sin \alpha$

(11-14)

式中 V_y 为对称面上 $V \cos \beta$ 在垂直翼弦之分量。

对后掠机翼的有效迎角 $\alpha_{\text{有效}}$ 为

$$\sin \alpha_{\text{有效}} = \frac{V_y}{V_{\text{有效}}} \quad (11-15)$$

在 α 和 β 很小时， $\cos \alpha \approx 1$ ， $\sin \alpha \approx \alpha$ ， $\cos \beta \approx 1$ ， $\sin \beta \approx \beta$ 。将(11-13)式、(11-14)式代入(11-15)式则后掠机翼的两半翼有效迎角为

$$\begin{cases} \alpha_{\text{有效右}} \approx \sin \alpha_{\text{有效右}} = \frac{V \cos \beta \sin \alpha}{V \cos(\chi - \beta)} \approx \frac{\alpha}{\cos(\chi - \beta)} \\ \alpha_{\text{有效左}} \approx \sin \alpha_{\text{有效左}} = \frac{V \cos \beta \sin \alpha}{V \cos(\chi + \beta)} \approx \frac{\alpha}{\cos(\chi + \beta)} \end{cases} \quad (11-16)$$

两边距对称面 Z 的机翼微段升力为

$$\Delta Y_{\text{右}} = \frac{\alpha}{\cos \chi} \frac{\alpha}{\cos(\chi - \beta)} \frac{1}{2} \rho V^2 \cos^2(\chi - \beta) \Delta S$$

$$\Delta Y_{\text{右}} = \frac{C_y}{\cos \chi} \frac{1}{2} \rho V^2 \cos(\chi - \beta) \Delta S$$

同理

$$\Delta Y_{\text{左}} = \frac{C_y}{\cos \chi} \frac{1}{2} \rho V^2 \cos(\chi + \beta) \Delta S$$

(11-17)

由于左、右翼升力不等，而产生的横向力矩为

$$\Delta M_x = \Delta Y_{\text{左}} Z - \Delta Y_{\text{右}} Z$$

将(11-17)式代入并沿半翼展积分后，化为力矩系数形式

$$m_{ax} = -\frac{1}{2} C_y \tan \chi \beta^2 \quad (11-18)$$

将(11-18)式对 β 求导数得

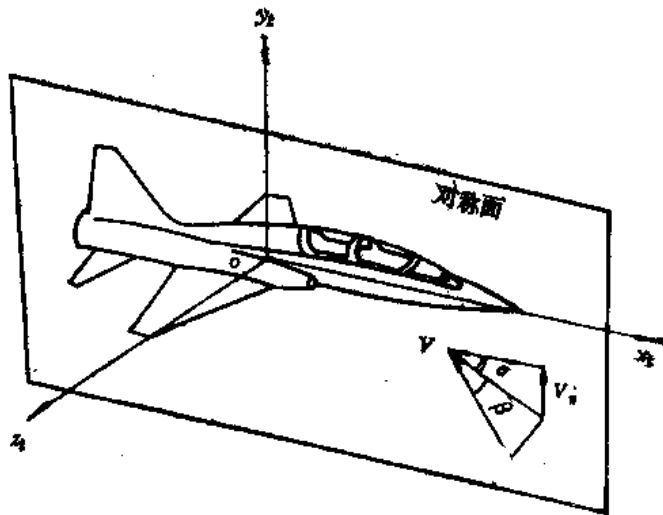


图 11-6

$$m_{\delta_x}^{\delta} = -\frac{1}{2}C_{\delta} \operatorname{tg} \chi \delta_{\text{形}} \quad (11-19)$$

由上式可见， $m_{\delta_x}^{\delta}$ 为负值，所以后掠角起横向静稳定作用，且与 C_{δ} ， χ ， $\delta_{\text{形}}$ 成正比。

应当指出，由于 $m_{\delta_x}^{\delta}$ 与 C_{δ} 成正比，飞机在不同状态（不同 C_{δ} ）飞行时，后掠角所起的横向静稳定作用不一样。

由于后掠角和上反角两者都起横向静稳定作用，后掠翼飞机的横向静稳定度就有可能太大，特别是在大迎角飞行时，为了抵消后掠角

24
1 / _

重心的距离和机身侧面积的大小。 $Z_{\text{立尾}}$ 一般作用在飞机重心之前，因此产生正的航向力矩见图 11-8。在这种情况下，机身起航向静不稳定作用。

计算机身的航向力矩时，通常按照试验结果或采用经验公式。

3. 立尾的横侧力矩

侧滑时作用于立尾的侧向力 $Z_{\text{立尾}}$ 要产生对 ox_z 轴的横向力矩和对 oy_z 轴的航向力矩。

侧向力引起的横向力矩为（见图 11-9）

$$M_{\text{立尾}} = Z_{\text{立尾}} y_{\text{立尾}}$$

式中 $y_{\text{立尾}}$ 为侧向力作用点至 ox_z 轴的垂直距离。

将(11-5)式代入上式得

$$m_{\text{立尾}} = -a_{\text{立尾}} \beta k q S_{\text{立尾}} y_{\text{立尾}}$$

化成横向力矩系数：

$$\begin{aligned} M_{\text{立尾}} &= \frac{M_{\text{立尾}}}{q S l} \\ m_{\text{立尾}} &= -k a_{\text{立尾}} \frac{S_{\text{立尾}}}{S} \frac{y_{\text{立尾}}}{l} \beta \end{aligned} \quad (11-22)$$

将上式对 β 求导数得

$$m_{\beta}^{\text{立尾}} = -k a_{\text{立尾}} \frac{S_{\text{立尾}} y_{\text{立尾}}}{S l} \quad (11-23)$$

由上式可见，侧滑时立尾是起横向静稳定作用的。

侧向力引起的航向力矩为（见图 11-8）

$$M_{\text{立尾}} = Z_{\text{立尾}} L_{\text{立尾}}$$

将(11-5)式代入上式得

$$M_{\text{立尾}} = -a_{\text{立尾}} \beta k q S_{\text{立尾}} L_{\text{立尾}}$$

化成航向力矩系数：

$$\begin{aligned} m_{\text{立尾}} &= \frac{M_{\text{立尾}}}{q S l} = -k a_{\text{立尾}} \frac{S_{\text{立尾}} L_{\text{立尾}}}{S l} \beta \\ &= -k a_{\text{立尾}} A_{\text{立尾}} \beta \end{aligned} \quad (11-24)$$

式中 $A_{\text{立尾}}$ 为立尾静矩系数，它等于

$$A_{\text{立尾}} = \frac{S_{\text{立尾}} L_{\text{立尾}}}{S l} \quad (11-25)$$

$L_{\text{立尾}}$ 为重心至立尾面积中心的距离，见图 11-8。

将(11-24)式对 β 求导数后得

$$m_{\beta}^{\text{立尾}} = -k a_{\text{立尾}} A_{\text{立尾}} \quad (11-26)$$

由此可见，立尾起航向静稳定作用。 $A_{\text{立尾}}$ 在保证航向稳定中起着非常重要作用。对现代飞机， $A_{\text{立尾}}$ 值在以下范围内：

$$0.05 \leq A \leq 0.20$$

由于飞机的 $m_{\beta}^{\text{立尾}}$ 主要由立尾提供，所以调整 $m_{\beta}^{\text{立尾}}$ 大小的方法主要是改变结构参数 $S_{\text{立尾}}$ 或 $L_{\text{立尾}}$ 。但立尾和

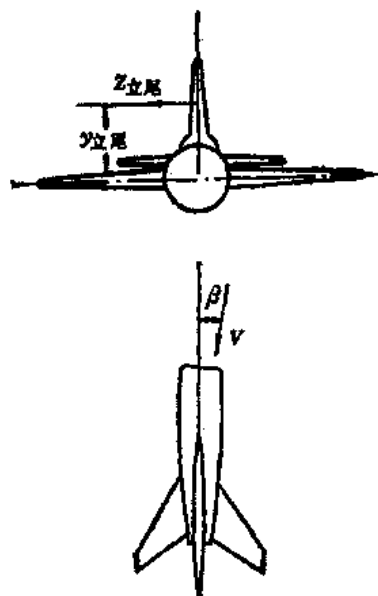


图 11-9

平尾有一定的相对位置，立尾不能单独地过分前移或后移，亦即 $L_{立尾}$ 的调整范围是不大的，否则将影响平尾位置安排。因此飞机设计师们常以改变立尾面积 $S_{立尾}$ 的办法来调整 m_x^{β} ，有时还在机身后上部安装背鳍或在机身后下部装上腹鳍，以增大 m_x^{β} 。

4. 全机的横侧力矩

将上述机翼、机身和立尾所产生的横向力矩叠加后即全机力矩。用横向力矩系数对侧滑角 β 导数表示

$$m_x^{\beta} = m_{x\beta}^{\beta} \text{机翼} + m_{x\beta}^{\beta} \text{立尾} = +m_{x\beta 0}^{\beta} + m_{x\beta \psi}^{\beta} + m_{x\beta \chi}^{\beta} + m_{x\beta}^{\beta} \text{立尾} \quad (11-27)$$

为了说明影响横向力矩各因素的主次，以某超音速歼击机 m_x^{β} 的估算结果为例。该飞机为三角翼，机翼 2° 下反。计算条件 $M=0.6$ ， $\alpha=8^\circ$ ，见表 11-1。

表 11-1

	全 机	下 反 角	后 掠 角	立 尾	其 它
m_x^{β}	-0.00234	+0.000149	-0.00139	-0.00139	+0.000291

可见，侧滑飞行时，产生横向力矩的主要因素是机翼（后掠角、上反角）和立尾。

全机的航向力矩由上述机翼、机身和立尾等各部件的航向力矩叠加而得。写成力矩系数对 β 的导数为

$$m_y^{\beta} = m_{y\beta}^{\beta} \text{翼} + m_{y\beta}^{\beta} \text{身} + m_{y\beta}^{\beta} \text{立尾} \quad (11-28)$$

上述超音速歼击机，在 $M=0.6$ ， $\alpha=8^\circ$ 时， m_y^{β} 的估算结果见表 11-2。

表 11-2

	全 机	机 身	立 尾	其 它
m_y^{β}	-0.00385	+0.00144	-0.00579	+0.0005

可见，立尾是产生航向静稳定力矩的主要部件。

综合以上对侧力和横侧力矩的分析，在纵向定常直线飞行中，因为侧滑角等于零，气流对称地流过左右机翼、机身和立尾，因此没有侧力和横侧力矩。而在定常侧滑直线飞行中，主要由于机翼的上反角、后掠角和立尾的作用，使飞机具有横向静稳定性；而航向静稳定性主要是由立尾来保证的；侧力主要由机身和立尾产生。

四、空气压缩性对横侧静稳定性的影响

飞机的横向静稳定性主要是由机翼的上反角、后掠角和立尾来保证的；飞机的航向静稳定性主要是由立尾来保证，所以，分析空气压缩性对横向和航向静稳定性的影响时，只要分析它对上述各因素的作用就可以了。

前面已推出由于上反角、后掠角和立尾对横向静稳定导数作用的公式：

$$m_{x\psi}^{\beta} = -\frac{1}{2} C_{y\psi}^{\alpha} \chi^2 \text{形} \quad (11-12)$$

$$m_{x\chi}^{\beta} = -\frac{1}{2} C_{y\chi}^{\alpha} \chi^2 \text{形} \quad (11-19)$$

$$m_{\xi}^{\text{立尾}} = -k a_{\text{立尾}} \frac{S_{\text{立尾}}}{S} \frac{y_{\text{立尾}}}{L} \quad (11-23)$$

可见,除了飞机的几何尺寸以外,影响横向静稳定性的因素就是升力系数 C_y 、升力系数曲线斜率 C_y' 和 $a_{\text{立尾}}$ 。考虑空气压缩性影响时,不同 M 数的 C_y 、 C_y' 和 $a_{\text{立尾}}$ 不同,因而飞机的横向静稳定性也发生变化。具体的变化情况需根据飞机布局而定。图 11-10 示出几架典型歼击机 $m_{\xi}^{\text{立尾}}$ 随 M 数的变化情况。

由图可见,随着 M 数增加,总的趋势是横向静稳定性减小。图中 $\chi = 25^\circ$ 中的歼击机,在 M 数为 1 附近出现了横向静不稳定的情况。

前已推出,立尾对航向静稳定性的影响的公式为

$$m_{\eta}^{\text{立尾}} = -k a_{\text{立尾}} A_{\text{立尾}} \quad (11-26)$$

可见, M 数对航向静稳定性的影响,主要是通过 $a_{\text{立尾}}$ 的变化来体现。图 11-11 示出某歼击机的 $m_{\eta}^{\text{立尾}}$ 随 M 数变化曲线。

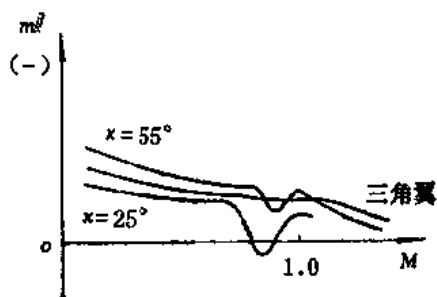


图 11-10

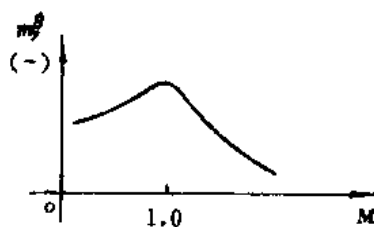


图 11-11

§ 11-3 定常侧滑直线飞行时,飞机的横侧平衡和静操纵

一、副翼及方向舵偏转时产生的侧力和横侧力矩

当方向舵和副翼偏转时,将产生绕飞机重心的横侧力矩。在舵面偏转不大的范围内,可认为横侧力矩是舵偏角的线性函数,力矩曲线仅仅作平行的移动(见图 11-12)。分别讨论如下:

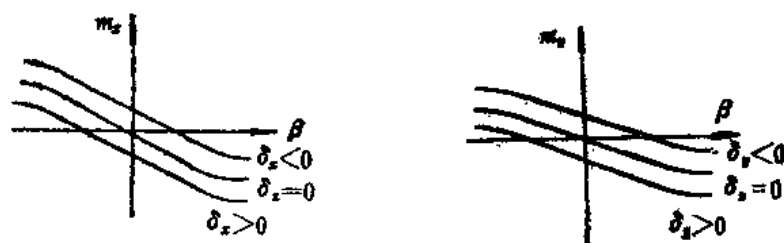


图 11-12

1. 副翼偏转时所产生的横向力矩

飞机横向操纵的主要机构是副翼。副翼操纵系统的机构是这样的,驾驶杆(或转动驾驶

盘)右偏时,右副翼上偏,左副翼下偏;反之,则右副翼下偏,左副翼上偏。

由于副翼的偏转,使机翼的展向气动力载荷分布发生变化。图 11-13 示出驾驶杆左偏后载荷分布变化情况。由图可见,由于右副翼下偏,升力增加;左副翼上偏,升力减小,就构成了横向操纵力矩。副翼偏转 δ_a 时,其作用相当于机翼迎角改变了 $n_a \delta_a^\circ$,副翼所在剖面升力系数的增量为

$$\Delta C_y = C_y^\alpha n_a \delta_a = a n_a \delta_a \quad (11-29)$$

式中 a 是剖面的升力系数曲线斜率,按无侧滑时顺气流方向计算的;

δ_a 为副翼偏角。一般它是在铅垂于副翼铰链轴的平面上测量的。它的正负号规定为,以右副翼为准,下偏为正,上偏为负。

n_a 为副翼效率。它表示副翼偏 1° 时相当于剖面迎角的增量。一般它由实验得出或按经验公式计算出。

假如副翼所在的位置上,机翼各个剖面的升力系数曲线斜率都相等,则按图 11-14 表示的几何关系不难得出副翼偏转所引起的横向力矩

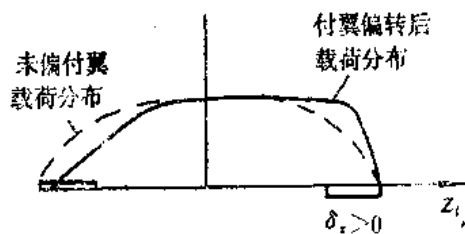


图 11-13

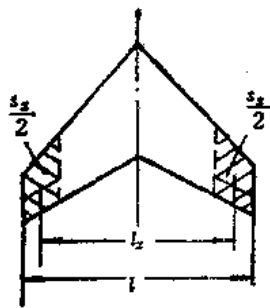


图 11-14

$$M_{a\text{副}} = -a n_a \delta_a \frac{l_a}{2} S_a q$$

式中 S_a 为副翼所在位置处机翼的面积,见图 11-14;

l_a 为左右机翼的 $\frac{S_a}{2}$ 面积中心之间的距离;

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2.$$

上式右端之所以加负号是因为右副翼下偏时, $\delta_a > 0$, 它引起负的横向力矩。

将上式化为力矩系数形式并对副翼偏角求导数后得出

$$m_{\delta_a}^{\delta_a} = -\zeta a n_a \frac{S_a}{S} \frac{l_a}{2l} \quad (11-30)$$

式中 ζ 是对 a 三元修正系数。副翼偏转后,对全翼展升力系数都有变化,同时翼尖处升力系数应为零(见图 11-13),由于上述因素故乘以修正系数,此数一般由实验或经验公式给出。

导数 $m_{\delta_a}^{\delta_a}$ 表示副翼偏转 1° 所产生的横向力矩系数。它说明副翼对飞机滚转的操纵能力,故称为副翼的操纵效能。从上式可见,导数 $m_{\delta_a}^{\delta_a}$ 与侧滑角无关,故在图 11-12 上,对应不同的副翼偏转角,力矩曲线 $m_{\delta_a}^{\delta_a} - \beta$ 上下平移。另 $m_{\delta_a}^{\delta_a}$ 为负值,故 $\delta_a > 0$ (右副翼下偏)时,

$m_x < 0$, 产生左滚力矩, 反映在图 11-12 上, $m_x - \beta$ 曲线下移, 此下移量与 $m_{x\beta}^*$ 的数值有关, 因此图 11-12 反映了副翼的操纵效能。

此外, 副翼偏转时, 不但升力不同, 而且阻力也不同, 这使得升力和阻力在体轴 ox_z 轴上的投影也不等, 形成了偏航力矩。通常副翼下偏的一方, 机翼的阻力大一些, 所以右副翼下偏得到负方向的航向力矩, 见图 11-15。在此力矩作用下, 机头右偏产生负的侧滑角。由于飞机具有横向静稳定性, 故负的侧滑角引起使飞机向右滚转力矩, 这就部分抵消了右副翼下偏的效果。所以, 这部分力矩是设计中所不希望有的。为了减小它, 通常采用所谓“差动副翼”, 它使得驾驶杆偏转时, 左右副翼偏角不等 (向上偏角大, 向下偏角小), 相对增加了副翼上偏那一边机翼的阻力, 减少了偏航力矩。

选用了差动副翼后, 由偏副翼所引起的航向力矩便可忽略不计。此时的 δ_x , 应取左、右副翼偏角的平均值。

2. 方向舵偏转所产生的侧力和横侧力矩

方向舵偏转时, 相当于立尾处的气流侧滑角发生变化, 引起了附加的侧向气动力。在此侧力作用下, 同时产生横向和航向力矩, 见图 11-16。

如果偏转方向舵所相当的侧滑角变化表达

为

$$\Delta\beta = n_y \delta_y \quad (11-31)$$

式中 n_y 为方向舵效率。它表示方向舵偏转 1° 相当于立尾处侧滑角增加的度数。由实验或经验公式得出:

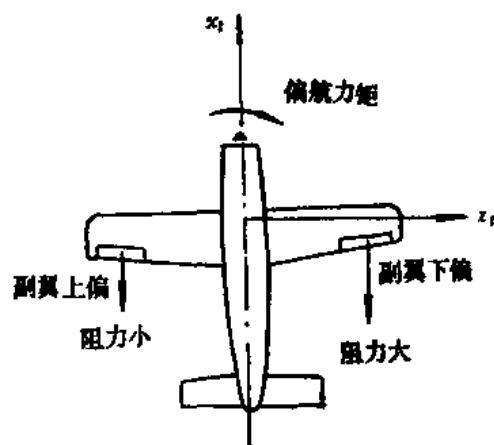
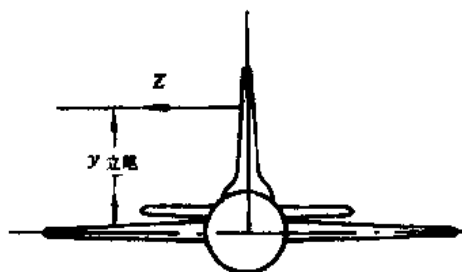


图 11-15

图 11-16

δ_y 为方向舵偏角。规定右偏为正, 即驾驶员蹬右舵为正, 见图 11-16。

从立尾的侧力公式(11-6)导出

$$C_{y\delta}^{\delta} = -k a_{\text{立尾}} n_y \frac{S_{\text{立尾}}}{S} \quad (11-32)$$

从图及 11-16 及式(11-22)和式(11-24)导出

$$m_{\delta_r}^{\delta_r} = -k a_{\text{立尾}} n_y \frac{S_{\text{立尾}}}{S} \frac{y_{\text{立尾}}}{l} \quad (11-33)$$

$$m_{\delta_r}^{\delta_r} = -k a_{\text{立尾}} A_{\text{立尾}} n_y \quad (11-34)$$

导数 $m_{\delta_r}^{\delta_r}$ 表示方向舵偏转 1° 所产生的航向力矩系数。它说明方向舵对航向的操纵能力，故称为方向舵的操纵效能。从上式可见， $m_{\delta_r}^{\delta_r}$ 与侧滑角无关，故在不同的方向舵偏角下，图(11-12)的 $m_y - \beta$ 曲线平行移动。另外，此导数为负值，故 $\delta_r > 0$ (方向舵右偏) 时， $m_y < 0$ ，产生使机头右偏的力矩，反映在图 11-12 上， $m_y - \beta$ 曲线下移。此下移量与 $m_{\delta_r}^{\delta_r}$ 的数值有关，因此图 11-12 也反映了方向舵的操纵效能。

可见，偏转副翼产生横向力矩，偏转方向舵主要产生航向力矩，同时也产生侧力和横向力矩。说明飞机的横向和航向操纵，是互相关联的。不同的副翼偏角和不同的方向舵偏角下， $m_x - \beta$ 、 $m_y - \beta$ 曲线的移动量反映了副翼和方向舵的操纵效能。

二、定常侧滑直线飞行时，飞机的侧力和横侧力矩的平衡

在定常侧滑直线飞行中，为了使侧力和横侧力矩获得平衡，副翼和方向舵应如何偏转，这是本节讨论的内容。飞机作侧滑飞行时，会引起阻力增加，所以正常情况总希望保持对称飞行。但在某些场合，例如侧风着陆时，为了对准跑道则往往采用带侧滑的进场飞行方式。

1. 侧风降落

如图 11-17，设飞机降落时有风速为 W 的右侧风，且与跑道垂直。在此情况下，飞机必须以正侧滑角 $\beta \approx W/V$ 下滑，才能使飞机对准跑道。此时飞机受有侧向力和横侧力矩。为了保持飞机的平衡，驾驶员必须偏转副翼以平衡滚转力矩；偏转方向舵以平衡偏航力矩；倾斜飞机以使重力分量平衡侧力(见图 11-18)。如认为侧滑角 β 、倾斜角 γ 、副翼偏角 δ_a 和方向舵偏角 δ_r 都是小角度，则根据侧向力和力矩平衡条件，可写出下列横侧平衡方程组：

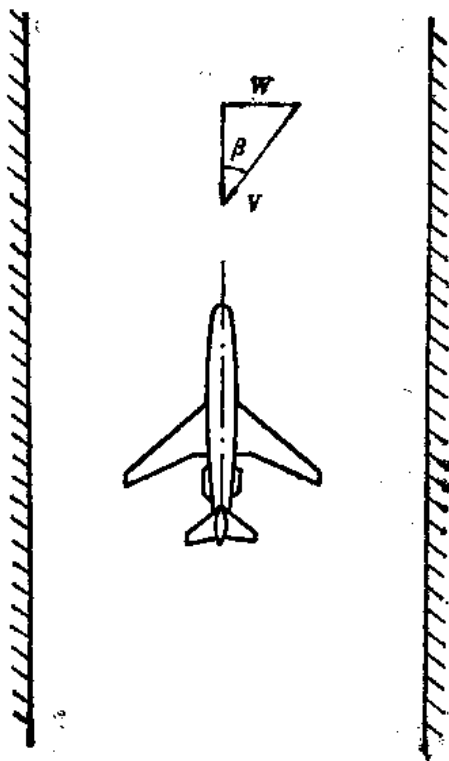


图 11-17

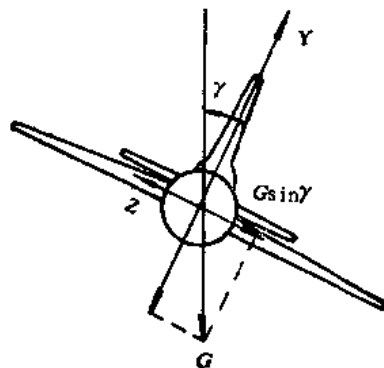


图 11-18

侧力平衡:

$$Z^{\beta}\beta + Z^{\delta_y}\delta_y + G\sin\gamma = 0$$

从图 11-18 可知

$$Y = G\cos\gamma$$

在 γ 角不大时, 取 $\sin\gamma \approx \gamma$, $\cos\gamma \approx 1$, 则

$$Y \approx G$$

侧力平衡式改写为

$$Z^{\beta}\beta + Z^{\delta_y}\delta_y + Y\gamma = 0$$

化成系数形式为

$$C_z^{\beta}\beta + C_z^{\delta_y}\delta_y + C_y\gamma = 0 \quad (11-35)$$

同样可写成横向和航向力矩的平衡式, 化成为力矩系数形式为

$$m_x^{\beta}\beta + m_x^{\delta_a}\delta_a + m_x^{\delta_y}\delta_y = 0 \quad (11-36)$$

$$m_y^{\beta}\beta + m_y^{\delta_y}\delta_y = 0 \quad (11-37)$$

2. 定常直线侧滑飞行的横侧平衡方程组

以上推导中, 虽然问题是从侧风着陆提出的, 但实际上对带倾斜的定常侧滑直线飞行情况都是适用的。

$$C_z^{\beta}\beta + C_z^{\delta_y}\delta_y + C_y\gamma = 0 \quad (11-35)$$

$$m_x^{\beta}\beta + m_x^{\delta_a}\delta_a + m_x^{\delta_y}\delta_y = 0 \quad (11-36)$$

$$m_y^{\beta}\beta + m_y^{\delta_y}\delta_y = 0 \quad (11-37)$$

在已知侧滑角 β 的情况下, 由该方程组可解出所需的副翼及方向舵偏角以及飞机的倾斜角 γ ,

$$\left. \begin{aligned} \delta_a &= -\frac{m_x^{\beta}}{m_x^{\delta_a}} \left(1 - \frac{m_x^{\delta_y} m_y^{\beta}}{m_x^{\beta} m_y^{\delta_y}} \right) \beta \\ \delta_y &= -\frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_y}} \beta \\ \gamma &= -\frac{C_y}{C_z} \left(1 - \frac{C_z^{\delta_y} m_y^{\beta}}{C_z^{\beta} m_y^{\delta_y}} \right) \beta \end{aligned} \right\} \quad (11-38)$$

若以 γ 为参变量, 则解得:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -\frac{C_y}{C_z^{\beta} - C_z^{\delta_y} \frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_y}}} \gamma \\ \delta_a &= \frac{C_y}{m_x^{\delta_a}} \frac{m_x^{\delta} - m_x^{\delta_y} \left(\frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_y}} \right)}{C_z^{\beta} - C_z^{\delta_y} \left(\frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_y}} \right)} \gamma \\ \delta_y &= \frac{C_y}{m_y^{\delta_y}} \frac{m_y^{\beta}}{C_z^{\beta} - C_z^{\delta_y} \left(\frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_y}} \right)} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (11-39)$$

由(11-38)式可见, δ_a 、 δ_y 和 γ 都与 β 成正比。所以, β 越大, 所需副翼及方向舵的偏角也越大。飞机设计中, 往往需要根据飞机实际可能遇到的侧风大小来实验副翼和方向舵的偏角是否足够。

3. 横侧操纵面偏角平衡曲线

考虑定常侧滑直线飞行的横侧问题，常常要确定 $\delta_a - \gamma$ 和 $\delta_r - \gamma$ 的关系曲线，称为横侧操纵面偏角平衡曲线。它表示在不同 γ (或 β) 下，平衡横侧力矩所需要的 δ_a 和 δ_r 。在 γ 不大的情况下，此种关系可由(11-39)式确定，对给定的飞行状态，呈线性变化(见图11-19)。因而，其特性可以用 δ_a^γ 和 δ_r^γ 导数形式表征。按(11-39)式求导，得：

$$\delta_a^\gamma = \frac{C_{Y_r}}{m_{\beta}^\beta} \frac{m_{\beta}^\beta - m_{\beta}^\beta \gamma \frac{m_{\beta}^\beta}{m_{\beta}^\beta \gamma}}{C_{\beta}^\beta - C_{\beta}^\beta \gamma \frac{m_{\beta}^\beta}{m_{\beta}^\beta \gamma}} \quad (11-40)$$

$$\delta_r^\gamma = \frac{C_{Y_a}}{m_{\beta}^\beta} \frac{m_{\beta}^\beta}{C_{\beta}^\beta - C_{\beta}^\beta \gamma \frac{m_{\beta}^\beta}{m_{\beta}^\beta \gamma}} \quad (11-41)$$

δ_a^γ 和 δ_r^γ 是衡量定直侧滑飞行的两个静操纵性指标。这里选用 γ 而不用 β ，是考虑驾驶员容易从仪表上读飞机的倾斜角。从图 11-19 可以看出 β 与 γ 是同号，所以用 γ 代替 β 不致改变衡量定直侧滑飞行的静操纵性质。

根据飞机设计(规范)要求， δ_a^γ 和 δ_r^γ 都应是负值。表明保持右侧滑定直飞行，要求蹬左舵，右压杆；同时，飞机向右倾侧。这样操纵是符合驾驶员正常习惯的。

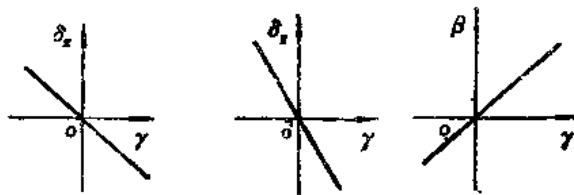


图 11-19

(11-39)式中的 β 和 γ 的关系式，因 β 与 γ 是同号，所以分母为负值，

正常飞行中 C_{Y_r} 为正值。根据(11-40)、(11-41)两式，因其两分母之积一般为正值，所以 δ_a^γ 和 δ_r^γ 的符号直接取决于分子项符号。所以，对于 δ_r^γ 来说，如果 $m_{\beta}^\beta < 0$ ，即飞机具有航向静稳定性，则 δ_r^γ 小于零，符合设计要求。对于 δ_a^γ 来说，如 $(m_{\beta}^\beta - m_{\beta}^\beta \gamma \frac{m_{\beta}^\beta}{m_{\beta}^\beta \gamma}) < 0$ ，或

$$m_{\beta}^\beta \gamma \frac{m_{\beta}^\beta}{m_{\beta}^\beta \gamma} > m_{\beta}^\beta \quad (11-42)$$

则 δ_a^γ 也小于零，符合设计要求。分析上述不等式，看出：若 $m_{\beta}^\beta < 0$ ，则不等式左边为负值，因此，如果 $m_{\beta}^\beta > 0$ ，肯定不满足不等式关系。这就是说要使 $\delta_a^\gamma < 0$ ，必须要 $m_{\beta}^\beta < 0$ ，则飞机应具有横向静稳定性。然而，这还不是充分条件，因为即使 $m_{\beta}^\beta < 0$ 但不满足(11-42)式， δ_a^γ 仍会是正值而不符合设计要求。这就是横侧静操纵性与横侧静稳定性之间的联系。

另外，由于构造上和气流分离方面的限制，副翼和方向舵的偏角不可能无限制地加大，所以可从(11-38)式看出，飞机的横向和航向的静稳定度也不能无限制增加。

§ 11-4 横侧动稳定性概念

飞机横侧扰动运动，可能由于以下各种干扰而产生：飞机突然遇到侧风、多发飞机的一边发动机突然停车，驾驶员偶尔偏动副翼或方向舵等等，这些干扰都会使飞机产生初始侧滑

角和倾斜角而进入横侧扰动运动。

横侧动稳定性就是研究横侧扰动运动自动恢复到基本运动（定常直线运动）的特性。

研究表明，飞机具有横侧静稳定性，并不一定能保证它具有横侧动稳定性，还须具有一定的由转动而产生的阻尼力矩以及两个静稳定度（ m_{α}^0 和 m_{β}^0 ）的大小配合适当时，才有可能使飞机具有横侧动稳定性。而对于某些超音速飞机仍须采取自动控制措施。

在横侧运动中，滚转时不仅产生横向阻尼力矩，而且还会产生偏航力矩；偏航时，除产生航向阻尼力矩外，也要产生横向力矩。这种由滚转而产生的偏航力矩和由偏航而产生的横向力矩，称为交叉力矩。横侧运动中，横向运动和航向运动相互影响及交叉力矩的产生，这些是横侧动稳定性与纵向动稳定性不同的特点。

所以本节首先讨论横侧运动的阻尼力矩和交叉力矩，然后在此基础上讨论横侧动稳定性的一些重要概念。

一、飞机滚转时所引起的力矩（由 ω_x 引起力矩）

1. 横向阻尼力矩

当飞机以速度 V 飞行，同时绕 ox 轴以角速度 ω_x 旋转时，如图11-20所示，机翼沿展向有附加速度，从而改变了各个剖面的迎角和速度，在图11-20上所表示的旋转方向中， $\omega_x > 0$ ，使右翼加大迎角和速度，升力加大，左翼升力减小，形成了阻止飞机转动的力矩。这一由旋转角速度 ω_x 而产生的阻止飞机转动的力矩，叫做飞机横向阻尼力矩。

除了机翼以外，由于飞机的旋转，立尾上也有附加速度，它改变了立尾的局部侧滑角，由图11-21所示的转动方向使立尾加大侧滑角，由此所产生的侧力对重心的横向力矩也是阻止飞机转动的，故也是飞机横向阻尼力矩的一部分。

飞机的其它部件中，平尾的作用类似于机翼，但所产生的阻尼力矩远比机翼为小。机身因外形接近旋成体，故产生力矩甚微，可以忽略。

飞机的横向阻尼力矩通常用力矩系数对角速度的导数形式表示，写为

$$m_{\dot{\omega}_x}^{\omega_x} = \frac{\partial m_x}{\partial \dot{\omega}_x} \quad (11-43)$$

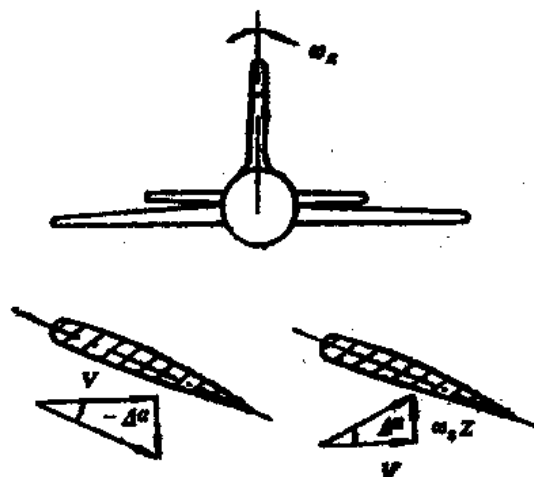


图 11-20

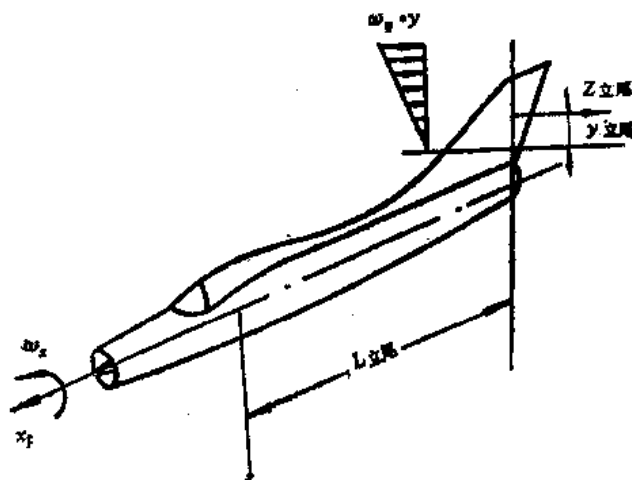


图 11-21

其中

$$m_a = \frac{M_a}{qSl} \quad (11-44)$$

$$\bar{m}_a = \frac{\omega_a l}{2V} \quad (11-45)$$

$\bar{m}_a$ 称为横向阻尼导数,它一般为负值。表示当飞机向右滚转时,产生向左滚的阻尼力矩。此导数可通过实验或估算的方法得出。

2. 航向交叉力矩

飞机以 ω_a 滚转时,除了产生横向阻尼力矩以外,还产生航向交叉力矩。产生此力矩的主要部件是机翼和立尾。

上面已分析,当机翼绕 ox_i 轴旋转时,左右翼各剖面的迎角和速度不等,这不仅使各剖面的升力不等,阻力也不等。因此,升力和阻力的合力在 ox_i 轴上的投影也不等,形成了航向力矩。

此外,立尾上由于 ω_a 产生的侧力对飞机 oy_i 轴的力矩使机头向右偏转。

这由于绕 ox_i 轴旋转而产生的航向力矩叫做航向交叉力矩。类似于横向阻尼力矩导数的作法,它用导数 m_{y_a} 表示。一般此导数为负值。表示当飞机向右滚转时,产生向右偏航的力矩。

二、由于飞机绕 oy_i 轴旋转而产生的力矩

1. 航向阻尼力矩

当飞机以迎角 α 、速度 V 飞行,同时绕 oy_i 轴以角速度 ω_y 旋转时,如图11-22所示,飞机的右翼向前运动,左翼向后运动,相对机翼来说,右翼的速度增大,左翼的速度减小。同时右翼的迎角减小了,左翼则相反,加大了迎角。左右翼迎角和速度的变化使得左右翼升力、阻力不等,它们的合力在 ox_i 轴上的投影也不相等,形成了航向阻尼力矩。

对立尾来说,图11-23示出由于旋转而产生的附加速度,它将改变立尾局部侧滑角,使立尾上作用有附加侧力。在图示的旋转方向, $\omega_y > 0$,侧力形成阻止飞机继续绕 oy_i 轴旋转的航向力矩。

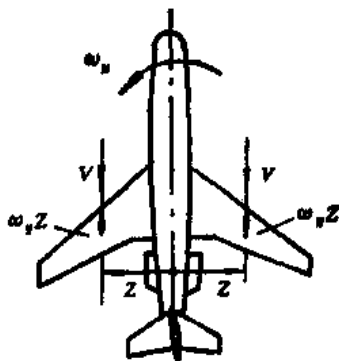


图 11-22

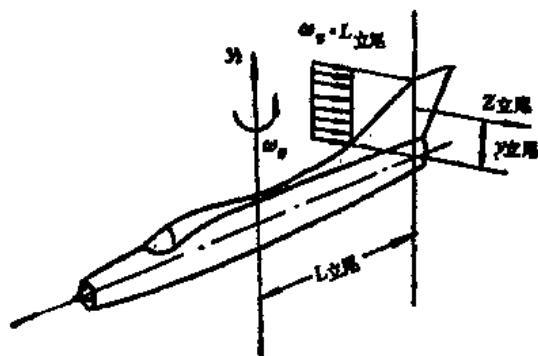


图 11-23

平尾的作用类似机翼。机身也有阻尼力矩产生,在全机各部件中,立尾的航向阻尼占主要地位。总之,由于飞机绕 oy_i 轴旋转将产生阻止旋转的航向力矩,称之为航向阻尼力矩。

航向阻尼力矩通常也用其力矩系数对角速度的导数表示, 写为

$$m_{\dot{\omega}_y} = \frac{\partial m_y}{\partial \dot{\omega}_y} \quad (11-46)$$

式中

$$m_y = \frac{M_y}{qSl} \quad (11-47)$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{2V} \quad (11-48)$$

$m_{\dot{\omega}_y}$ 称为航向阻尼导数, 它一般为负值, 表示当机头向左偏航时, $\omega_y > 0$, 产生使机头向右转的阻尼力矩 ($M_y < 0$)。此导数可通过实验或估算的方法得出。

2. 横向交叉力矩

和航向交叉力矩类似, 当机翼绕 oy_z 轴旋转时, 左、右翼各剖面迎角和速度不等, 使得左、右翼升力和阻力的合力在 oy_z 轴上的投影不相等, 故形成了飞机滚转力矩。

此外, 立尾由于绕 oy_z 轴旋转而产生的侧力引起绕 ox_z 轴的力矩。

这一由于飞机绕 oy_z 轴旋转而产生的横向力矩叫做横向交叉力矩。类似航向交叉力矩, 它用导数 $m_{\dot{\omega}_y}$ 表示。一般此导数为负值, 表示当飞机向左偏航时, 产生向左滚转的交叉力矩。

三、飞机横侧扰动运动示例

飞机的横侧扰动运动是由两个非周期性运动和一个周期性振动运动叠加而成的, 故横侧扰动运动有三种运动模态:

(1) 滚转收敛运动——是非周期的稳定运动。因为阻尼很大, 所以衰减得很快 (一般在几分之一秒内就消失)。

(2) 螺旋运动——为飞机沿螺旋轨迹运动的一种非周期运动。螺旋运动发展很慢 (振幅增大一倍所需的时间有时可达到 3 分钟), 即使不稳定, 驾驶员也有时间加以干预和纠正。因而对于具有轻微的螺旋不稳定的飞机, 并不致于造成危险事故。

(3) 振荡运动 (荷兰滚)——是一种周期性振动运动。这种振动表现为飞机交替地向左和向右倾斜, 同时绕 oy_z 轴转动, 形成左右振荡或左右摇摆现象。如果振荡不稳定, 它进行得很快, 其振动周期一般为 2—4 秒。对于这种发展十分迅速的振荡运动, 驾驶员很难加以干预, 因此, 在飞机设计中, 应设法保证飞机具有振荡稳定性。

螺旋运动和振荡运动是否稳定, 与横侧静稳定度 $m_{\dot{\omega}_y}$ 和 $m_{\dot{\omega}_x}$ 的相对大小有密切的关系。如果 $m_{\dot{\omega}_y}$ 和 $m_{\dot{\omega}_x}$ 配合适当, 则有可能使上述两种运动都稳定的; 若配合不当, 或由于飞机构造上的考虑而不能使它们配合适当时, 则须尽力保证振荡运动稳定, 而宁愿让发展很慢的螺旋运动存在着轻微的不稳定。

如上所述, 整个横侧扰动运动是由三个运动叠加而成的, 如果其中有一个不稳定的, 则整个扰动运动就是不稳定的。

图 11-24 为某飞机的横侧扰动运动过程曲线示例。

由该曲线可见, 整个扰动运动的发展过程大致可以分为以下三个阶段:

第一阶段是对应于非周期性滚转收敛运动为主的扰动运动。由于它衰减极快 ($t_{1/2} = 0.12$

秒)，在图中甚至不能以曲线表示出来。

第二阶段的扰动运动，是对应于振荡运动（见图 11-24 中 4 秒内的振动曲线）为主的运动。由于这一运动是稳定的，所以在受到初始扰动 4 秒钟后，即基本消失。

第三阶段的扰动运动，是对应于螺旋运动为主的运动。在该示例中，由于这一运动是非周期不稳定的，所以运动参数 β 、 $\bar{\omega}_x$ 、 $\bar{\omega}_y$ 、 γ 随着时间的增长渐渐地偏离其初始扰动值。因此我们说，整个扰动运动最后是不稳定的。

关于产生螺旋不稳定或振荡不稳定的物理原因解释如下：

产生螺旋不稳定的原因，是由于其它条件不变时比值 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}/m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 过小，亦即 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}$ 过小而 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 过大的缘故（ $m_{\dot{\beta}}^{\beta}$ ， $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 的大小均指绝对值）。

设飞机受到扰动处于向右倾斜同时向右侧滑的情况。由于 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 很大，立即产生较大的偏航恢复力矩 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}\beta$ ，使飞机迅速向右偏航，因而产生较大的偏航角速度（ $-\omega_y$ ）；由于 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}$ 很小，所产生的滚转恢复力矩 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}\beta$ 亦很小，不能显著地减小倾斜角 γ 。相反地，较大的（ $-\omega_y$ ）却产生了较大的滚转交叉力矩（即飞机绕 ox 或 oy 轴旋转时相应地在另一轴上所产生的力矩） $M_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}\omega_y$ ，它使飞机继续向右倾斜，从而加大了向右侧滑。较大的右侧滑，又将按照前述过程使飞机更加向右偏航和向右倾斜。当飞机倾斜后，升力的垂直方向的分量将小于飞机的重量，所以飞机一方面机头偏转，一方面下降，形成螺旋运动而不能恢复到原来的飞行状态。

产生振荡不稳定的原因，是由于比值 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}/m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 过大，亦即 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}$ 过大而 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 过少的缘故。

设飞机受到扰动向右倾斜并向右侧滑时，由于 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 很小，所产生的偏航恢复力矩 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}\beta$ 亦很小，因此飞机消除侧滑角的能力较弱；但是，由于 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}$ 很大，所产生的滚转恢复力矩 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}\beta$ 却很大，飞机受扰动后即迅速向左滚转，继之向左侧滑。此时侧滑角改变了符号，因而又产生向右滚转的恢复力矩 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}\beta$ ，飞机向右滚转时继之向右侧滑，由此而产生不停的左右滚转和左右侧滑的运动。这种运动就是振荡不稳定运动。

前已指出，影响 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}$ 大小的主要因素是机翼上反角和后掠角。但是机翼后掠角主要由保证飞机的基本性能（特别是飞机最大速度 $V_{\max}$ ）所确定，不能任意改变，所以改变 $m_{\dot{\beta}}^{\beta}$ 值主要依靠改变上反角 ϕ 得到。影响 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 大小的主要因素是立尾面积 $S_{\text{立尾}}$ ，因此改变 $m_{\dot{\beta}}^{\dot{\beta}}$ 值主要依靠改变 $S_{\text{立尾}}$ 得到。根据以上分析，我们可以认为：飞机产生螺旋不稳定的基本原因是由于立尾面积 $S_{\text{立尾}}$ 太大，而机翼上反角 ϕ 太小；产生振荡不稳定的基本原因是由于 ϕ 太大，而 $S_{\text{立尾}}$ 太小。

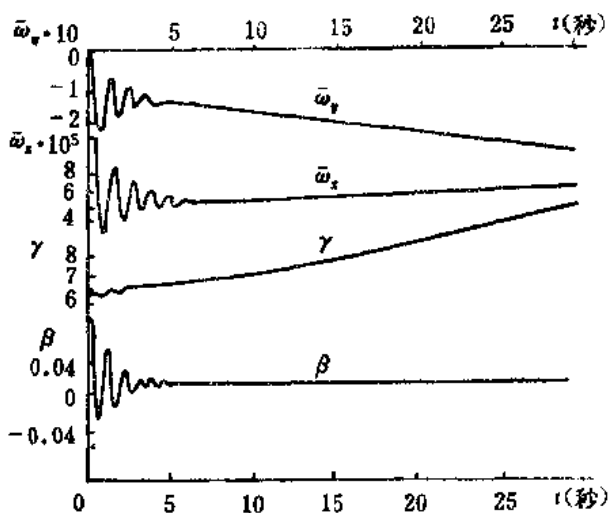


图 11-24

练 习 题

11.1 什么叫横向和航向静稳定性？

- 11.2 什么叫做飞机的上反效应和后掠效应?
- 11.3 试从机翼的上反角和后掠角对横向力矩的作用画出:
- (1)无上反有后掠;
- (2)有上反无后掠;
- (3)同时具有上反和后掠的三种机翼,其 m_x^0 随 C_D 变化的大致形状。
- 11.4 定常直线飞行中,驾驶员突然用右脚蹬舵,问飞机向哪一方倾斜?
- 11.5 如果飞机具有两台发动机,装在左右机翼上,当起飞爬高时,右边发动机停车,这时为了保证飞机作定常侧滑直线飞行,驾驶员应如何操作?(认为飞机具有横向和航向静稳定性)
- 11.6 试说明产生横向和航向阻尼力矩、交叉力矩的原因及其主要部件。
- 11.7 横侧扰动运动的典型模态有哪些?它们各有什么特征?
- 11.8 试分析产生振荡不稳定的物理原因。

附 录

附录一 公式(3-19)的推导

波后 M 数和气流转折角 δ 的关系

$$\int_0^\delta d\delta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

设

$$\sqrt{M^2-1} = x$$

则

$$M^2 = x^2 + 1$$

微分上式

$$2M dM = 2x dx$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} &= \frac{x}{1+\frac{k-1}{2}(x^2+1)} \frac{x dx}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2 dx}{\left(\frac{k-1}{2}x^2 + \frac{k+1}{2}\right)(x^2+1)} \end{aligned}$$

令

$$\frac{x^2}{\left(\frac{k-1}{2}x^2 + \frac{k+1}{2}\right)(x^2+1)} = \frac{A}{\frac{k-1}{2}x^2 + \frac{k+1}{2}} + \frac{B}{x^2+1}$$

所以

$$x^2 = A(x^2+1) + B\left(\frac{k-1}{2}x^2 + \frac{k+1}{2}\right)$$

x^2 的系数相等, 得

$$1 = A + \frac{B}{2}(k-1)$$

x 的零次幂相等, 得

$$0 = A + \frac{B}{2}(k+1)$$

从以上二式求得 $B = -1$, $A = \frac{k+1}{2}$, 则

$$\frac{x^2}{\left(\frac{k-1}{2}x^2 + \frac{k+1}{2}\right)(x^2+1)} = \frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2}x^2 + \frac{k+1}{2}} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{\frac{k-1}{k+1}x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

这样积分式

$$\begin{aligned} \int_0^\theta d\theta &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\frac{k-1}{k+1}x^2 + 1} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

式中

$$x_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}, \quad x_2 = \sqrt{M_2^2 - 1}$$

由积分表可查得

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\frac{k-1}{k+1}x^2 + 1} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} x_2 - \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} x_1$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{tg}^{-1} x_2 - \operatorname{tg}^{-1} x_1$$

所以

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (M_2^2 - 1) - \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{M_2^2 - 1} \\ &\quad - \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (M_1^2 - 1) + \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{M_1^2 - 1} \end{aligned}$$

这就是式(3-19)。

附录二 公式(3-55)的推导

激波角 β 与波前气流 M 数, 气流转折角 θ 的关系式(3-55)的推导如下

由图 3-19 可写出

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = \frac{v_{n2}}{v_{t2}} = \frac{v_{n2}}{v_t}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_{n1}}{v_{t1}} = \frac{v_{n1}}{v_t}$$

因此

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = \frac{v_{n1}}{v_t} \frac{v_{n2}}{v_{n1}} = \operatorname{tg}\beta \frac{v_{n2}}{v_{n1}} \quad (1)$$

由式(3-48)改写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_{n1}^2 + v_{t1}^2) + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{1}{2}(v_{n2}^2 + v_{t2}^2) + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \\ &= \frac{1}{k-1} a_0^2 \\ &= \frac{k+1}{2(k-1)} a_*^2 \end{aligned}$$

因为

$$v_{t1} = v_{t2} = v_t$$

$$\frac{1}{2}v_{n1}^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}v_{n2}^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2(k-1)} \left(a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} v_t^2 \right) \quad (2)$$

由式(3-27)改写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \\ &= \frac{1}{k-1} a_0^2 \\ &\approx \frac{k+1}{2(k-1)} a_*^2\end{aligned}\quad (3)$$

将式(3-44)式(3-45), 式(2)与式(3-24), 式(3-25), 式(3)三式比较, 由式(3-36)可得

$$v_{n1}v_{n2} = a_*^2 - \frac{k-1}{k+1}v_i^2 \quad (4)$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} a_*$$

(4)式改写成

$$v_{n1}v_{n2} = \frac{k-1}{k+1}(v_{\max}^2 - v_i^2) \quad (5)$$

$$\frac{a_1^2}{k-1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_{\max}^2}{2}$$

代入上式

$$\begin{aligned}v_{n1}v_{n2} &= \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{2a_1^2}{k-1} + v_{n1}^2 + v_i^2 - v_i^2 \right) \\ &= \frac{2}{k+1} a_1^2 + \frac{k-1}{k+1} v_{n1}^2\end{aligned}\quad (6)$$

(6)式两边除以

$$\begin{aligned}v_{n1}^2 &= v_i^2 \sin^2 \beta \\ \frac{v_{n2}}{v_{n1}} &= \frac{2}{k+1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{k-1}{k+1}\end{aligned}\quad (7)$$

将(7)代入(1)

$$\operatorname{tg}(\beta - \delta) = \operatorname{tg} \beta \left(\frac{2}{k+1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{k-1}{k+1} \right) \quad (8)$$

利用三角公式

$$\operatorname{tg}(\beta - \delta) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \delta}$$

求出

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\beta - \delta)}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\beta - \delta)} \quad (9)$$

将(8)代入(9), 解出

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{\left[M_1^2 \left(\frac{k+1}{2} - \sin^2 \beta \right) + 1 \right] \operatorname{tg} \beta}$$

这就是式(3-55)。

附录三 公式(4-58)推导

在极坐标系 (r, θ) 中, 由于速度位 φ 可表示成 $\varphi(x, y)$ 或 $\varphi(r, \theta)$, 而 r, θ 与 x, y 之间存在下列关系:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$$

或

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

于是, φ 对 x 的偏导数有如下公式

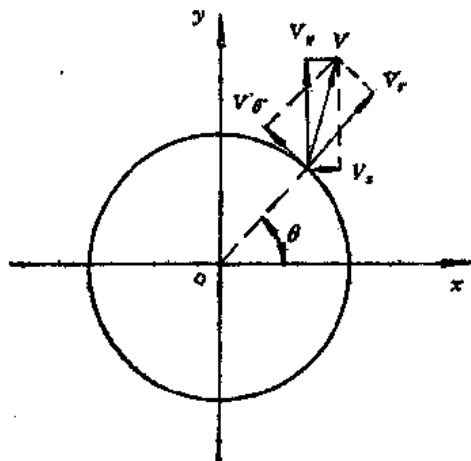
$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \theta \\ &= V_x \cos \theta + V_y \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

从附图 3-1 中看到, 速度 $\vec{V}$ 在 r 方向的分速度 V_r 为:

$$V_r = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta \quad (2)$$

比较(1)、(2)两式, 可知

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_r \quad (3)$$



附图 3-1

同理,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} r \cos \theta \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \theta \\ &= -V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \end{aligned} \quad (4)$$

从附图 3-1 中看出, 速度 $\vec{V}$ 在 θ 变化的圆周方向分速度 V_θ 为

$$V_\theta = -V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \quad (5)$$

比较(4)、(5)两式, 可知

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (6)$$

(3), (6)即为式(4-58)。

附录四 标准大气表

H (千米)	T (℃)	a (米/秒)	$P \times 10^{-4}$ (牛顿/米 ²) (帕)	ρ (千克/米 ³)	$\mu \times 10^5$ (千克/米秒)
0	15.0	340	10.132	1.226	1.780
1	8.5	336	8.987	1.112	1.749
2	2.0	332	7.948	1.007	1.717
3	- 4.5	329	7.010	.909	1.684
4	-11.0	325	6.163	.820	1.652
5	-17.5	320	5.400	.737	1.619
6	-24.0	316	4.717	.660	1.586
7	-30.5	312	4.104	.589	1.552
8	-37.0	308	3.558	.526	1.517
9	-43.5	304	3.073	.467	1.482
10	-50.0	299	2.642	.413	1.447
11	-56.5	295	2.261	.364	1.418
12	-58.5	295	1.932	.311	1.418
13	-58.5	295	1.650	.265	1.418
14	-56.5	295	1.409	.227	1.418
15	-56.5	295	1.203	.194	1.418
16	-56.5	295	1.027	.163	1.418
17	-56.5	295	.785	.141	1.418
18	-56.5	295	.749	.121	1.418
19	-56.5	295	.640	.103	1.418
20	-56.5	295	.546	.088	1.418
30	-56.5	295	.117	.019	1.418
45	40.0	355	.017	.002	1.912
60	70.8	372	.003	3.9×10^{-4}	2.047
75	-10.0	325	.0006	8×10^{-5}	1.667

参 考 文 献

- [1] 陈再新等编,《飞行器空气动力学》,航空专业教材编审组出版,1985年。
- [2] 徐华舫编著,《空气动力学基础》,国防工业出版社,1982年。
- [3] 杨岙生、俞守勤编,《飞行器部件空气动力学》,国防工业出版社,1981年。
- [4] A.M.Keuthe, C.Y.Chow, Foundation of Aerodynamics, 1978.
- [5] 张仲寅、乔志德编著,《粘性流体力学》,国防工业出版社,1982年。
- [6] [德]H.施里希廷著,王星灿译,《飞机空气动力学》,国防工业出版社,1978年。
- [7] [苏]A.A.列别捷夫著,张炳曜等译,《无人驾驶飞行器的飞行动力学》,国防工业出版社,1984年。
- [8] [苏]H.C.阿尔然尼柯夫等著,《空气动力学》,高等教育出版社,1978年。
- [9] [美]H.A.查克斯著,《实验空气动力学原理》,国防工业出版社,1958年。
- [10] 胡兆丰、何植岱、高浩编,《飞行动力学》,国防工业出版社,1985年。
- [11] 金长江、范立钦、周士林编,《飞行动力学》,国防工业出版社,1983年。
- [12] 《空气动力学》,中国人民解放军空军工程学院,1979年。
- [13] 《飞行力学》,中国人民解放军空军工程学院,1980年。